

ENS Ulm-Cachan 2003 - Corrigé

Partie I

I - 1. L'inégalité de Taylor-Lagrange peut s'écrire pour $y \geq x$: $\varphi(y) - \varphi(x) \geq (y - x) \inf_{u \in [x, y]} \varphi'(u) = (y - x)\varphi'(x)$, puisque φ' est supposée croissante.

I - 2. Appliquons la question précédente pour $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ et $y = x_j$; il vient : $\varphi(x_j) \geq \varphi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) \geq (x_j - x)\varphi'(x)$ puis en sommant sur j avec des facteurs a_j positifs et de somme 1 :

$$\sum_{j=1}^n a_j \varphi(x_j) \geq \sum_{j=1}^n a_j \varphi(x) + \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j - x \right) \varphi'(x) \geq \varphi(x) + 0$$

ce qu'il fallait.

I - 3. L'approche est similaire : on applique la première question avec $x = \int_a^b g(t)f(t) dt$ (c'est la valeur moyenne de g dans ce contexte puisque f est d'intégrale 1) et $y = g(u)$: $\varphi(y) \geq \varphi\left(\int_a^b f(t)g(t) dt\right) + (y - x)\varphi'(x)$, puis on intègre en u avec un facteur $f(u)$:

$$\int_a^b \varphi(g(u))f(u) du \geq \varphi(x) \int_a^b f(u) du + \varphi'(x) \int_a^b (g(u) - x)f(u) du \geq \varphi(x) + 0$$

parce que $\int_a^b f(u) du = 1$ et $\int_a^b g(u)f(u) du = x \int_a^b f(u) du$. Le résultat en découle :

$$\int_a^b \varphi(g(u))f(u) du \geq \varphi\left(\int_a^b f(t)g(t) dt\right).$$

Remarque. Il s'agit de l'inégalité de Jensen. On peut aussi la déduire de la question précédente en considérant l'intégrale comme une limite de sommes de Riemann associées à des équipartitions de $[a, b]$.

Partie II

II - 1. *Remarque.* Dans toute la suite nous ferons usage de la fonction η telle que $\eta(x) = -x \ln x$ pour $x > 0$ et $\eta(0) = 0$; cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$ et elle est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\eta'(x) = -1 - \ln x$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$; de fait, la concavité de η demeure sur $\mathbb{R}_+$ grâce au prolongement par continuité en 0, à condition de prendre la "bonne" définition de la concavité – essentiellement ce que fournit la question I.2 avec $n = 2$ – en conformité avec le programme officiel bien entendu.

On a ici

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta(p_i) \leq \eta\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_i\right) = \eta\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\ln k}{k}$$

soit encore $H_k(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k -p_i \ln p_i \leq \ln k$. En procédant à un passage à la limite avec des p_i qui tendent vers 0, ou simplement en permutant les termes pour mettre les p_i nuls à la fin, on obtient : $\forall p \in \mathcal{A}_n, H_n(\mathbf{p}) \leq \ln n$.

II - 2. L'ensemble $\mathcal{A}_n$ est convexe en tant qu'intersection de parties convexes, définies par les inégalités $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$, et la concavité de η (au sens étendu évoqué précédemment) donne par sommation

$$H_n(\lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda) \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \eta(\lambda p_i + (1 - \lambda) q_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda \eta(p_i) + (1 - \lambda) \eta(q_i) = \lambda H_n(\mathbf{p}) + (1 - \lambda) H_n(\mathbf{q}).$$

II - 3.

II - 3.a Il va de soi que les composantes du vecteur $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ sont positives ; quant à leur somme, elle vaut : $\sum_i \sum_j p_i q_j = (\sum_i p_i)(\sum_j q_j) = 1$, assurant que $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ se trouve bien dans $\mathcal{A}_n$. Puis on calcule $\eta(p_i q_j) = -p_i q_j \ln p_i - p_i q_j \ln q_j = q_j \eta(p_i) + p_i \eta(p_j)$ et on somme sur i et sur j ; chacun des deux termes fait apparaître une somme valant 1 et laisse venir la formule $H_{nm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H_n(\mathbf{p}) + H_m(\mathbf{q})$.

