2022 - Centrale-Supélec - MP - Mathématiques 1
Exemples de contraintes symplectiques linéaires
Un corrigé

I Préliminaires

Q 1. • Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On calcule :

$$X^T AY = X^T(AY) = \sum_{i=1}^n X_i(AY)_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j. \quad \boxed{X^T AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j.}$$

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T AY = 0$.
Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \delta_{i,k}$, et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $\forall j \in [\![1, n]\!], y_j = \delta_{j,\ell}$.
D'après le calcul précédent :

$$X^T AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{i,k} a_{i,j} \delta_{j,\ell} = a_{k,\ell} = 0.$$

Donc $\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2, \ a_{k,\ell} = 0$, d'où la matrice A est nulle. On a montré que :
$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifie } \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T AY = 0, \text{ alors } A = 0.}$

• Soient $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T AY = X^T BY$.
Alors $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T (A - B)Y = 0$.
Par le point précédent, la matrice $A - B$ est nulle, donc $A = B$.
Finalement, $\boxed{\text{si } (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \text{ vérifient } \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T AY = X^T BY, \text{ alors } A = B.}$

Q 2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^T M)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$ un vecteur propre (donc non nul) de $M^T M$ associé à la valeur propre λ. Alors $M^T M X = \lambda X$. Il vient

$$\begin{array}{rclclclcl} X^T M^T M X & = & (MX)^T (MX) & = & \|MX\|^2 & & & & \\ & = & X^T (M^T M X) & = & X^T (\lambda X) & = & \lambda X^T X & = & \lambda \|X\|^2. \end{array}$$

Le vecteur X est non nul donc $\|X\| > 0$. De plus M est inversible et $X \neq 0$, donc $MX \neq 0$ et $\|MX\| > 0$.
On obtient $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} > 0$. Ainsi, $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M^T M), \quad \lambda > 0.}$

• La matrice $M^T M$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, elle est diagonalisable en base orthonormale. De plus on vient de montrer que ses valeurs propres sont strictement positives.
Donc il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale contenant les valeurs propres strictement positives de $M^T M$, et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, telles que $P^T M^T M P = D$. On a $M^T M = PDP^T$.
Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i > 0$.
Posons $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, de sorte que $\Delta^2 = D$.
On pose $\boxed{S = P\Delta P^T.}$ Alors

$$S^2 = (P\Delta P^T)^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M^T M.$$

La matrice S est symétrique car $S^T = (P\Delta P^T)^T = P\Delta^T P^T = P\Delta P^T = S$.
S est semblable à Δ donc a le même spectre : $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(\Delta) = \{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\}$.
On a $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_i > 0$ donc $\sqrt{\lambda_i} > 0$ et S est à valeurs propres strictement positives.
$\boxed{\text{Il existe une matrice } S \text{ symétrique réelle à valeurs propres strictement positives, telle que } S^2 = M^T M.}$

II Objets symplectiques

Q 3. Soit ω une forme symplectique sur E. Soit $x \in E$.
Par antisymétrie de ω, on a $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$, donc $2\omega(x,x) = 0$, d'où $\omega(x,x) = 0$.
Ainsi $\boxed{\forall x \in E, \quad \omega(x,x) = 0.}$

Q 4. Montrons que $F^\omega = \{x \in E, \forall y \in F, \omega(x,y) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Par définition, on a $F^\omega \subset E$.
- Par bilinéarité de ω, le vecteur nul vérifie $\forall y \in F, \omega(0_E, y) = 0$. Donc $0_E \in F^\omega$ et $F^\omega \neq \emptyset$.
- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, x_2) \in (F^\omega)^2$. Soit $y \in F$.
  Par bilinéarité de ω,
  $$\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \omega(x_1, y) + \lambda_2 \omega(x_2, y) = 0 + 0 = 0.$$
  Donc $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in F^\omega$ et F^ω est stable par combinaison linéaire.

Finalement $\boxed{F^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Q 5. Soit $x \in E$ un vecteur non nul. Posons $F = \mathrm{Vect}(x)$ la droite engendrée par x. On a évidemment $x \in F$.
Soit $y \in F$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tel que $y = \lambda x$.
D'après la question **Q 3**, on a $\omega(x,x) = 0$.
Par bilinéarité de ω, on a $\omega(x,y) = \omega(x, \lambda x) = \lambda \omega(x,x) = 0$. Ainsi $\forall y \in F, \omega(x,y) = 0$ i.e. $x \in F^\omega$.
Ainsi $x \in F \cap F^\omega$ avec $x \neq 0_E$, donc $F \cap F^\omega \neq \{0_E\}$. Dans cet exemple, F et F^ω ne sont pas en somme directe.
$\boxed{\text{Non, le sous-espace vectoriel } F^\omega \text{ n'est pas nécessairement en somme directe avec } F.}$

Q 6. On considère $d_\omega : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x, \cdot) \end{array} \right.$

- Montrons que d_ω est une application linéaire. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, x_2) \in E^2$. Par bilinéarité de ω :
  $$\begin{array}{rcl} \forall y \in E, \quad d_\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(y) & = & \omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) \\ & = & \lambda_1 \omega(x_1, y) + \lambda_2 \omega(x_2, y) \\ & = & \lambda_1 d_\omega(x_1)(y) + \lambda_2 d_\omega(x_2)(y). \end{array}$$
  Donc $d_\omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 d_\omega(x_1) + \lambda_2 d_\omega(x_2)$ et d_ω est linéaire.
- Montrons que d_ω est bijective.
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(d_\omega)$. Alors $d_\omega(x) = \omega(x, \cdot) = 0$, i.e. $\forall y \in E, \omega(x,y) = 0$.
  Puisque ω est une forme symplectique, elle vérifie la non dégénérescence, donc $x = 0_E$.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(d_\omega) = \{0_E\}$, donc d_ω est injective de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Puisque $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times 1 = \dim(E)$, l'injectivité de d_ω équivaut à sa bijectivité, donc d_ω est bijective.

Finalement $\boxed{d_\omega \text{ est une application linéaire bijective, donc un isomorphisme.}}$

Q 7. On considère $r_F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(F, \mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell|_F \end{array} \right. .$
Montrons que r_F est surjective. Soit $u \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$.
F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui est de dimension finie.
Soit G un supplémentaire de F dans E : $E = F \oplus G$.
On définit ℓ sur E par : $\forall x \in E$, qui s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, $\ell(x) = u(x_F)$.
Autrement dit, on pose $\ell : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x = x_F + x_G & \mapsto & u(x_F) \end{array} \right. .$

- Montrons que ℓ est linéaire. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in E^2$, qui s'écrivent de manière unique $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$.
  $$\begin{array}{rclcll} \ell(\lambda x + \mu y) & = & \ell(\lambda x_F + \lambda x_G + \mu y_F + \mu y_G) & = & \ell\left(\underbrace{(\lambda x_F + \mu y_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda x_G + \mu y_G)}_{\in G} \right) & \\ & = & u(\lambda x_F + \mu y_F) & = & \lambda u(x_F) + \mu u(y_F) & \text{car } u \text{ est linéaire} \\ & = & \lambda \ell(x) + \mu \ell(y). & & & \end{array}$$
  Ainsi ℓ est linéaire, donc $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

- De plus, $\forall x \in F$, on a $\ell(x) = u(x)$ donc $r_F(\ell) = \ell|_F = u$.

