

CONCOURS COMMUN CINP 2024

Filière MP - Maths II

Corrigé proposé par Hamdane Mohammed¹

Toutes suggestions et remarques sont les bienvenues à : hamdane75mac@gmail.com

Exercice 1.

Q1. ► Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 0 \\ 6 & X-4 & X+2 \\ 1 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \end{array} \\ &= (X+2) \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 0 \\ 6 & X-4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X+2) \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 0 \\ 5 & X-3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array} \\ &= (X+2) \begin{vmatrix} X+4 & -2 \\ 5 & X-3 \end{vmatrix} = (X+2)(X^2 + X - 2) \\ &= (X-1)(X+2)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{1, -2\}$ (1 valeur propre simple et -2 valeur propre double).

► Déterminons les sous espaces propres de A associés aux valeurs propres 1 et -2 .

• $E_1(A)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = x \\ -6x + 4y - 6z = y \\ -x + y - 3z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 3y - 6z = 0 \\ -x + y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y - 4z \\ y = 6z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 6z \end{cases} \end{aligned}$$

donc $E_1(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

• $E_{-2}(A)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) &\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = -2x \\ -6x + 4y - 6z = -2y \\ -x + y - 3z = -2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff x - y + z = 0 \end{aligned}$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $E_{-2}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

► La matrice A est diagonalisable car chaque sous espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée, donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Professeur agrégé en CPGE - Ibn Timiya Marrakech.

Pour déterminer P^{-1} , en résolvant par exemple le système $PX = Y$, et on obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système a pour écriture matricielle $X_{n+1} = AX_n$. Alors,

$$Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}AX_n = (P^{-1}AP)(P^{-1}X_n) = DY_n$$

Une récurrence immédiate implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = D^n Y_0.$$

Comme D est diagonale, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ (-2)^n \gamma_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 \\ \beta_n = (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_n = (-2)^n \gamma_0 \end{cases}.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si, et seulement si, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^3 .

L'application : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$X \mapsto P^{-1}X$$

converge si, et seulement si la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^3 .

Or la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément.

Mais $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons respectives 1, -2 et -2 , donc elles sont convergentes si, et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.

Comme $X_0 = PY_0$, on a

$$\begin{cases} u_0 = 2\alpha_0 + \beta_0 \\ v_0 = 6\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \\ w_0 = \alpha_0 + \gamma_0 \end{cases}$$

de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si, et seulement si, $X_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En conclusion,

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \iff \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Exercice 2.

Q3. Si s est une liste Python représentant une permutation σ de \mathcal{S}_4 , l'instruction Python qui permet de trouver l'image de 1 par la permutation σ est `s[1]`.

La transposition (2 3) est une permutation qui échange 2 et 3 et laisse invariant 0 et 1, donc la liste Python représentant la transposition (2 3) dans \mathcal{S}_4 est `[0, 1, 3, 2]`.

Q4. Fonction Python `comp(s1,s2)` pour la composition de permutations :

```
def comp(s1, s2):
    lst = []
    for e in s2:
        lst.append(s1[e])
    return lst
# ===== Exemple =====
s1=[1,0,2,3] ; s2=[0,1,3,2]
print(comp(s1, s2))
```

Résultat :

[1, 0, 3, 2]

Q5. Fonction `inv(s)` pour inverser une permutation :

```
def inv(s):
    n = len(s)
    lst = [0]*n
    for i in range(n):
        lst[s[i]] = i
    return lst
# ===== Exemple =====
s=[0,2,3,1]
print(inv(s))
```

Résultat :

[0, 3, 1, 2]

Q6. Un sous-ensemble G de \mathcal{S}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n , si et seulement si $\text{Id} \in G$ et $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in G, \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} \in G$.Voici une fonction Python `groupe(G)` qui permet de tester si un sous-ensemble G de \mathcal{S}_n est un sous-groupe de \mathcal{S}_n ou non :

```
def groupe(G):
    n = len(G[0])
    en = [i for i in range(n)] # en = list(range(n))
    if en in G:
        return False
    for s1 in G:
        for s2 in G:
            if comp(s1, inv(s2)) in G:
                return False
    return True
# ===== Exemple =====
G1=[[0, 1, 2],[0, 2, 1]] ; G2=[[0, 2, 1],[1, 0, 2]]
print(groupe(G1) , groupe(G2))
```

Résultat :

False True

Q7. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Notons p l'ordre de σ .Rappelons que $(\{\sigma^k \mid k \in \mathbb{N}\}, \circ)$ est un sous-groupe de \mathcal{S}_n d'ordre p appelé le sous-groupe engendré par σ .

```
def cyclique(s):
    sp = s
    sge = [s]
    while True:
        sp=comp(s,sp)
        if sp==s:
            break
        else:
            sge.append(sp)
    return sge
# ===== Exemple =====
s=[1,2,3,0]
print(cyclique(s))
```

Résultat :

[[1, 2, 3, 0], [2, 3, 0, 1], [3, 0, 1, 2], [0, 1, 2, 3]]

```
def cyclique(s):
    G = [s]
    t = comp(s,s)
    while t not in G:
        G.append(t)
        t = comp(t,s)
    return G
# ===== Exemple =====
s=[1,2,3,0]
print(cyclique(s))
```

Résultat :

[[1, 2, 3, 0], [2, 3, 0, 1], [3, 0, 1, 2], [0, 1, 2, 3]]

Problème 1.

