CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Introduction

Dans tout ce problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$. On notera $(u|v)$ le produit scalaire des deux vecteurs u et v, et $||u||$ la norme issue de ce produit scalaire. $\mathrm{O(E)}$ est le groupe orthogonal de E, ses éléments sont les isométries de E. Si $\mathbf{H}$ est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, on appelle **réflexion** d'hyperplan $\mathbf{H}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbf{H}$. Elle est entièrement déterminée par $\mathbf{H}$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'**orthogonal** de F est le sous-espace vectoriel noté $\mathbf{F}^{\perp}$ de E défini par :

$$\mathbf{F}^{\perp} = \{y \in \mathbf{E} \mid \forall x \in \mathbf{F},\ (x|y) = 0\}$$

Il a pour dimension $n - \dim \mathrm{F}$.

Si $f_1, f_2, \dots, f_p$ sont des isométries, on note gr $< f_1, f_2, \dots, f_p >$ le plus petit sous-groupe du groupe orthogonal qui contient $f_1, f_2, \dots, f_p$. On dit que c'est le groupe engendré par $f_1, f_2, \dots, f_p$.

Le but de ce problème est une étude des groupes d'isométries qui sont **finis** et qui sont engendrés par des réflexions. Ces groupes sont appelés **groupes de Coxeter**.

1. Généralités - Le cas commutatif

1. Montrer qu'une réflexion d'hyperplan $\mathbf{H}$ est diagonalisable. Décrire les sous-espaces propres.

2. Soit u un vecteur non nul orthogonal à $\mathbf{H}$. Démontrer que la réflexion s d'hyperplan $\mathbf{H}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{E},\ s(x) = x - 2\frac{(x|u)}{(u|u)}u$$

3. Soit g une isométrie quelconque et s une réflexion d'hyperplan $\mathbf{H}$, démontrer que $g \circ s \circ g^{-1}$ est une réflexion. Quel est son hyperplan ?

4. On dit que deux hyperplans sont **perpendiculaires** si l'un contient l'orthogonal de l'autre. Ils sont donc distincts. Soient k hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_k$ deux à deux perpendiculaires et $u_1, u_2, \dots, u_k$ des vecteurs non nuls tels que, pour tout i, u_i est orthogonal à H_i. Montrer que les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont orthogonaux. En déduire que $k \leq n$.

5. Démontrer que deux réflexions commutent si et seulement si elles sont identiques ou si l'hyperplan de l'une est perpendiculaire à l'hyperplan de l'autre.

Tournez la page S.V.P.

6. En déduire tous les groupes de Coxeter commutatifs lorsque $n = 3$. On montrera qu'ils sont engendrés par une, deux ou trois réflexions, et on décrira chacun des groupes obtenus (par exemple à l'aide de matrices).

2. Le cas de la dimension 2

On suppose dans cette partie que $n = 2$, et que $\mathbf{E}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien orienté. Les hyperplans sont alors les droites vectorielles $\mathbf{D}$: dans ce cas, on parlera d'une réflexion d'axe $\mathbf{D}$.

Soit G un groupe de Coxeter engendré par deux réflexions s_1 et s_2 d'axes respectifs $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ distincts; on choisit deux vecteurs unitaires d_1 sur $\mathbf{D}_1$ et d_2 sur $\mathbf{D}_2$. Soit alors (e_1, e_2) la base orthonormée directe de premier vecteur $e_1 = d_1$; on appelle θ le réel de $]0, 2\pi[$ tel que

$$d_2 = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$$

1. Donner les matrices de s_1 et de s_2 dans cette base.

2. Démontrer que $s_2 \circ s_1$ est la rotation ρ d'angle de mesure 2θ.

3. Démontrer que le groupe engendré par une rotation d'angle de mesure 2θ est fini si, et seulement si, il existe p, m entiers premiers entre eux tels que $\theta = \frac{p\pi}{m}$

4. On suppose maintenant que $\theta = \frac{p\pi}{m}$ où les entiers p et m sont premiers entre eux. Démontrer que

$$s_2 = \rho \circ s_1, \quad s_1 \circ \rho^k \circ s_1 = \rho^{m-k} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

5. En déduire que G coïncide avec l'ensemble

$$G' = \{e, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{m-1}, s_1, \rho \circ s_1, \rho^2 \circ s_1, \dots, \rho^{m-1} \circ s_1\}$$

On vérifiera en particulier que les éléments de G' sont bien distincts et que G' est un groupe.

