ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1994

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION M

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - M.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 6 pages.

Ce problème est consacré à l'étude des fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes qui vérifient, pour tout x réel, l'équation **E** :

E : $$f'(x) = \lambda\, f(x+1)\ ,$$

où λ est un réel <u>strictement positif</u>. Il est admis que l'ensemble $\mathfrak{T}(\lambda)$ de ces fonctions est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$.

La première partie met en évidence des propriétés communes aux fonctions appartenant à l'ensemble $\mathfrak{T}(\lambda)$. Les deuxième et troisième parties construisent des fonctions de cet ensemble.

Première partie.

I-1°) <u>Quelques résultats utiles dans la suite</u> :

a. Discuter suivant les valeurs du réel λ les solutions de l'équation : $t\,e^{-t} = \lambda$. Si cette équation a une solution, elle sera désignée par α ; si elle admet deux solutions, elles seront désignées par α, β avec $\alpha<\beta$; placer λ et 1 par rapport à ces solutions.

b. Soit s l'application : $t \mapsto \lambda\, e^t$. Étant donné un réel u_0 strictement positif, soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence : $u_n = s(u_{n-1})\ ,\ n \geq 1$.
Discuter la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ suivant les valeurs de λ et de u_0 et, lorsqu'il y a convergence, préciser la limite. Dans la suite, on pose :
$$u_n = s_n(u_0)\ .$$

c. Soit ℓ un nombre réel strictement positif donné ; étudier, lorsque λ est strictement inférieur à $\frac{1}{e}$, la convergence de la série dont le terme général est défini par les relations :

$$v_0 = 1 \ ; \ v_n = \frac{\lambda^n}{n!}(\ell+n)^n, \ n \geq 1.$$

I-2°) Premières propriétés.

a. Démontrer que les fonctions de $\mathfrak{T}(\lambda)$ sont indéfiniment dérivables.

b. Déterminer les fonctions polynômes qui appartiennent à $\mathfrak{T}(\lambda)$.

c. Quelles sont les fonctions exponentielles réelles ($x \mapsto e^{ax}$) qui appartiennent à $\mathfrak{T}(\lambda)$? Discuter suivant les valeurs de λ.

I-3°) Propriétés de stabilité de $\mathfrak{T}(\lambda)$.

a. Prouver que, si la fonction f appartient à $\mathfrak{T}(\lambda)$, il en est de même des fonctions réelles P et Q telles que : $f(x) = P(x) + i\,Q(x)$.

b. Soit a un réel ; démontrer que, si f est dans $\mathfrak{T}(\lambda)$, il en est de même de la fonction translatée $f_a : x \mapsto f(x-a)$.

c. Démontrer que l'application dérivation : $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathfrak{T}(\lambda)$.

d. Déterminer, pour toute fonction f de l'espace $\mathfrak{T}(\lambda)$, la ou les primitives appartenant à $\mathfrak{T}(\lambda)$.

I-4°) Fonctions paires, impaires de l'espace $\mathfrak{T}(\lambda)$.

a. Étant donnée une fonction f de $\mathfrak{T}(\lambda)$, soit g la fonction : $x \mapsto f(-x)$. Démontrer que, pour que la fonction g appartienne à $\mathfrak{T}(\lambda)$, il faut et il suffit que la fonction f vérifie la relation **R** :

R : $$\text{pour tout } x, \quad f(x+2) = -f(x).$$

Déterminer les fonctions f de l'espace $\mathfrak{T}(\lambda)$ qui vérifient cette relation **R**, en recherchant par exemple une équation différentielle vérifiée par f ; discuter suivant les valeurs de λ.

b. Pour quelles valeurs de λ existe-t-il dans $\mathfrak{T}(\lambda)$, un sous-espace vectoriel (autre que $\{0\}$) de fonctions paires ? de fonctions impaires ?

Deuxième partie.

Les fonctions de l'espace vectoriel $\mathfrak{T}(\lambda)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables définies sur $\mathbb{R}$. Cette partie est consacrée à l'examen du développement en série entière des fonctions f de $\mathfrak{T}(\lambda)$. Il sera établi que toute fonction positive de $\mathfrak{T}(\lambda)$ est la somme d'une série entière.

II-1°) Construction d'une fonction f à partir d'une fonction g définie sur l'intervalle [0, 1].