Q8. Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive .

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{2,1}\}$, on a

$$X^T A X = (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

et on a $x^2 + (x + y)^2 = 0 \iff x = 0$ et $x + y = 0 \iff x = y = 0$ donc pour $X \neq 0_{2,1}$ on a $X^T A X > 0$.
Ainsi A est symétrique définie positive .

Caractérisation spectrale

Q9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors la matrice M est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Autrement dit, $M \in \mathcal{S}_n^{++} \iff \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

► Supposons M définie positive. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et X un vecteur propre associé à λ . On a donc

$$M X = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}$$

puis

$$0 \leq X^T M X = \lambda X^T X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{\neq 0}$$

Nécessairement, $\lambda > 0$ et $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

► On suppose maintenant que les valeurs propres de M sont strictement positives.

On sait que M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème spectral, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M . On note $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, où les μ_i sont les λ_i , mais potentiellement comptés plusieurs fois, en fonction de la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i , telles que $M = P^T D P$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, posons $Y = P^T X$, $Y \neq 0_{n,1}$ car P inversible, on a

$$X^T M X = X^T P^T D P X = (P X)^T D (P X) = Y^T D Y$$

Notons $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ donc

$$X^T M X = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$$

D'où M est définie positive.

On retrouve ainsi l'équivalence.

Q10. Application :

► Étudions la fonction polynômiale $p : x \mapsto P(x)$ associée à P . Elle est dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

donc on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	α	1	β	3	γ	$+\infty$
$p'(x)$		+	0	-	0	+	
$p(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Le théorème de la bijection continue assure que p s'annule exactement une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$. Puisque P est de degré 3, on peut donc affirmer que P admet exactement trois racines réelles α, β, γ telles que $\alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$.

De plus $p(0) = -3$ donc p s'annule sur l'intervalle $]0, 1[$ (TVI), ainsi P admet trois racines réelles distinctes et strictement positives.

► La matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, calculons son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_B &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ X-2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)[(X-2)(X-3) - 1] - (X-2) \\ &= X^3 - 6X^2 + 9X - 3 \\ &= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \end{aligned}$$

avec $0 < \alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$.

donc $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+^*$. par suite B est définie positive.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q 11. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$ donc, si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres avec multiplicité, on a donc :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Puisque $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il suit de la question **Q9**) que toutes les λ_i sont strictement positives de sorte que :

$$\text{Tr}(M) > 0 \quad \text{et} \quad \det(M) > 0.$$

Q 12. Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telles que $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

D'après le théorème spectral, $M = P^T D P$ avec $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et P est une matrice orthogonale.

On a $\alpha\beta = \det(M) > 0$ donc α et β sont de même signe, et $\alpha + \beta = \text{Tr}(M) > 0$ donc α et β sont dans \mathbb{R}^{+*} donc $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi M est définie positive.

Conclusion : Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors

$$\forall M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \quad M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \det(M) > 0 \\ \text{Tr}(M) > 0. \end{cases}$$

Q 13. Le résultat de la question précédente est faux pour les matrices de taille 3. Par exemple, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $\text{Tr}(M) = 2 > 0$, $\det(M) = 4 > 0$ mais elle n'est pas définie positive car admet -1 pour valeur propre.

Q 14. Posons $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur U par somme et quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas sur U .

Cherchons les points critiques de f .

Soit $(x, y) \in U$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{1}{x y^2}$$

Les points critiques sont solutions du système $\nabla f(x, y) = 0$. On a alors

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x y^2} = 0 \end{cases} \iff x = y = \frac{1}{xy} \iff x = y \text{ et } x^3 = 1 \iff (x, y) = (1, 1)$$

donc $(1, 1)$ est le seul point critique de f dans U .

La nature de ce point est déterminée par la matrice Hessienne de f en $(1, 1)$.

On a $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3 y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y^3 x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{y^2 x^2}$,

donc $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $\det H_f(1, 1) = 3 > 0$ et $\text{Tr } H_f(1, 1) = 4 > 0$, d'après la question **Q12**) $H_f(1, 1)$ est symétrique définie positive par suite f admet en $(1, 1)$ un minimum local.

Pour $h = (h_1, h_2) \in U$ et $a = (1, 1)$,

$$f(a + h) = f(a) + \underbrace{h \nabla f(a)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{h H_f(a) h^\top}_{\geq 0} + o(\|h\|^2)$$

Le critère de Sylvester

Q15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Déterminons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$.