II - 3.b On vérifie directement la formule

$$\eta(p_1) + \eta(p_2) = \eta(p_1 + p_2) + (p_1 + p_2) \eta\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}\right) + (p_1 + p_2) \eta\left(\frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

(les trois termes en $\ln(p_1 + p_2)$ s'éliminant), et on somme avec les termes restants pour obtenir la formule

$$H_n(\mathbf{p}) = H_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) + (p_1 + p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right).$$

II - 4.

II - 4.a Si $\mathcal{I}$ était vide, on aurait $p_i < q_i$ pour tout i , ce qui par sommation amènerait $1 < 1$, absurde. Pareillement, si $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ alors on a $p_i \geq q_i$ pour tout i , alors que la somme de ces inégalités donne $1 = 1$; on a donc "égaliés à tous les étages", ce qui impose $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, exclu. Soit alors $S = \sum_i p_i$,

somme qui n'est certainement pas nulle car cela obligerait les q_i correspondants à être nuls, ce qu'on a aussi exclu ; S ne vaut pas non plus 1 car cela donnerait $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. Pour traiter pareillement $\mathcal{I}$ et son complémentaire on considère une partie $\mathcal{J}$ non vide de $\{1, \dots, n\}$.

Introduisons alors la fonction convexe $f = -\ln$, et utilisons l'inégalité de convexité pour $x_i = \frac{q_i}{p_i}$ (avec $i \in \mathcal{J}$) et $a_i = \frac{p_i}{S}$:

$$f\left(\sum_{i \in \mathcal{J}} a_i \frac{q_i}{p_i}\right) = -\ln\left(\sum_{i \in \mathcal{J}} \frac{q_i}{S}\right) = \ln \frac{\sum_{i \in \mathcal{J}} p_i}{\sum_{i \in \mathcal{J}} q_i} \leq \sum_{i \in \mathcal{J}} a_i f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) = \frac{1}{S} \sum_{i \in \mathcal{J}} p_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$$

ce qui est l'inégalité proposée par l'énoncé. En choisissant successivement $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ puis son complémentaire $\mathcal{I}' = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{I}$ il vient sans peine : ■

$$D_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq \tilde{p} \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} + (1 - \tilde{p}) \ln \frac{1 - \tilde{p}}{1 - \tilde{q}}.$$

II - 4.b On a

$$\sum |p_i - q_i| = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i - q_i - \sum_{i \in \mathcal{I}'} p_i - q_i = \tilde{p} - \tilde{q} - (1 - \tilde{p}) + (1 - \tilde{q}) = 2(\tilde{p} - \tilde{q}).$$

II - 4.c On étudie d'abord la fonction $\alpha(t) = \tilde{p} \ln t + (1 - \tilde{p}) \ln(1 - t)$: $\alpha'(t) = \frac{\tilde{p} - t}{t(1 - t)}$ change de signe en $t = \tilde{p}$, de sorte que α est maximale en $\tilde{p} \geq \tilde{q} \geq 0$. L'inégalité proposée faisant apparaître des carrés, nous introduisons une seconde fonction auxiliaire (qui n'est autre que le reste de Taylor-Lagrange de α en $\tilde{p}$ à l'ordre 2) : $\xi(t) = \alpha(\tilde{p}) - \alpha(t) - 2(t - \tilde{p})^2$. On dérive : $\xi'(t) = -\frac{\tilde{p} - t}{t(1 - t)} - 4(t - \tilde{p}) = -\frac{(\tilde{p} - t)(1 - 2t)^2}{t(1 - t)} \leq 0$. Dans ces conditions, ξ décroît de $+\infty$ à 0 sur $]0, \tilde{p}]$ et en particulier on a bien $\xi(\tilde{q}) \geq 0$ soit grâce aux deux questions précédentes

$$D_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq \alpha(\tilde{p}) - \alpha(\tilde{q}) \geq 2(\tilde{p} - \tilde{q})^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \right)^2.$$

II - 5.

II - 5.a On a par (P4) : $J_{n+1}(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0) = J_n(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = \psi(n)$ et par (P3) : $J_{n+1}(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0) \leq J_{n+1}(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ soit $\psi(n) \leq \psi(n+1)$: ψ est croissante. La propriété (P5), appliquée à $\mathbf{p} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ et à $\mathbf{q} = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$, donne immédiatement $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (\frac{1}{mn}, \dots, \frac{1}{mn})$ puis $\psi(mn) = \psi(n) + \psi(m)$: ψ est additive.