On a montré que $\forall u \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R}), \exists \ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $r_F(\ell) = u$.
Donc $\boxed{\text{l'application de restriction } r_F \text{ est surjective.}}$

Q 8. Calculons le noyau de $r_F \circ d_\omega$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(r_F \circ d_\omega) &= \{x \in E, \quad r_F \circ d_\omega(x) = 0\} \\ &= \{x \in E, \quad \forall y \in F, \quad d_\omega(x)(y) = 0\} \\ &= \{x \in E, \quad \forall y \in F, \quad \omega(x,y) = 0\} \quad = \quad F^\omega.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(r_F \circ d_\omega) = F^\omega.}$
D'une part, puisque d_ω est un isomorphisme, d_ω conserve le rang ; d'autre part, puisque r_F est surjective, on a $\mathrm{Im}(r_F) = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$. Il vient

$$\mathrm{rg}(r_F \circ d_\omega) = \mathrm{rg}(r_F) = \dim(\mathcal{L}(F, \mathbb{R})) = \dim(F).$$

On applique le théorème du rang à l'application linéaire $r_F \circ d_\omega : E \to \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$:

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(r_F \circ d_\omega) + \dim(\mathrm{Ker}(r_F \circ d_\omega)) = \dim(F) + \dim(F^\omega).$$

Ainsi $\boxed{\dim(F^\omega) = \dim(E) - \dim(F).}$

Q 9. Soit ω une forme symplectique sur E. Soit ω_F la restriction à F^2 de ω. On a donc $\omega_F : F^2 \to \mathbb{R}$.

- ω vérifie la bilinéarité donc par restriction aux vecteurs de F, ω_F vérifie aussi la bilinéarité :

$$\forall (x,y,z) \in F^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} \omega(x + \lambda y, z) &=& \omega(x,z) + \lambda\omega(y,z). \\ \omega(x, y + \lambda z) &=& \omega(x,y) + \lambda\omega(x,z). \end{array}\right.$$

- ω vérifie l'antisymétrie donc $\forall (x,y) \in F^2$, $\omega_F(x,y) = \omega(x,y) = -\omega(y,x) = -\omega_F(y,x)$.
  Donc ω_F vérifie aussi l'antisymétrie.
- On en déduit que ω_F est une forme symplectique sur F si et seulement si ω_F vérifie la non dégénérescence. Or

$$\{x \in F, \quad \forall y \in F, \omega(x,y) = 0\} = F \cap \{x \in E, \quad \forall y \in F, \omega(x,y) = 0\} = F \cap F^\omega.$$

  Ainsi (ω_F vérifie la non dégénérescence) $\Leftrightarrow$ ($F \cap F^\omega = \{0_E\}$) $\Leftrightarrow$ (F et F^ω sont en somme directe).

D'après la question **Q 8**, si F et F^ω sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus F^\omega) = \dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$, donc $F \oplus F^\omega = E$. Réciproquement, si $F \oplus F^\omega = E$, alors F et F^ω sont évidemment en somme directe. D'où :

$$\begin{aligned}\omega_F \text{ est une forme symplectique sur } F &\Leftrightarrow \omega_F \text{ vérifie la non dégénérescence} \\ &\Leftrightarrow F \cap F^\omega = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow F \text{ et } F^\omega \text{ sont en somme directe} \\ &\Leftrightarrow F \oplus F^\omega = E.\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\omega_F \text{ est une forme symplectique sur } F \text{ si et seulement si } F \oplus F^\omega = E.}$

Q 10. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les colonnes des coordonnées de x et de y dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. On a donc : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n x_j e_j$.
Par bilinéarité de ω, on obtient :

$$\omega(x,y) = \omega\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \Omega_{i,j} y_j = X^T \Omega Y,$$

d'après le calcul préliminaire effectué à la question **Q 1**. D'où $\boxed{\omega(x,y) = X^T \Omega Y.}$

Q 11. • Montrons que Ω est antisymétrique.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique. D'après la question **Q 10** et par antisymétrie de ω :

$$X^T\Omega Y = \omega(x,y) = -\omega(y,x) = -Y^T\Omega X = -\left(Y^T\Omega X\right)^T = -X^T\Omega^T Y = X^T(-\Omega^T)Y.$$

On a donc $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T\Omega Y = X^T(-\Omega^T)Y$.
D'après la question **Q 1**, $\Omega^T = -\Omega$, donc $\boxed{\Omega \text{ est antisymétrique.}}$

• Montrons que Ω est inversible. Soit $X \in \mathrm{Ker}(\Omega)$. On a donc $\Omega X = 0$.
Par transposition et en utilisant que Ω est antisymétrique : $0 = (\Omega X)^T = X^T\Omega^T = -X^T\Omega$, d'où $X^T\Omega = 0$.
Ainsi $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T\Omega Y = 0$.
En notant $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ les vecteurs de coordonnées $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on en déduit que :
$\forall y \in \mathbb{R}^n, \omega(x,y) = X^T\Omega Y = 0$. Or ω est non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, donc $x = 0$, d'où $X = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(\Omega) = \{0\}$ et $\boxed{\Omega \text{ est inversible.}}$

Q 12. D'après la question **Q 11**, Ω est une matrice antisymétrique et inversible.
Ω est antisymétrique donc $\Omega^T = -\Omega$. En passant au déterminant,

$$\det(\Omega) = \det(\Omega^T) = \det(-\Omega) = (-1)^n \det(\Omega).$$

Supposons par l'absurde que n est impair. Il vient $\det(\Omega) = -\det(\Omega)$, donc $\det(\Omega) = 0$ et Ω n'est pas inversible, ce qui est absurde. Donc $\boxed{n \text{ est pair.}}$

Q 13. On considère $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & < x, j(y) > \end{array} \right.$.

• j est une application linéaire et le produit scalaire est bilinéaire, donc $\boxed{b_s \text{ est bilinéaire}}$ sur $(\mathbb{R}^n)^2$.

• Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque j est l'endomorphisme canoniquement associé à J, le vecteur $j(y)$ est de coordonnées JY dans la base canonique. D'où :

$$b_s(x,y) =< x, j(y) >= X^T JY.$$

Or $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique : $J^T = -J$, donc :

$$b_s(x,y) = X^T JY = (X^T JY)^T = Y^T J^T X = -Y^T JX = -b_s(y,x).$$

Ainsi, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, b_s(x,y) = -b_s(y,x)$. Donc $\boxed{b_s \text{ est antisymétrique.}}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n, b_s(x,y) = 0$.
Notons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Alors $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^T JY = 0$. En transposant, et avec $J^T = -J$, on a $Y^T JX = 0$.
On applique avec $Y = JX$: $(JX)^T(JX) = \|JX\|^2 = 0$.
Par séparation de la norme, $JX = 0$. Or $J^2 = -I_n$ donc J est inversible (d'inverse $-J$).
Donc $JX = 0$ entraîne $X = 0$, puis $x = 0$. Ainsi $\boxed{b_s \text{ est non dégénérée.}}$

$\boxed{b_s : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R} \text{ est bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée, donc une forme symplectique sur } \mathbb{R}^n.}$

Q 14. On suppose que $\lambda\mu \neq 1$. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$.
Puisque u est un endomorphisme symplectique, et puisque ω vérifie la bilinéarité, on a :

$$\omega(x,y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\ \omega(x,y).$$

D'où $(1 - \lambda\mu)\ \omega(x,y) = 0$ or $1 - \lambda\mu \neq 0$, donc $\omega(x,y) = 0$. Finalement, $\forall x \in E_\lambda(u),\ \forall y \in E_\mu(u),\ \omega(x,y) = 0$.
$\boxed{\text{Si } \lambda\mu \neq 1, \text{ alors } E_\lambda(u) \text{ et } E_\mu(u) \text{ sont } \omega\text{-orthogonaux.}}$

Q 15. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ les colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$.
On a montré à la question **Q 13** que $b_s(x,y) = X^T JY$.

De plus, le vecteur $u(x)$ est de coordonnées MX dans $\mathcal{B}$, et le vecteur $u(y)$ est de coordonnées MY dans $\mathcal{B}$. Donc $b_s(u(x), u(y)) = (MX)^T J(MY) = X^T M^T JMY$.

$$\begin{aligned} u \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathbb{R}^n, b_s) &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad b_s(u(x), u(y)) = b_s(x,y) \\ &\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad X^T M^T JMY = X^T JY. \\ &\Leftrightarrow M^T JM = J \text{ d'après la question } \mathbf{Q\ 1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symplectique de } (\mathbb{R}^n, b_s) \quad \Leftrightarrow \quad M^T JM = J.}$

Q 16. $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^T JM = J\}$.

- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Alors $M^T JM = J$ donc $JM^T JM = J^2 = -I_n$ et $(-JM^T J)M = I_n$.
  On en déduit que M est inversible d'inverse $-JM^T J$.
  On a $\forall M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, M est inversible, donc $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R}).}$
- On a $I_n^T J I_n = J$ donc $I_n \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset.}$
- Soit $(M,N) \in (\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}))^2$. Alors $(MN)^T J(MN) = N^T(M^T JM)N = N^T JN = J$.
  Donc $MN \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par produit.}}$
- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Alors $M^T JM = J$.
  On multiplie à gauche par $(M^{-1})^T$ et à droite par M^{-1} : $\quad J = (M^{-1})^T JM^{-1}$.
  Donc $M^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par passage à l'inverse.}}$
- On a montré que $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}).}$
- Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. On a montré que$(-JM^T J)M = I_n$ donc M est inversible d'inverse $-JM^T J$. On a donc également
  $$M(-JM^T J) = I_n.$$
  En multipliant à droite par J, on obtient $MJM^T = J$, i.e. $M^T \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
  On a montré que $\forall M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), M^T \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par transposition.}}$
- On a $J^2 = -I_n$ donc $J^T JJ = (-J)J^2 = -J(-I_n) = J$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ contient } J.}$

Finalement, $\boxed{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}) \text{, stable par transposition et contenant } J.}$

Q 17. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on écrit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $(A,B,C,D) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^4$. Calculons :

$$\begin{aligned} M^T JM - J &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A^T C + C^T A & -A^T D + C^T B + I_m \\ D^T A - B^T C - I_m & -B^T D + D^T B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow M^T JM - J = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} A^T C &=& C^T A = (A^T C)^T. \\ B^T D &=& D^T B = (B^T D)^T. \\ A^T D - C^T B &=& I_m. \\ D^T A - B^T C &=& I_m \text{ qui est équivalente à la ligne précédente par transposition.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} A^T C \text{ et } B^T D \text{ sont symétriques} \\ \text{et } A^T D - C^T B = I_m. \end{array} \right.}$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

Q 18. On identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $a, b, c, d \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
D'après la question **Q 17**, $M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si ((ac) et (bd) sont symétriques et $(ad - bc) = I_1 = (1)$).
Une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est toujours symétrique, donc la condition ci-dessus équivaut à $\det(M) = ad - bc = 1$.
Finalement, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(M) = 1 \Leftrightarrow M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).}$

Q 19. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on écrit $M = \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix}$, avec $(U, V, W, Z) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^4$. Calculons :

$$JM - MJ = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V & -Z \\ U & W \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W & -U \\ Z & -V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V - W & U - Z \\ U - Z & V + W \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$M = \begin{pmatrix} U & W \\ V & Z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_J \quad \Leftrightarrow \quad JM - MJ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z = U \text{ et } W = -V \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{M \in \mathcal{C}_J \quad \Leftrightarrow \exists (U, V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2, \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}.}$

Q 20. Soit $M \in \mathcal{C}_J$. D'après la question **Q 19**, $\exists (U, V) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2, \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$. Calculons :

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ V - iU & U \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix}.}$$

Les matrices $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix}$ sont de déterminant 1, car triangulaires avec des 1 sur la diagonale.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} &&= \det \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix} \\ &= \det(U + iV) \det(U - iV) &&= \det(U + iV) \det(\overline{U + iV}) \\ &= \det(U + iV) \overline{\det(U + iV)} &&= |\det(U + iV)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En effet, $\forall A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}), \quad \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
D'où $\boxed{\forall M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_J, \quad \det(M) = |\det(U + iV)|^2 \geq 0.}$

Q 21. $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$.

- D'après le cours, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
  En effet, $O_n(\mathbb{R})$ contient I_n, est stable par produit et par passage à l'inverse.
- D'après la question Q 16, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
- Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe, donc $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
- On a l'inclusion $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, où $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est non vide, stable par produit et par passage à l'inverse, donc $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).}$
- $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, donc une partie de $M_n(\mathbb{R})$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
- Montrons que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est bornée.
  Puisque $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc on

peut choisir la norme infinie définie par : $\forall A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|$.

Soit $A\in O_n(\mathbb{R})$. Alors $AA^T=I_n$:

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad (I_n)_{i,i}=(AA^T)_{i,i}=\sum_{j=1}^n A_{i,j}(A^T)_{j,i}=\sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2=1.$$

Donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2, |a_{i,j}|\le 1$, et ainsi $\|A\|_\infty\le 1$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est bornée.

On a $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\cap O_n(\mathbb{R})\subset O_n(\mathbb{R})$. Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est bornée, $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est bornée.}}$

- Montrons que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est fermée.

$$\begin{array}{rcll} O_n(\mathbb{R}) & = & \{M\in M_n(\mathbb{R}), M^TM=I_n\}=f^{-1}(\{I_n\}) & \text{en posant } f(M)=M^TM. \\ \mathrm{SP}_n(\mathbb{R}) & = & \{M\in M_n(\mathbb{R}), M^TJM=J\}=g^{-1}(\{J\}) & \text{en posant } g(M)=M^TJM. \end{array}$$

Un singleton est fermé, donc les singletons $\{I_n\}$ et $\{J\}$ sont fermés.

La transposition $\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & M^T\end{array}\right.$ est continue, car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie.