Dans cette question, il faut supposer que $X_k \neq 0$, car sinon, si $X_k = 0$ on doit déterminer $X \neq 0$ tel que $X^\top M X = 0$, un tel X n'existe pas toujours, il suffit de prendre le cas d'une matrice M symétrique définie positive pour laquelle, on a $X^\top M X = 0 \implies X = 0$.

Donc pour $X_k \neq 0$ on prend $X = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ avec $\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a clairement $X \neq 0$ et $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$.

Q16. Soit M une matrice symétrique réelle définie positive.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrons que $\det(M_k) > 0$.

On a M_k est symétrique, montrons qu'elle est définie positive.

Soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, d'après **Q15**) il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X > 0$ donc M_k est définie positive par suite $\det(M_k) > 0$.

Q17. \blacktriangleright Puisque $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(R)$, ses valeurs propres sont non nulles donc M_{n-1} est inversible.

donc $M_{n-1}V + U = 0 \iff V = -M_{n-1}^{-1}U$ donc V existe et unique.

\blacktriangleright Soit $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effectuant le produit par blocs, en utilisant $M_{n-1}V + U = 0$ et, en transposant, on a $V^\top M_{n-1} + U^\top = 0$ et donc :

$$Q^\top M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}$$

Posons $\beta = U^\top V + \alpha$. On a

$$\det(Q^\top M Q) = \det \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \beta \det(M_{n-1})$$

mais $\det(M_{n-1}) > 0$ car $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(R)$ et, d'autre part,

$$\det(Q^\top M Q) = \det(Q)^2 \times \det(M) = \det(M) > 0$$

donc $\beta > 0$.

Conclusion : il existe $\beta > 0$ tel que $Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Q 18. Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

- Pour $n = 2$: soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ une matrice symétrique, telles que $\det(M_1) = a > 0$ et $\det(M_2) = \det(M) = ab - c^2 > 0$.

On a $ab > c^2$ donc a et b sont de même signe donc $b > 0$.

donc $\text{Tr}(M) = a + b > 0$ et $\det(M) = ab - c^2 > 0$. Ainsi M est définie positive (d'après question **Q12**).

- Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n - 1$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique vérifiant le critère de Sylvester. On écrit M comme à la question **Q17**.

Tous les mineurs principaux de M_{n-1} étant des mineurs principaux de M , ils sont strictement positifs. Il s'ensuit que $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$. En reprenant les notations de **Q17**, on a

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \beta > 0.$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $X^T M X > 0$. Comme Q est inversible ($\det(Q) = 1$), il existe $Y \neq 0$ telle que $QY = X$.

Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et $Y_{n-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. On a donc

$$X^T M X = Y^T (Q^T M Q) Y = Y_{n-1}^T M_{n-1} Y_{n-1} + \beta y_n^2.$$

Si $Y_{n-1} \neq 0$, alors $Y_{n-1}^T M_{n-1} Y_{n-1} > 0$.

Si $Y_{n-1} = 0$, alors $y_n \neq 0$ et donc $X^T M X = \beta y_n^2 > 0$.

On en déduit que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T M X > 0$ et donc que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, d'où l'hérédité.

- Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \geq 2$:

Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester, alors elle est définie positive.

Conclusion : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

Alors M est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Q 19. Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x)$ est symétrique et, avec les notations de l'énoncé pour les mineurs principaux, on a :

$$\det(C(x)_1) = 2 > 0, \quad \det(C(x)_2) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det(C(x)_3) = 1 - 2x^2$$

Mais

$$\det(C(x)_3) > 0 \iff 1 - 2x^2 > 0 \iff |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après le critère de Sylvester

$$C(x) \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \iff |x| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Q 20. La matrice en question est symétrique. Le mineur principal d'ordre 3 est strictement négatif :

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

donc, d'après le critère de Sylvester, la matrice n'est pas définie positive.

Q 21. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz \\ &= (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (x \ y \ z) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les mineurs principaux de M sont :

$$\det(M_1) = 4 > 0, \quad \det(M_2) = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \det(M_3) = \frac{3}{4} > 0$$

de sorte que $M \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

En particulier, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^T A X > 0$$

On a donc bien

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}, \quad 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q 22. La matrice S_n est symétrique. On calcule les premiers déterminants principaux :

$$\det(S_1) = \sqrt{3} > 0, \quad \det(S_2) = 2 > 0, \quad \det(S_3) = \sqrt{3} > 0, \quad \det(S_4) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det(S_5) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le $k^{\text{ième}}$ déterminant principal de S_n est $\det(S_k)$, on en déduit que S_1, S_2, S_3 et S_4 sont définies positives mais que, pour tout $n \geq 5$, S_n ne l'est pas.

En conclusion :

$$S_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff n \in \{1, 2, 3, 4\}.$$