6. Démontrer que G contient m réflexions. Préciser les axes de ces réflexions lorsque $m = 6$.

3. Les familles obtusangles et acutangles

Soit $(r_1, r_2, \dots, r_p)$ une suite de vecteurs non nuls. On dit que c'est une famille obtusangle si $(r_i | r_j) \leq 0$ pour tout couple (i, j) où $i \neq j$.

1. On suppose qu'il existe une famille $(r_1, r_2, \dots, r_p)$ qui est obtusangle et qui est formée de vecteurs qui sont tous dans un même demi-espace strict : c'est-à-dire qu'il existe un vecteur t non nul tel que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (t | r_i) > 0$$

On veut démontrer que cette famille est une famille libre. On raisonnera par l'absurde, en supposant que, quitte à réordonner la suite $(r_1, r_2, \dots, r_p)$, il existe une relation de liaison de la forme :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i r_i = \sum_{i=k+1}^{p} \mu_i r_i$$

où les (λ_i) et les (μ_i) sont positifs, un au moins étant non nul. Soit v le vecteur défini par cette égalité.

(a) Calculer $(v|v)$ et en déduire que $v = 0$.

(b) Exprimer le produit scalaire $(v|t)$ et en déduire une contradiction.

2. À une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, on associe la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont donnés par :

$$m_{i,j} = (e_i|e_j)$$

(a) Montrer que la matrice M est symétrique. Exprimer ${}^tXMX$ où X désigne la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En déduire que M est définie positive.

(b) On suppose à partir de maintenant que les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ sont unitaires. Démontrer que les valeurs propres de M sont dans l'intervalle $]0, n[$.

3. (a) À la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, démontrer qu'on peut associer une base et une seule $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ telle que :

$$(e_i|f_j) = 0 \text{ si } i \neq j \quad \text{et} \quad (e_i|f_i) = 1$$

pour tout (i, j). Cette base s'appelle **base duale** de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

(b) Vérifier que l'on a alors :

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} (f_i|f_j) e_j$$

(c) Démontrer que si N est la matrice associée à la base duale, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont donnés par : $n_{ij} = (f_i|f_j)$, alors $N = M^{-1}$. On pourra calculer le produit NM.

4. On suppose de plus que la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est obtusangle. On veut démontrer que la base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est acutangle (c'est-à-dire que $(f_i|f_j) \geq 0$ pour tout (i,j)). Soit A la matrice définie par :

$$A = I - \frac{1}{n} M$$

où I est la matrice de l'identité.

(a) Démontrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont dans l'intervalle $]0, 1[$.

(b) En utilisant une série de matrices, démontrer que $(I - A)^{-1}$ est une matrice dont tous les coefficients sont positifs.

(c) Montrer que M^{-1} a tous ses coefficients positifs et conclure.

Tournez la page S.V.P.

4. Les systèmes de racines

Soit G un groupe de Coxeter. On note Δ l'ensemble des vecteurs unitaires u de $\mathbf{E}$ tels qu'il existe une réflexion de G d'hyperplan $\mathbf{H}$, avec $u \perp \mathbf{H}$. Ainsi, si u est dans Δ, c'est également le cas de $-u$. Δ est appelé **système de racines** de G. Il est fini puisque G est par hypothèse fini.

1. Préciser l'ensemble Δ dans le cas du groupe G de la question 2.5, pour le cas $m = 6$.

2. Démontrer que Δ est stable par G, c'est-à-dire que
$$\forall u \in \Delta,\ \forall g \in G,\ g(u) \in \Delta$$

3. On admettra qu'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension strictement positive n'est pas réunion finie d'hyperplans. En déduire qu'il existe un vecteur t qui n'est orthogonal à aucun élément de Δ. On choisit alors un tel vecteur et on pose :
$$\Delta^+ = \{r \in \Delta |\ (t|r) > 0\},\ \Delta^- = \{r \in \Delta |\ (t|r) < 0\}$$

4. Si $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ est un ensemble de vecteurs de Δ^+, un vecteur x de $\mathbf{E}$ est B-**positif** s'il existe des réels $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p\}$ tous positifs ou nuls, tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i r_i$. Un vecteur est alors B-**négatif** si son opposé est B-positif.