Le produit matriciel $\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ (A,B) & \mapsto & AB\end{array}\right.$ est continu, car bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ de dimension finie.

Par composition, les deux applications $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & M^TM\end{array}\right.$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & M^TJM\end{array}\right.$ sont continues.

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermée.

Donc les parties $O_n(\mathbb{R})=f^{-1}(\{I_n\})$ et $\mathrm{SP}_n(\mathbb{R})=g^{-1}(\{J\})$ sont fermées dans $M_n(\mathbb{R})$.

Une intersection de fermés est fermée, donc $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est fermée.}}$

- $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est fermée et bornée, donc c'est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact de } \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}).}$

Q 22. Soit $M\in\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\cap O_n(\mathbb{R})$.
Puisque $M\in O_n(\mathbb{R})$, M est inversible d'inverse $M^{-1}=M^T$.
Puisque $M\in\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, on a $M^TJM=J$ donc $M^{-1}JM=J$.
En multipliant à gauche par M, on obtient $JM=MJ$ donc $M\in\mathcal{C}_J$. Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{C}_J.}$

Q 23. Soit $M\in\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})\cap O_n(\mathbb{R})$.
Puisque $M\in O_n(\mathbb{R})$, on a $M^TM=I_n$ donc $\det(M)^2=\det(M^T)\det(M)=\det(M^TM)=\det(I_n)=1$, donc $\det(M)^2=1$ et $\boxed{\det(M)=\pm1.}$
D'après la question **Q 22**, $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{C}_J$ donc $M\in\mathcal{C}_J$. D'après la question **Q 20**, puisque $M\in\mathcal{C}_J$, on a de plus $\boxed{\det(M)\ge 0}$ d'où $\det(M)=1$.
Donc $\boxed{\forall M\in\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}),\ \det(M)=1.}$

Q 24. On considère $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ une matrice symplectique.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, symétrique à valeurs propres strictement positives, telle que $S^2 = M^T M$.
D'après la question **Q 16**, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition et par produit, donc la matrice $S^2 = M^T M$ est symplectique.
Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S.
Alors s^2 est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $S^2 \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, donc s^2 est un endomorphisme symplectique.
La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormale, de même que l'endomorphisme s.
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de s.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (réelles) de s, telles que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ s(v_i) = \lambda_i v_i$.
On remarque que $(v_1, \dots, v_n)$ est aussi formée de vecteurs propres de s^2.
D'après la question **Q 14**, appliquée à l'endomorphisme symplectique s^2, si $\lambda^2\mu^2 \neq 1$, les sous-espaces propres $E_{\lambda^2}(s^2)$ et $E_{\mu^2}(s^2)$ sont b_s-orthogonaux. Puisque les valeurs propres de s sont strictement positives, la condition $\lambda^2\mu^2 \neq 1$ équivaut à $\lambda\mu \neq 1$.
En particulier :

$$\text{Si } \lambda_i\lambda_j \neq 1, \text{ alors } b_s(v_i, v_j) = 0.$$

Soit $x \in E$, qui se décompose dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs propres :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i v_i. \\ s(x) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i s(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i v_i. \\ s^2(x) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i s^2(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^2 v_i. \end{array} \right.$$

Soit $(x, y) \in E^2$ qui se décomposent dans la base de vecteurs propres : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i v_i$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^n y_j v_j$. Il vient

$$\begin{array}{rclcl} b_s(s^2(x), s^2(y)) &=& b_s\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i^2 v_i, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j^2 v_j\right) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (\lambda_i\lambda_j)^2 x_i y_j b_s(v_i, v_j) \\ &=& \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j = 1} (\lambda_i\lambda_j)^2 x_i y_j b_s(v_i, v_j) &=& \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j = 1} x_i y_j b_s(v_i, v_j). \end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{rclcl} b_s(s(x), s(y)) &=& b_s\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j v_j\right) &=& \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (\lambda_i\lambda_j) x_i y_j b_s(v_i, v_j) \\ &=& \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j = 1} (\lambda_i\lambda_j) x_i y_j b_s(v_i, v_j) &=& \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \mid \lambda_i\lambda_j = 1} x_i y_j b_s(v_i, v_j) \\ &=& b_s(s^2(x), s^2(y)) &=& b_s(x, y), \end{array}$$

car s^2 est un endomorphisme symplectique.
On a montré que $\forall (x, y) \in E^2,\ b_s(s(x), s(y)) = b_s(x, y)$, donc s est un endomorphisme symplectique.
On en déduit que $\boxed{\text{la matrice } S \text{ est symplectique.}}$

Q 25. • On a $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ d'après la question **Q 16**, donc M est inversible et $\det(M) \neq 0$.
Or $S^2 = M^T M$ d'où $\det(S)^2 = \det(S^2) = \det(M^T M) = \det(M^T)\det(M) = \det(M)^2 \neq 0$.
Donc $\det(S) \neq 0$ et $\boxed{S \text{ est inversible.}}$

• On pose $O = MS^{-1}$.
D'une part, les matrices M et S sont symplectiques. D'après la question **Q 16**, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse et par produit, donc S^{-1} puis $O = MS^{-1}$ sont également symplectiques.
D'autre part, puisque S est symétrique,

$$O^T O = (S^{-1})^T M^T M S^{-1} = (S^T)^{-1}(M^T M)S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n.$$

Ainsi O est une matrice orthogonale.
On a donc $O \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$, donc $\boxed{O = MS^{-1} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}).}$

Q 26. D'après la question **Q 23**, puisque $O = MS^{-1} \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(O) = 1$.
Or $\det(O) = \det(MS^{-1}) = \det(M)\det(S)^{-1}$, donc $\det(M) = \det(S)$.
La matrice S est diagonalisable et de valeurs propres strictement positives, donc $\det(S) > 0$, d'où $\det(M) > 0$.
Puisque $M \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$, on a $M^T JM = J$ donc $\det(J) = \det(M^T JM) = \det(J)\det(M)^2$. Or J est inversible donc $\det(J) \neq 0$ et $\det(M)^2 = 1$. Ainsi $\det(M) = \pm 1$, or $\det(M) > 0$, donc $\boxed{\det(M) = 1.}$

Q 27. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\forall x \in E, \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a,x)a$.

• Montrons que τ_a^λ est une transvection de E.
$\tau_a^\lambda : E \to E$ est linéaire (par linéarité de l'identité Id_E et par bilinéarité de ω) donc τ_a^λ est bien un endomorphisme de E.
Posons $\forall x \in E, \ell(x) = \omega(a,x)$.
ω est bilinéaire donc ℓ est linéaire et $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
D'après la question **Q 3**, $\ell(a) = \omega(a,a) = 0$ donc $a \in \mathrm{Ker}(\ell)$.
On en déduit que $\forall x \in E, \tau_a^\lambda(x) = x + \ell(x)a$ avec $\ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ et $a \in \mathrm{Ker}(\ell)$, donc τ_a^λ est une transvection.