II - 5.b Nous avons à comparer $\beta(n) = \frac{\ln n}{\ln 2}$ et $\gamma(n) = \frac{\psi(n)}{\psi(2)}$; ces deux fonctions (de variable entière) coïncident pour $n = 2$, sont croissantes et additives (au sens évoqué à la question précédente). Pour tous entiers $n, r \geq 2$ on peut encadrer n^r par deux puissances de 2 successives : $2^p \leq n^r < 2^{p+1}$, ce qui amène $\beta(2^p) = p \leq \beta(n^r) = r\beta(n) < p+1$ soit aussi $E(r\beta(n)) = p$. On a aussi $\frac{p}{r} \leq \beta(n) < \frac{p}{r} + \frac{1}{r}$ et le même encadrement pour $\gamma(n)$ pour les mêmes raisons, ce qui impose $|\beta(n) - \gamma(n)| < \frac{1}{r}$. En faisant tendre r vers l'infini (p tend aussi vers l'infini), on obtient à la limite $\beta(n) = \gamma(n)$ c'est-à-dire $\psi(n) = c \ln n$.

II - 5.c Commençons par le cas $n = 2$ et appliquons la propriété (P6) :

$$\begin{aligned} J_4(p_1q_1, p_1q_2, p_2r_1, p_2r_2) &= J_3(p_1(q_1 + q_2), p_2r_1, p_2r_2) + p_1(q_1 + q_2)J_2\left(\frac{p_1q_1}{p_1(q_1 + q_2)}, \frac{p_1q_2}{p_1(q_1 + q_2)}\right) \\ &= J_3(p_1, p_2r_1, p_2r_2) + p_1J_2(q_1, q_2) && \text{puisque } q_1 + q_2 = 1 \\ &= J_3(p_2r_1, p_2r_2, p_1) + p_1J_2(q_1, q_2) && \text{propriété (P2)} \\ &= J_2(p_2, p_1) + p_2J_2(r_1, r_2) + p_1J_2(q_1, q_2) && \text{propriété (P6) et } r_1 + r_2 = 1 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait. Le cas général fonctionne de même (avec $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{A}_{n+1}$). On suppose que l'on a

$$J_{2n}(p_1q_1, \dots, p_1q_n, p_2r_1, \dots, p_2r_n) = J_2(p_2, p_1) + p_1J_n(q_1, \dots, q_n) + p_2J_n(r_1, \dots, r_n)$$

et on attaque $J_{2n+2}(p_1q_1, \dots, p_1q_{n+1}, p_2r_1, \dots, p_2r_{n+1})$ au moyen de (P2) et (P6) :

$$\begin{aligned} J_{2n+2}(p_1q_1, \dots, p_1q_{n+1}, p_2r_1, \dots, p_2r_{n+1}) &= J_{2n+1}(p_1q_1, \dots, p_1q_{n-1}, p_1(q_n + q_{n+1}), p_2r_1, \dots, p_2r_{n+1}) + p_1(q_n + q_{n+1})J_2\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}, \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}\right) \\ &= J_{2n}(p_1q_1, \dots, p_1q_{n-1}, p_1(q_n + q_{n+1}), p_2r_1, \dots, p_2r_{n-1}, p_2(r_n + r_{n+1})) \\ &\quad + p_2(r_n + r_{n+1})J_2\left(\frac{r_n}{r_n + r_{n+1}}, \frac{r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}\right) + p_1(q_n + q_{n+1})J_2\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}, \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

puis on applique l'hypothèse de récurrence légèrement adaptée, ce qui donne

$$\begin{aligned} J_{2n+2}(p_1q_1, \dots, p_1q_{n+1}, p_2r_1, \dots, p_2r_{n+1}) &= J_2(p_2, p_1) + p_1J_n(q_1, \dots, q_{n-1}, q_n + q_{n+1}) + p_2J_n(r_1, \dots, r_{n-1}, r_n + r_{n+1}) \\ &\quad + p_1(q_n + q_{n+1})J_2\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}, \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}\right) + p_2(r_n + r_{n+1})J_2\left(\frac{r_n}{r_n + r_{n+1}}, \frac{r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