Par définition, une fonction h définie sur l'intervalle $[k, k+1]$, où k est un entier relatif, a la propriété P_k si et seulement si les deux propriétés ci-dessous ont lieu :

$$P_k : \quad \begin{cases} h \in C^\infty([k,k+1]) , \\ \forall\ p \in \mathbb{N},\ \ h^{(p+1)}(k) = \lambda\ h^{(p)}(k+1) \end{cases}$$

a. Soit f une fonction de $\mathfrak{T}(\lambda)$ dont la restriction f_0 à l'intervalle [0 , 1] est nulle. Démontrer que la fonction f est nulle.

b. Démontrer que la restriction h d'une fonction f quelconque de l'espace $\mathfrak{T}(\lambda)$ à l'intervalle $[k, k+1]$ possède la propriété P_k, pour tout entier relatif k.

c. Soit réciproquement une fonction g_0 définie sur l'intervalle [0, 1] possèdant la propriété P_0. Démontrer qu'il existe une unique fonction f de $\mathfrak{T}(\lambda)$ qui a pour restriction à l'intervalle [0, 1] cette fonction g_0.

d. Soit ψ la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] par les relations :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \text{si } x = 0 \text{ et si } x = 1\ ; \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x(1-x)}\right)\ ,\ \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Établir que cette fonction ψ est continûment dérivable sur [0, 1]. Il sera admis que la fonction ψ est indéfiniment dérivable sur ce même intervalle et que les dérivées successives ont mêmes valeurs que la dérivée première en 0 et en 1. Démontrer qu'il existe une fonction f, appartenant à $\mathfrak{T}(\lambda)$, dont la fonction ψ est la restriction à l'intervalle [0, 1]. Est-ce que cette fonction f est de signe constant sur la droite réelle ?

e. En déduire que cette fonction f de $\mathfrak{T}(\lambda)$ n'est, dans aucun intervalle ouvert centré en 0, la somme de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dans la suite les fonctions f considérées appartiennent à l'ensemble $\mathcal{P}(\lambda)$ des fonctions positives de $\mathcal{I}(\lambda)$.

II-2°) Développement en série entière. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\lambda)$.

a. Démontrer que les dérivées de f sont des fonctions croissantes. En déduire que la seule fonction de $\mathcal{P}(\lambda)$ à s'annuler au moins une fois est la fonction nulle.

b. Établir pour tout réel x et tout entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) la relation :

$$f(x) = f(0) + \lambda x\, f(1) + \frac{\lambda^2}{2!}x^2 f(2) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}x^n f(n) + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt\ .$$

Soient $u_n(x)$ et $R_n(x)$ les deux expressions :

$$u_n(x) = \frac{\lambda^n}{n!}x^n f(n)\ ;\quad R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

c. Démontrer que, pour x positif, la série de terme général $u_n(x)$, $n \geq 0$, est convergente. Prouver que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(x)$, $n \geq 0$, est infini.

d. Démontrer, pour tout entier n, $n \geq 1$, et tous réels x et y vérifiant l'inégalité $|x| < y$, la relation :

$$|R_n(x)| \leq \left(\frac{|x|}{y}\right)^{n+1} R_n(y)\ .$$

Établir pour tout entier n, $n \geq 1$, et tout réel y positif l'inégalité :

$$R_n(y) \leq \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y)\ .$$

e. En déduire que la fonction f est la somme de la série entière considérée ci-dessus :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n f(n)\ .$$

II-3°) Comparaison d'une fonction f appartenant à $\mathcal{P}(\lambda)$ avec une fonction exponentielle. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\lambda)$.

a. Démontrer que la fonction f vérifie la relation :

$$\text{pout tout } x \geq 0, \qquad f(x) \geq f(0)\, e^{\lambda x}\ .$$

b. Démontrer que, s'il existe un réel u_0 et une constante positive K tels que la fonction f vérifie, pour tout $x \geq 0$, l'une des inégalités

$$f(x) \geq K \exp(u_0 x)\ ,\quad \text{ou bien}\quad f(x) \leq K \exp(u_0 x)\ ,$$

la fonction f vérifie aussi, pour tout entier p et tout $x \geq 0$, une inégalité du même type où $\exp(u_0 x)$ est remplacé par $\exp(s_p(u_0)x)$:

$$f(x) \geq K \exp(s_p(u_0)x)\ ,\quad \text{ou bien}\quad f(x) \leq K \exp(s_p(u_0)x)\quad ;$$

$s_p(u_0)$ est le terme de rang p de la suite définie à la question I-1° b à partir du premier terme u_0 ; $\exp(x)$ désigne e^x.