• Montrons que τ_a^λ est un endomorphisme symplectique de E. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{array}{rcll} \omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) & = & \omega\Big(x + \lambda\omega(a,x)a, y + \lambda\omega(a,y)a\Big) & \\ & = & \omega(x,y) + \lambda\omega(x,a)\omega(a,y) + \lambda\omega(a,x)\omega(a,y) & \\ & & +\lambda^2\omega(a,x)\omega(a,y)\omega(a,a) & \text{par bilinéarité de } \omega. \\ & = & \omega(x,y) + \lambda\omega(a,y)\Big(\omega(x,a) + \omega(a,x)\Big) & \text{car } \omega(a,a) = 0. \\ & = & \omega(x,y) & \text{car } \omega(x,a) = -\omega(a,x). \end{array}$$

Ainsi $\forall (x,y) \in E^2,\ \omega(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)) = \omega(x,y)$ donc τ_a^λ est un endomorphisme symplectique.

$\boxed{\text{Donc } \tau_a^\lambda \text{ est une transvection de } E \text{ et un endomorphisme symplectique de } E.}$

Q 28. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $x \in E$.

$$\begin{array}{rcll} \tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda(x) & = & \tau_a^\mu\Big(x + \lambda\omega(a,x)a\Big) & \\ & = & \tau_a^\mu(x) + \lambda\omega(a,x)\tau_a^\mu(a) & \text{car } \tau_a^\mu \text{ est linéaire} \\ & = & \tau_a^\mu(x) + \lambda\omega(a,x)a & \text{car } \omega(a,a) = 0 \text{ donc } \tau_a^\mu(a) = a \\ & = & x + \mu\omega(a,x)a + \lambda\omega(a,x)a & \\ & = & x + (\lambda+\mu)\omega(a,x)a & \\ & = & \tau_a^{\lambda+\mu}(x). & \end{array}$$

Donc $\boxed{\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}.}$

Q 29. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
La famille (a) est libre (car a est non nul) donc on peut la compléter en une base $\mathcal{B}' = (a, e_2, \ldots, e_n)$ de E. On a

$$\begin{cases} & \tau_a^\lambda(a) &=& a. \\ \forall i \in [\![2,n]\!], & \tau_a^\lambda(e_i) &=& e_i + \lambda\omega(a,e_i)a. \end{cases}$$

Donc la matrice T_a^λ de $\tau_a^\lambda(a)$ dans la base $\mathcal{B}'$ vaut :

$$T_a^\lambda = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tau_a^\lambda(a)) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda\omega(a,e_2) & \ldots & \ldots & \lambda\omega(a,e_n) \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc $\det(\tau_a^\lambda) = \det(T_a^\lambda) = 1$.
Finalement, $\forall a \in E \setminus \{0_E\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(\tau_a^\lambda) = 1 > 0.}$

Q 30. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^{\lambda-\lambda} = \tau_a^0 = \mathrm{Id}_E$.
Donc τ_a^λ est bijectif, de bijection réciproque $\tau_a^{-\lambda}$.
$\boxed{\text{La réciproque } \left(\tau_a^\lambda\right)^{-1} = \tau_a^{-\lambda} \text{ est encore une transvection symplectique.}}$

Q 31. On suppose que $\omega(x,y) \neq 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On remarque que $\omega(y-x,x) = \omega(y,x) - \omega(x,x) = \omega(y,x)$ car $\omega(x,x) = 0$. il vient :

$$\begin{aligned} \tau_{y-x}^\lambda(x) &= x + \lambda\omega(y-x,x)(y-x) \\ &= x + \lambda\omega(y,x)(y-x) \\ &= \lambda\omega(y,x)y + (1-\lambda\omega(y,x))x. \end{aligned}$$

On a $\omega(y,x) = -\omega(x,y) \neq 0$. Posons $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(x,y)}$, alors $\lambda\omega(y,x) = 1$ donc $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.
$\boxed{\text{Si } \omega(x,y) \neq 0, \text{ en posant } \lambda = -\dfrac{1}{\omega(x,y)}, \text{ on a } \tau_{y-x}^\lambda(x) = y.}$

Q 32. On suppose que $\omega(x,y) = 0$.
Pour $v \in E$ un vecteur non nul, on pose $H(v) = \{a \in E,\ \omega(v,a) = 0\}$.
Puisque ω est bilinéaire, $a \mapsto \omega(v,a)$ est une forme linéaire.
Puisque ω est non dégénérée et v est non nul, $a \mapsto \omega(v,a)$ est non nulle.
Alors $H(v)$ est le noyau de la forme linéaire non nulle $a \mapsto \omega(v,a)$, donc un hyperplan de E.
Posons

$$\begin{aligned} H(x) &= \{a \in E,\ \omega(x,a) = 0\}. \\ H(y) &= \{a \in E,\ \omega(y,a) = 0\}. \end{aligned}$$

Les vecteurs x et y sont non nuls, donc $H(x)$ et $H(y)$ sont deux hyperplans de E donc l'union $H(x) \cup H(y) \neq E$.
En effet, l'union est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les deux hyperplans sont égaux, mais dans ce cas l'union est un hyperplan.
Alors il existe $z \in E \setminus (H(x) \cup H(y))$.
$\boxed{\text{Il existe un vecteur } z \in E \text{ tel que } \omega(x,z) \neq 0 \text{ et } \omega(y,z) \neq 0.}$

Q 33. Démontrons le lemme. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.

- **Premier cas : $\omega(x,y) \neq 0$.**
  D'après **Q 31**, puisque $\omega(x,y) \neq 0$, en posant $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(x,y)}$, on a $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.
  On pose $\boxed{\gamma = \tau_{y-x}^\lambda.}$ Alors $\gamma(x) = y$ et γ est une transvection symplectique.
- **Deuxième cas : $\omega(x,y) = 0$.**
  D'après **Q 32**, il existe $z \in E$ tel que $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$. En particulier, z est non nul.
  D'après **Q 31**, puisque $\omega(x,z) \neq 0$, en posant $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\omega(x,z)}$, on a $\boxed{\tau_{z-x}^{\lambda_1}(x) = z.}$

D'après **Q 31**, puisque $\omega(z,y) \neq 0$, en posant $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\omega(z,y)}$, on a $\boxed{\tau_{y-z}^{\lambda_2}(z) = y.}$

On pose $\boxed{\gamma = \tau_{y-z}^{\lambda_2} \circ \tau_{z-x}^{\lambda_1}.}$ Alors $\gamma(x) = y$ et γ est la composée de deux transvections symplectiques.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{il existe une composée } \gamma \text{ d'au plus deux transvections symplectiques de } E\text{, telle que } \gamma(x) = y.}$

Q 34. Soit u un endomorphisme symplectique de E et e_1 un vecteur non nul.
Puisque ω est non dégénérée et $e_1 \neq 0_E$, il existe $z \in E$ tel que $\omega(e_1, z) \neq 0$. Posons $f_1 = \dfrac{1}{\omega(e_1,z)} z$.