puis on contracte les quatre derniers termes au moyen de (P6) (à l'envers) et de (P2), soit :

$$J_{2n+2}(p_1q_1, \dots, p_1q_{n+1}, p_2r_1, \dots, p_2r_{n+1}) = J_2(p_2, p_1) + p_1J_{n+1}(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}) + p_2J_{n+1}(r_1, \dots, r_n, r_{n+1})$$

ce qu'il fallait.

II - 5.d Nous pouvons comprendre $\frac{k}{n}$ comme $\frac{1}{n}$ répété k fois et $1 - \frac{k}{n}$ comme $\frac{1}{n}$ répété $n - k$ fois, ce qui donne l'idée d'allonger $\psi(n)$ avec des zéros grâce à (P2) et (P4) pour avoir $2n$ composantes : $\psi(n) = J_{2n}(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$. Appliquons ce qui précède avec $p_1 = \frac{k}{n}$, $p_2 = 1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$, $q_i = \frac{1}{k}$ pour $i \leq k$ et 0 ensuite, $r_i = \frac{1}{n-k}$ pour $i \leq n - k$ et 0 ensuite :

$$\begin{aligned} J_{2n}\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0\right) &= J_2\left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n}J_n\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots, 0\right) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)J_n\left(\frac{1}{n-k}, \dots, \frac{1}{n-k}, 0, \dots, 0\right) \end{aligned}$$

La propriété (P4) permet alors de supprimer les zéros ce qui amène à

$$\begin{aligned}\psi(n) &= J_2\left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n} J_k\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right) + \left(1 - \frac{k}{n}\right) J_{n-k}\left(\frac{1}{n-k}, \dots, \frac{1}{n-k}\right) \\ &= J_2\left(\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{k}{n} \psi(k) + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \psi(n-k) .\end{aligned}$$

La formule proposée, à savoir $J_2(p, 1-p) = cH_2(p, 1-p)$ se trouve ainsi démontrée pour $p = \frac{k}{n}$ (compte tenu du fait avéré depuis la question II-5.b que ψ est proportionnelle au logarithme). Comme les deux fonctions proposées sont continues – grâce à la propriété (P1) – et que les rationnels sont denses dans $[0, 1]$, on a que $J_2 = cH_2$.

II - 5.e En vue de montrer que $J_n = cH_n$, on vient d'amorcer une récurrence sur n qui se poursuit aisément au moyen de (P6) et de la question II-3.b.

Partie III

III - 1. η étant continue, si $f \in \mathcal{F}$, $\eta \circ f$ est continue. De plus, η croît de 0 à $\frac{1}{e}$ lorsque x croît de 0 à $\frac{1}{e}$, or si on appelle M un majorant sur $\mathbb{R}$ de $x^2 \cdot f(x)$, pour $|x| \geq \sqrt{Me}$, on a que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2} \leq \frac{1}{e}$, d'où $|\eta \circ f(x)| \leq \left| \eta\left(\frac{M}{x^2}\right) \right| = \frac{M}{x^2} \cdot \left| \ln \frac{M}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$. En résumé, $f \cdot \ln f$ est intégrable sur $[-\sqrt{Me}, \sqrt{Me}]$ comme fonction continue, et intégrable sur $] -\infty, \sqrt{Me}] \cup [\sqrt{Me}, +\infty[$ car négligeable devant une fonction intégrable.

III - 2. $g_{\mu, \sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ est négligeable en $\pm\infty$ devant toute puissance de x , donc $x^2 \cdot f$ est bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, par le changement de variables $u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu, \sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\sigma du = 1 ,$$

car, par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$. Donc $g_{\sigma, \mu}$ est bien dans $\mathcal{F}$.