   On appelle **système fondamental** de Δ un sous-ensemble $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ de Δ^+, tel que tout élément de Δ^+ soit B-positif, et qui est de cardinal minimal. Montrer qu'il en existe au moins un. On choisit désormais un système fondamental $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$. Les vecteurs de Δ^+ sont donc tous B-positifs, ceux de Δ^- tous B-négatifs.

5. Soit i et j distincts de $\{1, 2, \dots, p\}$. Montrer que si $\lambda_i > 0, \lambda_j > 0$, alors $x = \lambda_i r_i - \lambda_j r_j$ n'est ni B-positif, ni B-négatif.

6. Si s_i est la réflexion d'hyperplan orthogonal à r_i, et si $i \neq j$, montrer que $s_i(r_j) \in \Delta^+$ et que $(r_i|r_j) \leq 0$. On pourra utiliser la question précédente ainsi que la question 1.2. En déduire que le système fondamental $B = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ est obtusangle et qu'il forme un système libre.

7. En déduire que si $r \in \Delta$ peut s'écrire $r = \sum_{i=1}^{p} \mu_i r_i$ où un des μ_i est strictement positif, alors tous les μ_i sont positifs et $r \in \Delta^+$.

Soient $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ les réflexions d'hyperplans orthogonaux respectivement à $(r_1, r_2, \dots, r_p)$ et $G_0 = \mathrm{gr} < s_1, s_2, \dots, s_p >$. On veut démontrer que $G = G_0$.

8. Démontrer que si $r \in \Delta^+$ alors $s_i(r) \in \Delta^+$ sauf si $r = r_i$.

9. Soit r un vecteur de $\Delta^+ \setminus B$ (c'est-à-dire un vecteur r de Δ^+ qui n'est pas dans B).

   (a) Démontrer qu'il existe un élément r_i de B tel que $(r|r_i) > 0$

   (b) On associe à r l'élément $s_i(r)$ où s_i est la réflexion associée à r_i, et on pose $u_0 = r, u_1 = s_i(r)$. Montrer que la répétition de ce procédé conduit en un nombre fini k d'opérations à un élément de B, les éléments intermédiaires $u_j (j = 0, \dots, k-1)$ étant dans $\Delta^+ \setminus B$, et tels que la suite finie $(u_j|t)$ soit strictement décroissante.

   (c) En déduire qu'il existe $g \in G_0$ tel que $g(r) \in B$

10. Démontrer que $G = G_0$ et donc que, pour tout groupe de Coxeter, il existe une famille obtusangle $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ de vecteurs unitaires, contenue dans un même demi-espace strict, et telle que G est engendré par les réflexions $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ où s_i est la réflexion d'hyperplan orthogonal à r_i. Décrire une telle famille dans le cas de la dimension deux et pour la valeur $m = 6$ de la question 2.6.

5. Le cas de la dimension trois

Dans toute cette partie, on suppose que la dimension de $\mathbf{E}$ est trois.

1. Décrire les groupes de Coxeter engendrés par une ou deux réflexions.

2. On se donne une famille obtusangle (r_1, r_2, r_3) de vecteurs unitaires. On note α, β, γ les nombres de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ tels que

$$(r_1|r_2) = \cos(\alpha),\ (r_2|r_3) = \cos(\beta),\ (r_3|r_1) = \cos(\gamma)$$

Démontrer que $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$. On pourra utiliser une projection sur le plan engendré par deux des vecteurs.

3. On suppose que G est un groupe de Coxeter dont le système fondamental est r_1, r_2, r_3. Démontrer qu'il existe des entiers a, b et c entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que :

$$(r_1|r_2) = -\cos\left(\frac{\pi}{a}\right), (r_2|r_3) = -\cos\left(\frac{\pi}{b}\right), (r_3|r_1) = -\cos\left(\frac{\pi}{c}\right)$$

puis montrer que l'on a nécessairement :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

4. En déduire que les trois entiers (a, b, c) ne peuvent prendre, à l'ordre près, que les séries de valeurs :

   $(2, 2, c)$ où c est un entier supérieur ou égal à deux.

   $(2, 3, 3)$

   $(2, 3, 4)$

   $(2, 3, 5)$

5. À l'aide d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) trouver une configuration de trois vecteurs correspondant à la première série, puis une correspondant à la seconde série.

   On peut vérifier qu'il existe des configurations correspondant aux deux autres séries, ce qui résout le problème de la classification des groupes de Coxeter en dimension trois.

Fin de l'énoncé