- Par bilinéarité de ω, on a $\omega(e_1, f_1) = \dfrac{1}{\omega(e_1,z)}\omega(e_1,z) = 1$.
- Supposons par l'absurde que f_1 est colinéaire à e_1. Alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $f_1 = te_1$.
D'où $1 = \omega(e_1, f_1) = \omega(e_1, te_1) = t\omega(e_1, e_1) = 0$, ce qui est absurde. Donc e_1 et f_1 ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{Il existe } f_1 \in E\text{, non colinéaire à } e_1\text{, tel que } \omega(e_1, f_1) = 1.}$

Q 35. Montrons qu'un endomorphisme symplectique u est bijectif.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = 0$. Puisque u est symplectique :

$$\forall y \in E, \quad \omega(x,y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(0, u(y)) = 0$$

par bilinéarité de ω. Or ω est non dégénérée, donc $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc u est injectif, or E est de dimension finie donc u est bijectif.
Puisque $e_1 \neq 0$ et u est bijectif, on a $u(e_1) \neq 0$.
Alors e_1 et $u(e_1)$ sont deux vecteurs non nuls de E.
$\boxed{\text{D'après le lemme, il existe une composée } \delta_1 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques, telle que } \delta_1(u(e_1)) = e_1.}$

Q 36. On a $\omega(e_1, f_1) = 1$ et de plus :

$$\omega(e_1, \widetilde{f_1}) = \omega(\delta_1(u(e_1)), \delta_1(u(f_1))) = \omega(u(e_1), u(f_1)) = \omega(e_1, f_1) = 1.$$

car δ_1 et u sont des endomorphismes symplectiques.

- **Premier cas :** $\omega(\widetilde{f_1}, f_1) \neq 0$**.**
D'après **Q 31**, puisque $\omega(\widetilde{f_1}, f_1) \neq 0$, en posant $\lambda = -\dfrac{1}{\omega(\widetilde{f_1}, f_1)}$, on a $\tau_{f_1-\widetilde{f_1}}^{\lambda}(\widetilde{f_1}) = f_1$.
De plus, $\omega(f_1 - \widetilde{f_1}, e_1) = \omega(f_1, e_1) - \omega(\widetilde{f_1}, e_1) = -1 + 1 = 0$, donc $\tau_{f_1-\widetilde{f_1}}^{\lambda}(\widetilde{f_1})(e_1) = e_1$.
Ainsi $\boxed{\delta_2 = \tau_{f_1-\widetilde{f_1}}^{\lambda}}$ est une transvection symplectique et convient car $\delta_2(e_1) = e_1$ et $\delta_2(\widetilde{f_1}) = f_1$.

- **Deuxième cas :** $\omega(\widetilde{f_1}, f_1) = 0$**.**
  - ⋆ Montrons qu'il existe $z \in E$ tel que $\omega(\widetilde{f_1}, z) \neq 0$ et $\omega(f_1, z) \neq 0$ et $\omega(e_1, z) = 1$.
  Pour $v \in E$ un vecteur non nul, on a montré en **Q 32** que $H(v) = \{a \in E,\ \omega(v,a) = 0\}$ est un hyperplan de E. Posons
  $$\begin{array}{rcl} H(\widetilde{f_1}) & = & \{a \in E,\ \omega(\widetilde{f_1}, a) = 0\}. \\ H(f_1) & = & \{a \in E,\ \omega(f_1, a) = 0\}. \\ H(e_1) & = & \{a \in E,\ \omega(e_1, a) = 0\}. \end{array}$$
  Les vecteurs $\widetilde{f_1}$, f_1 et e_1 sont non nuls, donc $H(\widetilde{f_1})$, $H(f_1)$ et $H(e_1)$ sont trois hyperplans de E, donc l'union $H(\widetilde{f_1}) \cup H(f_1) \cup H(e_1) \neq E$. En effet, l'union est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les trois hyperplans sont égaux, mais dans ce cas l'union est un hyperplan.
  Alors il existe $z_0 \in E \setminus (H(\widetilde{f_1}) \cup H(f_1) \cup H(e_1))$.
  On a donc $\omega(\widetilde{f_1}, z_0) \neq 0$ et $\omega(f_1, z_0) \neq 0$ et $\omega(e_1, z_0) \neq 0$.
  En posant $z = \dfrac{1}{\omega(e_1, z_0)} z_0$, on a $\boxed{\omega(\widetilde{f_1}, z) \neq 0 \text{ et } \omega(f_1, z) \neq 0 \text{ et } \omega(e_1, z) = 1.}$
  - ⋆ On utilise le vecteur z obtenu.
  D'après **Q 31**, puisque $\omega(\widetilde{f_1}, z) \neq 0$, en posant $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\omega(\widetilde{f_1}, z)}$, on a $\boxed{\tau_{z-\widetilde{f_1}}^{\lambda_1}(\widetilde{f_1}) = z.}$

D'après **Q 31**, puisque $\omega(z, f_1) \neq 0$, en posant $\lambda_2 = -\dfrac{1}{\omega(z, f_1)}$, on a $\boxed{\tau_{f_1-z}^{\lambda_2}(z) = f_1.}$

On pose $\boxed{\delta_2 = \tau_{f_1-z}^{\lambda_2} \circ \tau_{z-\widetilde{f}_1}^{\lambda_1}.}$ δ_2 est la composée de deux transvections symplectiques.

$$\begin{array}{rclcrcl} \omega(z - \widetilde{f}_1, e_1) & = & \omega(z, e_1) - \omega(\widetilde{f}_1, e_1) = -1 + 1 = 0, & \text{donc } & \tau_{z-\widetilde{f}_1}^{\lambda_1}(e_1) & = & e_1. \\ \omega(f_1 - z, e_1) & = & \omega(f_1, e_1) - \omega(z, e_1) = -1 + 1 = 0, & \text{donc } & \tau_{f_1-z}^{\lambda_2}(e_1) & = & e_1. \end{array}$$

δ_2 convient car $\delta_2(e_1) = e_1$ et $\delta_2(\widetilde{f}_1) = f_1$.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{il existe une composée } \delta_2 \text{ d'au plus deux transvections symplectiques, telle que } \left\{ \begin{array}{rcl} \delta_2(e_1) & = & e_1 \\ \delta_2(\widetilde{f}_1) & = & f_1 \end{array} \right. .}$

Q 37. La famille (e_1, f_1) est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) et génératrice de $P = \text{Vect}(e_1, f_1)$, donc (e_1, f_1) est une base de P.
D'après la condition **(III.1)**, on a $v(e_1) = \delta \circ u(e_1) = e_1$ et $v(e_2) = \delta \circ u(e_2) = e_2$.
Soit $x \in P$. $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, x = \lambda e_1 + \mu f_1$, donc par linéarité de v, $v(x) = \lambda v(e_1) + \mu v(f_1) = \lambda e_1 + \mu f_1 = x \in P$.
On a $\forall x \in P, v(x) \in P$ donc $\boxed{P \text{ est stable par } v.}$ De plus, $\boxed{v_P = \text{Id}_P \text{ est l'endomorphisme induit par } v \text{ sur } P.}$

Q 38. Montrons que v est un endomorphisme symplectique.
Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes symplectiques de (E, ω). Alors