Par le même changement de variables que ci-dessus, et par imparité de la fonction $u \cdot e^{-u^2}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x g_{\mu, \sigma}(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma u + \mu) e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\sigma du \\ &= 0 + \mu = \mu .\end{aligned}$$

Par intégration par parties, $\int_{-\infty}^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2} du = \underbrace{\left[-u \cdot e^{-u^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_0 + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$, d'où, toujours

par le même changement de variables, on déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot g_{\mu, \sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 u^2 e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\sigma du = \sigma^2 .$$

Enfin, $H(g_{\mu, \sigma}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu, \sigma}(x) \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma\sqrt{2\pi} \right) dx = \frac{1}{2} + \ln \sigma\sqrt{2\pi}$.

III - 3.

III - 3.a Comme $f \cdot \ln \frac{f}{g_{\mu,\sigma}} = f \cdot \ln f - f \cdot \left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma \sqrt{2\pi} \right)$, cette fonction apparaît comme la somme de deux fonction intégrables : $f \cdot \ln f$, par le 1. ci-dessus, et un deuxième terme équivalent en valeur absolue à $\frac{1}{2\sigma^2} f(x) \cdot x^2$, qui est supposé intégrable. Donc $K_{\mu,\sigma}$ est bien défini.

On utilise l'inégalité de convexité $-\ln y \geq 1 - y$ aux points $y = \frac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -f(x) \ln \frac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)} \geq f(x) - g_{\mu,\sigma}(x) ,$$

d'où, puisque les deux membres sont intégrables sur $\mathbb{R}$, par intégration :

$$K_{\mu,\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln \frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)} dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mu,\sigma}(x) dx = 1 - 1 = 0 .$$

III - 3.b On vient de voir : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \ln g_{\mu,\sigma}(x) dx$, donc, pour $\mu = m$ et $\sigma = s$, on a :

$$\begin{aligned} H(f) &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\frac{(x-m)^2}{2s^2} + \ln(s\sqrt{2\pi}) \right) dx \\ &\leq \frac{s^2}{2s^2} + \ln(s\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2} + \ln(s\sqrt{2\pi}) \\ &\leq H(g_{\mu,\sigma}) . \end{aligned}$$

Partie IV

IV - 1.

IV - 1.a Comme $f \geq 0$ et $r > 0$, f^r est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on a une majoration de la forme $0 \leq f^r(x) \leq \frac{M^r}{x^{2r}}$, qui est bien une fonction intégrable au voisinage de l'infini dès que $2r > 1$, soit $r > \frac{1}{2}$. Donc $h_r(f)$ est bien définie sur $]1/2, +\infty[$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrables généralisées à paramètre, le paramètre étant ici r . On a $\frac{\partial f^r(x)}{\partial r} = f^r(x) \cdot \ln f(x)$, fonction continue des deux variables (x, r) sur $\mathbb{R} \times]1/2, +\infty[$, car égale à $-\frac{1}{r} \eta \circ f^r$ où la fonction $x \mapsto f^r(x) = e^{r \ln f(x)}$ est continue par produit et composition de fonctions continues. De plus on a les dominations suivantes, indépendantes de $r \in [a, b] \subset]1/2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\quad 0 \leq f^r(x) &\leq \frac{M^b}{x^{2a}} \\ \forall x \in]-\infty, -\sqrt{Me}[\cup]\sqrt{Me}, +\infty[\quad |f^r(x) \cdot \ln f(x)| &\leq \frac{1}{r} \frac{M^b}{x^{2a}} \ln \frac{M^b}{x^{2a}} . \end{aligned}$$

Sur les compacts $[-1, 1]$ ou $[-\sqrt{Me}, \sqrt{Me}]$ on peut dominer par des constantes, donc les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$ sont satisfaites, ce qui prouve que $r \mapsto F(r)$ est C^1 sur $]1/2, +\infty[$, avec $F'(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^r(x) \ln f(x) dx$.

En particulier, on voit immédiatement que $F'(1) = -H(f)$.

IV - 1.b Comme $F(1) = 1$, on peut écrire $h_r(f)$ sous la forme : $h_r(f) = -\frac{\ln F(r) - \ln F(1)}{r - 1}$, d'où on voit que la limite en $r = 1$ est au signe près la dérivée de la fonction $\ln F$ en $r = 1$:

$$h_r(f) \xrightarrow{r \rightarrow 1} (\ln F)' \Big|_{r=1} = -\frac{F'(1)}{F(1)} = H(f) .$$

IV - 2.