II-4°) Montrer que, si le réel λ est strictement supérieur à $\frac{1}{e}$, l'ensemble $\mathcal{P}(\lambda)$ est égal à $\{0\}$.

Dans la suite le réel positif λ est supposé inférieur ou égal à $\frac{1}{e}$.

II-5°) Démontrer que, pour tout réel x_0, toute fonction f de $\mathcal{P}(\lambda)$ vérifie l'inégalité :

$$\text{pour tout } x \geq 0, \qquad f(x+x_0) \geq f(x_0)\exp(\alpha x).$$

(le réel α a été défini à la question I-1°) a.). Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)\, e^{-\alpha x}$ est une fonction croissante.

Dans cette question et la suivante, la fonction f de $\mathcal{P}(\lambda)$ considérée est supposée avoir la propriété **P** :

P : Il existe un réel M tel que, pour tout x positif, $f(x)\, e^{-x} \leq M$.

II-6°) Dans cette question le réel λ est strictement inférieur à $\frac{1}{e}$. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\lambda)$.

a. Démontrer l'inégalité : pour tout x positif : $f(x) \leq M\, e^{\alpha x}$.
En déduire qu'il existe un réel positif x_0 tel que : $\sup_{x \geq 0} (f(x)\, e^{-x}) = f(x_0)\, e^{-x_0}$.

b. Déduire des résultats précédents l'inégalité :
pour cet x_0 et tout x positif : $f(x+x_0)\, e^{-x} \leq f(x_0)$.
En déduire $f(x+x_0)$ pour $x > 0$.

c. En déduire f(x) en fonction de f(0) et de α.

II-7°) Dans cette question le réel λ est égal à $\frac{1}{e}$. Étant donnée une fonction f de $\mathcal{P}(\frac{1}{e})$, soit g la fonction définie par la relation : $g = f' - f$. Démontrer que la fonction g appartient à $\mathcal{P}(\frac{1}{e})$.

Démontrer la relation : $\lim_{x \to \infty} g(x)\, e^{-x} = 0$. En déduire g puis f.

Troisième partie.

Le réel λ est supposé strictement inférieur à $\frac{1}{e}$. Le but de cette partie est de construire une fonction φ de $\mathfrak{T}(\lambda)$ qui vérifie la condition $\varphi(0) = L$, où L est une constante complexe donnée. La méthode proposée consiste à introduire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes possédant les trois propriétés :

i) $a_0 = 0$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$;

iii) la série de terme général $M_n = |a_n - a_{n-1}|$, $n\in\mathbb{N}^*$, est convergente ;

et à considérer la suite des fonctions φ_n, $n\in\mathbb{N}$, définie par les relations :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 0\,, \\ \text{pour tout } n \geq 1,\ \varphi_n(x) = a_n + \lambda \displaystyle\int_1^{x+1} \varphi_{n-1}(t)\,dt\,. \end{cases}$$

III-1°) Déterminer les fonctions φ_1, φ_2, φ_3.

III-2°) Démontrer que chaque fonction φ_n est une fonction polynomiale. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout réel x, l'inégalité :

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq M_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} M_{n-k}\,(k+|x|)^k.$$

III-3°) Démontrer que la suite des fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, est uniformément convergente dans tout intervalle $[-\ell\,,\,\ell]$ ($\ell>0$). Démontrer que la fonction limite φ est dérivable. Est-ce que cette fonction φ appartient à l'ensemble $\mathfrak{T}(\lambda)$? Que vaut $\varphi(0)$?

III-4°) Un exemple : Supposons que L soit égal à 1. Pour déterminer la fonction φ, prenons les a_n égaux à 1 pour $n \geq 1$. Établir au moyen d'un raisonnement par récurrence les inégalités :

$$\text{pour tout } x \text{ positif, } \varphi_n(x) \leq e^{\alpha x}.$$

En déduire la fonction φ.

FIN DU PROBLÈME