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad \omega(u_1 \circ u_2(x), u_1 \circ u_2(y)) = \omega(u_2(x), u_2(y)) = \omega(x, y),$$

donc $u_1 \circ u_2$ est un endomorphisme symplectique.
Puisque v est une composée d'endomorphismes symplectiques, v est un endomorphisme symplectique.
Par définition, $P^\omega = \{x \in E, \forall y \in P, \omega(x, y) = 0\}$.
Soit $x \in P^\omega$. Soit $y \in P$. D'après la question **Q 37**, $v(y) = y$. En utilisant que v est symplectique :

$$\omega(v(x), y) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(x, y) = 0$$

car $x \in P^\omega$ et $y \in P$.
On a $\forall y \in P, \omega(v(x), y) = 0$, d'où $v(x) \in P^\omega$. Finalement $\boxed{P^\omega \text{ est stable par } v.}$

Q 39.
- Soit $x \in P \cap P^\omega$. Puisque $x \in P = \text{Vect}(e_1, f_1)$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \lambda e_1 + \mu f_1$. On utilise que $x \in P^\omega$ et que les vecteurs e_1, f_1 sont dans P. On rappelle que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

$$\begin{array}{rclcl} 0 = \omega(x, e_1) & = & \omega(\lambda e_1 + \mu f_1, e_1) & = & \lambda\omega(e_1, e_1) + \mu\omega(f_1, e_1) = -\mu. \\ 0 = \omega(x, f_1) & = & \omega(\lambda e_1 + \mu f_1, f_1) & = & \lambda\omega(e_1, f_1) + \mu\omega(f_1, f_1) = \lambda. \end{array}$$

  Donc $\lambda = \mu = 0$ et $x = 0_E$. On a $P \cap P^\omega = \{0_E\}$.
  Or $\dim(P) + \dim(P^\omega) = \dim(E)$, donc $\boxed{P \oplus P^\omega = E.}$
- On a

$$\forall x \in P, \quad \forall y \in P^\omega, \quad \omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0,$$

  donc $P \subset (P^\omega)^\omega$. De plus,

$$\dim((P^\omega)^\omega) = \dim(E) - \dim(P^\omega) = \dim(P).$$

  Donc $P = (P^\omega)^\omega$. On en déduit que $\boxed{(P^\omega)^\omega \oplus P^\omega = E.}$
  D'après la question **Q 9**, $\boxed{\text{la restriction } \omega_{P^\omega} \text{ de } \omega \text{ à } (P^\omega)^2 \text{ définit une forme symplectique sur } P^\omega.}$
- Puisque l'endomorphisme v est symplectique :

$$\forall(x, y) \in (P^\omega)^2, \quad \omega(v_{P^\omega}(x), v_{P^\omega}(y)) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(x, y).$$

  Donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } v_{P^\omega}\text{, induit par } v \text{ sur } P^\omega\text{, est symplectique.}}$

Q 40. Démontrons le théorème par récurrence sur $m \geq 1$, où $\dim(E) = n = 2m$.

$$(H_m) : \left| \begin{array}{l} \text{Soit } (E,\omega) \text{ un espace symplectique de dimension } 2m. \text{ Soit } u \in \mathrm{Symp}_\omega(E). \\ \text{Il existe un entier } p \leq 4m \text{ et } \tau_1, \ldots, \tau_p \text{ des transvections symplectiques de } \mathbb{R}^n, \\ \text{telles que } u = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1. \end{array} \right.$$

- **Initialisation : $m = 1$.** Soit (E, ω) un espace symplectique de dimension 2. Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$. On fixe $e_1 \in E$ non nul puis on construit f_1 comme dans la question **Q 34**. On a donc $P = \mathrm{Vect}(e_1, f_1) = E$. Par la question **Q 36**, il existe δ composée d'au plus $4 = 4m$ transvections symplectiques de E, telle que $v = \delta \circ u$, et on a montré que $v = v_P = \mathrm{Id}_P = \mathrm{Id}_E$. Donc $u = \delta^{-1}$ est la composée d'au plus 4 bijections réciproques de transvections symplectiques de E, qui sont encore des transvections symplectiques par **Q 30**.
- **Hérédité : $(H_{m-1}) \Rightarrow (H_m)$.** Supposons le résultat vrai au rang $(m-1)$ et montrons-le au rang m.
Soit (E, ω) un espace symplectique de dimension $2m$. Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(E)$.
On fixe $e_1 \in E$ non nul puis on construit f_1 comme dans la question **Q 34**. On pose $P = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$.
Par la question **Q 36**, il existe δ composée d'au plus 4 transvections symplectiques de E, telle que $v = \delta \circ u$.
Par la question **Q 37**, P est stable par v et $v_P = \mathrm{Id}_P$.
Par les questions **Q 38** et **Q 39**, P^ω est stable par v ; $(P^\omega, \omega_{P^\omega})$ est un espace symplectique de dimension $\dim(P^\omega) = \dim(E) - \dim(P) = 2m - 2$; v_{P^ω} est un endomorphisme symplectique de P^ω.
Par hypothèse de récurrence, appliquée à l'endomorphisme symplectique v_{P^ω}, il existe un entier $p \leq 4(m-1)$ et $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de P^ω, telles que
$$v_{P^\omega} = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1.$$
De plus, chaque transvection τ_k est de la forme $\tau_k = \tau_{a_k}^{\lambda_k}$ avec $a_k \in P^\omega$ non nul et $\lambda_k \in \mathbb{R}$. D'où
$$\forall x \in P, \quad \tau_k(x) = \tau_{a_k}^{\lambda_k} = x + \lambda_k \underbrace{\omega(a_k, x)}_{=0} = x = \mathrm{Id}_P(x) = v_P(x).$$
Ainsi la transvection $\tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$ coïncide avec v sur P et sur P^ω, donc sur E par linéarité et car $E = P \oplus P^\omega$. On a donc
$$\delta \circ u = v = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1.$$
donc
$$u = \delta^{-1} \circ v = \delta^{-1} \circ \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1,$$
où δ^{-1} est la composée d'au plus 4 bijections réciproques de transvections symplectiques de E, qui sont des transvections symplectiques par **Q 30**.
Finalement, u est la composée d'au plus $p + 4 \leq 4(m-1) + 4 = 4m$ transvections symplectiques de E, ce qui achève la récurrence.

$\boxed{\text{On a donc démontré le théorème par récurrence sur } m.}$

Q 41. Soit $M \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$ où $n = 2m$ est pair.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. D'après **Q 15**, u est un endomorphisme symplectique.
D'après le théorème démontré en question **Q 40**, il existe un entier $p \leq 4m$ et $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de $\mathbb{R}^n$, telles que $u = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un vecteur non nul $a_k \in E$ et un réel λ_k, tels que $\tau_k = \tau_{a_k}^{\lambda_k}$.
Si $a \in E$ est un vecteur non nul et λ un réel, on note $T_a(\lambda)$ la matrice de la transvection symplectique τ_a^λ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.
On a donc

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau_{a_1}^{\lambda_1} \circ \ldots \circ \tau_{a_p}^{\lambda_p}) = T_{a_1}(\lambda_1) \times \ldots \times T_{a_p}(\lambda_p).$$

Posons

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathrm{SP}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \gamma(t) = T_{a_1}(t\lambda_1) \times \ldots \times T_{a_p}(t\lambda_p). \end{array} \right.$$