IV - 2.a Les fonctions f et g étant continues, $y \mapsto f(x-y).g(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $x^2 f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, f l'est a fortiori, donc $y \mapsto f(x-y).g(y)$ est pour tout x une fonction dominée par $\|f\|_\infty . g$, qui est intégrable. Donc l'intégrale définissant $f * g$ est bien définie $\forall x \in \mathbb{R}$.

IV - 2.b Ce qu'on vient de dire ci-dessus suffit à montrer la continuité de l'intégrale à paramètre x , car $(x, y) \mapsto f(x-y).g(y)$ est continue des deux variables sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, montrons donc mieux : $f * g$ est *uniformément* continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Par $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^2}$, on a l'existence de $A > 0$ tel que $f(x) < \varepsilon/2$ pour tout x tel que $|x| > A$. Alors, sur $[-2A, 2A]$, f étant uniformément continue par Heine, il existe δ , qu'on peut choisir $< A$, tel que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tout couple $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vérifiant $|x-z| < \delta$ est dans $[-2A, 2A]^2$ ou dans $(\mathbb{R} \setminus [-A, A])^2$, donc vérifie dans tout les cas $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$. Mais alors, par l'inégalité de la moyenne :

$$|(f * g)(x) - (f * g)(z)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-y) - f(z-y)).g(y) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon . g(y) dy = \varepsilon ,$$

car $|(x-y) - (z-y)| = |x-z| < \delta$. Donc $f * g$ est bien uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On a montré en passant que f l'était aussi.

IV - 3.

IV - 3.a Il existe $A > 0$ tel que les supports de f et g soient dans $[-A, A]$. Pour tout $x \notin [-2A, 2A]$ on a que dans le produit $f(x-y).g(y)$, ou bien $y \in [-A, A]$ et alors $x-y \notin [-A, A]$ et $f(x-y) = 0$, ou bien $y \notin [-A, A]$ et alors $g(y) = 0$. Donc, pour ces x -là, $(f * g)(x)$ est l'intégrale de la fonction nulle. Donc $f * g$ est à support dans $[-2A, 2A]$.

IV - 3.b En reprenant les notations ci-dessus concernant les supports de f et g , on peut écrire :

$$H(f * g) = \int_{-2A}^{2A} (\eta \circ (f * g))(x) dx ;$$

Or, à x fixé, par l'inégalité de Jensen du **I-3.** :

$$(\eta \circ (f * g))(x) = \eta \left(\int_{-A}^A f(x-y).g(y) dy \right) \geq \int_{-A}^A (\eta \circ f)(x-y).g(y) dy ,$$

d'où par intégration en x et par Fubini :

$$H(f * g) \geq \int_{-2A}^{2A} \left(\int_{-A}^A \eta \circ f(x-y).g(y) dy \right) dx = \int_{-A}^A \left(\int_{-2A}^{2A} (\eta \circ f)(x-y) dx \right) . g(y) dy .$$

Mais la première intégrale (en x) est en fait une intégrale sur $\mathbb{R}$ car $(\eta \circ f)(x-y)$ est de support inclus dans $[-A+y, A+y] \subset [-2A, 2A]$, donc par translation de variable $t = x-y$, on y reconnaît la constante $-H(f)$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = \int_{-A}^A g(y) dy = 1$, on en déduit finalement $H(f * h) \geq H(f)$.

IV - 4.

IV - 4.a On remarque que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2 + l \frac{1-r}{r} + (1-l) \frac{1-r}{r} = 1 + \frac{1}{r}$, donc on peut appliquer l'inégalité (YF) de Young forte pour tout $r > 1$:

$$\begin{aligned} h_r(f * g) &= \underbrace{\frac{1}{1-r}}_{<0} . r . \ln \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)^r(x) dx \right)^{1/r} \\ &\stackrel{(YF)}{\geq} \frac{r}{1-r} \left(\ln \left(\frac{C(p)C(q)}{C(r)} \right)^{1/2} + \frac{1-p}{p} h_p(f) + \frac{1-q}{q} h_q(g) \right) . \end{aligned}$$

Or, $\frac{1-p}{p} = l\frac{1-r}{r}$, $\frac{1-q}{q} = (1-l)\frac{1-r}{r}$, d'où

$$h_r(f * g) \geq \frac{r}{2(1-r)} \ln\left(\frac{C(p)C(q)}{C(r)}\right) + lh_p(f) + (1-l)h_q(g) .$$

D'autre part, $\ln C(p) = \frac{1}{p} \ln p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, et de même pour $C(q)$ et on a par ci-dessus que

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(l \ln l \left(1 - \frac{1}{r}\right) + (1-l) \ln(1-l) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \right) \\ &= -\frac{r-1}{r} H_2(l, 1-l) + \frac{r-1}{r} \ln \frac{r-1}{r} . \end{aligned}$$

Finalement, en rassemblant tout ceci :

$$\begin{aligned} h_r(f * g) &\geq \frac{1}{2} H_2(l, 1-l) + lh_p(f) + (1-l)h_q(g) + \frac{r}{2(1-r)} \left(\frac{1}{p} \ln p + \frac{1}{q} \ln q \right) \\ &\quad - \frac{r}{2(1-r)} \left(\frac{1}{r} \ln r + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{r}\right) \right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{r}\right) \\ &\geq lh_p(f) + (1-l)h_q(g) + \frac{1}{2} H_2(l, 1-l) + \frac{r}{2(r-1)} \left(\frac{1}{r} \ln r - \frac{1}{p} \ln p - \frac{1}{q} \ln q \right) , \end{aligned}$$

car les termes en $\ln\left(1 - \frac{1}{r}\right)$ s'éliminent.

IV - 4.b Par ci-dessus, il suffit de montrer que l'expression $\alpha(r) = \frac{r}{2(r-1)} \left(\frac{1}{r} \ln r - \frac{1}{p} \ln p - \frac{1}{q} \ln q \right)$ tend vers 0 quand $r \rightarrow 1^+$. En effet, alors, p et q tendent aussi vers 1 et on applique le **IV-1.b**.

On a les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} \ln r &= (r-1) + o(r-1) ; \\ -\ln p &= \left(\frac{1}{p} - 1\right) + o\left(\frac{1}{p} - 1\right) = l\frac{1-r}{r} + o(1-r) ; \\ -\ln q &= (1-l)\frac{1-r}{r} + o(1-r) \quad (\text{de même}) . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\alpha(r) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{r} - l\frac{1}{r} - (1-l)\frac{1}{r} \right)}_{=0} + o(1) ,$$

et $\alpha(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 1^+$, cqfd.

IV - 4.c On va choisir l rendant la fonction $\psi(l) = la + (1-l)b - \frac{1}{2}l \ln l - \frac{1}{2}(1-l) \ln(1-l)$ maximale, où on a noté $a = H(f)$ et $b = H(g)$. On a

$$2\psi'(l) = 2(a-b) - \ln \frac{l}{1-l} ,$$

d'où on prend $\frac{l}{1-l} = e^{2(a-b)}$, soit $l = \frac{e^{2(a-b)}}{1 + e^{2(a-b)}} = \frac{e^{2a}}{e^{2a} + e^{2b}}$, d'où alors $1-l = \frac{e^{2b}}{e^{2a} + e^{2b}}$.

On en déduit :

$$-l \ln l - (1-l) \ln(1-l) = \frac{e^{2a}}{e^{2a} + e^{2b}} \ln(e^{2a} + e^{2b}) - \frac{2ae^{2a}}{e^{2a} + e^{2b}} + \frac{e^{2b}}{e^{2a} + e^{2b}} \ln(e^{2a} + e^{2b}) - \frac{2be^{2b}}{e^{2a} + e^{2b}} .$$

Mais comme $2la + 2(1-l)b = \frac{2ae^{2a} + 2be^{2b}}{e^{2a} + e^{2b}}$, on a finalement pour cette valeur de l : $2\psi(l) = \ln(e^{2a} + e^{2b})$.

D'où l'inégalité du **IV-4.b**. donne pour $a = H(f)$ et $b = H(g)$:

$$\exp(2H(f * g)) \geq \exp(2\psi(l)) = e^{2H(f)} + e^{2H(g)} , \text{ cqfd } \blacksquare$$

*
* *