- Chaque matrice $T_{a_k}(t\lambda_k)$ est la matrice d'une transvection symplectique, donc est une matrice symplectique. De plus $\mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit, donc $\forall t \in [0,1],\ \gamma(t) \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$. L'application γ est bien à valeurs dans $\mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $a \in E \setminus \{0_E\}$, on a $\tau_a^0 = \mathrm{Id}_E$ donc $T_a(0) = I_n$ donc $\boxed{\gamma(0) = I_n.}$
- On a clairement $\boxed{\gamma(1) = M.}$
- Montrons que l'application $t \mapsto T_a(t\lambda)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  Comme dans la question **Q 29**, on complète la famille libre (a) en une base $\mathcal{B}' = (a, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$P^{-1}T_a(t\lambda)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tau_a^{t\lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & t\lambda\omega(a,e_2) & \ldots & \ldots & t\lambda\omega(a,e_n) \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Les coefficients de cette matrice sont polynomiaux en t, et le produit matriciel est continu, donc l'application $t \mapsto T_a(t\lambda) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\tau_a^{t\lambda})P^{-1}$ est continue.
  Le produit matriciel est continu donc $\boxed{\gamma \text{ est une application continue sur } [0,1].}$
- Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence :

$$\forall (M,N) \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})^2, \quad M\mathcal{R}N \quad \Leftrightarrow \quad (\text{il existe un chemin continu de } [0,1] \text{ dans } \mathrm{SP}_n(\mathbb{R}) \text{ qui relie } M \text{ à } N).$$

  On vient de montrer que $\forall M \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R}), I_n\mathcal{R}M$.
  Soit $(M,N) \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})^2$. Par transitivité et symétrie de $\mathcal{R}$, $I_n\mathcal{R}M$ et $I_n\mathcal{R}N$ implique $M\mathcal{R}N$.
  Donc $\boxed{\text{le groupe symplectique } \mathrm{SP}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie connexe par arcs de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

Q 42. Soit $M \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$ où $n = 2m$ est pair.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. D'après **Q 15**, u est un endomorphisme symplectique.
D'après le théorème démontré en question **Q 40**, il existe un entier $p \leq 4m$ et $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transvections symplectiques de $\mathbb{R}^n$, telles que $u = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$.
On a montré à la question **Q 29** qu'une transvection symplectique est de déterminant 1.
Ainsi, $\forall k \in [\![1,p]\!],\ \det(\tau_k) = 1$. Il vient

$$\det(M) = \det(u) = \det(\tau_p \circ \ldots \circ \tau_1) = \prod_{k=1}^{p} \det(\tau_k) = 1,$$

donc $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. On a donc l'inclusion $\boxed{\mathrm{SP}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}).}$

IV Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires

Q 43. Soit $r > 0$ et $t > 0$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$ est la matrice diagonale suivante :

$$U = \mathrm{Diag}(r, t, \ldots, t, r, t, \ldots, t) \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}), \text{ avec } U_{i,i} = \begin{cases} r & \text{si } i = 1 \text{ ou } i = m+1, \\ t & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\det(U) = r^2 t^{2m-2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad rt^{m-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = (1/r)^{1/(m-1)}.$$

Pour cette valeur de t, on a $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$.
Soit $(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) \in B^{2m}(1)$, alors :

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 + y_1^2 + \ldots + y_m^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 \leq 1.$$

De plus

$$u(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) = (rx_1, tx_2, \ldots tx_m, ry_1, ty_2, \ldots ty_m).$$

Ce vecteur vérifie :

$$(rx_1)^2 + (ry_1)^2 = r^2(x_1^2 + y_1^2) \leq r^2,$$

donc $u(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m) \in Z^{2m}(r)$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } r > 0, \text{ il existe } u \in SL(\mathbb{R}^{2m}) \text{ tel que } u(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(r).}$

Q 44. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de U.

- $\boxed{\textbf{Premier cas : } \lambda \in \mathbb{R}.}$
  Soit $X \in \mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre (donc non nul) de U associé à λ : $UX = \lambda X$.
  Quitte à diviser X par sa norme, on suppose que X est de norme 1 : $\|X\| = 1$.
  Puisque $X \in B^{2m}(1)$ et $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$, on a $\|UX\| \leq r$. Or

$$\|UX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\| = |\lambda| \leq r \quad \text{donc} \quad \boxed{|\lambda| \leq r.}$$

- $\boxed{\textbf{Deuxième cas : } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.}$
  Soit $Z \in \mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre (donc non nul) de U associé à λ : $UZ = \lambda Z$.
  On pose $Z = P + iQ$ où $P, Q \in \mathcal{M}_{2m,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$0 \neq Z^T \overline{Z} = (P + iQ)^T (P - iQ) = P^T P + Q^T Q + i \underbrace{(Q^T P - P^T Q)}_{=0} = \|P\|^2 + \|Q\|^2.$$

  D'où

$$(\lambda Z)^T \overline{(\lambda Z)} = |\lambda|^2 Z^T \overline{Z} = |\lambda|^2 \left(\|P\|^2 + \|Q\|^2 \right).$$

  Par ailleurs, puisque la matrice U est réelle :

$$(\lambda Z)^T \overline{(\lambda Z)} = (UZ)^T \overline{(UZ)} = (UP + iUQ)^T (UP - iUQ) = (UP)^T (UP) + (UQ)^T (UQ) + 0 = \|UP\|^2 + \|UQ\|^2.$$

  Il vient

$$\boxed{\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 = |\lambda|^2 \left(\|P\|^2 + \|Q\|^2 \right).}$$

  Or $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$, donc $\|UP\| \leq r\|P\|$ et $\|UQ\| \leq r\|Q\|$. Il vient

$$|\lambda|^2 \left(\|P\|^2 + \|Q\|^2 \right) = \|UP\|^2 + \|UQ\|^2 \leq r^2 \|P\|^2 + r^2 \|Q\|^2 = r^2 \left(\|P\|^2 + \|Q\|^2 \right).$$

  D'où $|\lambda|^2 \leq r^2$ et $\boxed{|\lambda| \leq r.}$

Q 45. L'endomorphisme u vérifie $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$ donc $\det(u) = 1$. Ainsi sa matrice U vérifie $\det(U) = 1$.
D'après **Q 44**, on a $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(U),\ |\lambda| \leq r$.
Par trigonalisation de U dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(U)$ est le produit des valeurs propres complexes de U, comptées avec multiplicité :

$$1 = |\det(U)| = \left| \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(U)} \lambda \right| = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(U)} |\lambda| \leq \prod_{k=1}^{2m} r = r^{2m}.$$

Donc $1 \leq r^{2m}$. Supposons par l'absurde que $0 < r < 1$, alors $r^{2m} \leq r < 1$, ce qui est absurde. D'où $\boxed{1 \leq r.}$

Q 46. Soit $r > 0$.

- D'après **Q 45**, s'il existe $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)$, alors $1 \leq r$.
- Réciproquement, supposons que $1 \leq r$. Posons $\boxed{u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2m}} \in SL(\mathbb{R}^{2m}).}$
  Alors $u(B^{2m}(1)) = B^{2m}(1) \subset B^{2m}(r)$ car $1 \leq r$.

$\boxed{\text{Pour } r > 0, \quad (\text{il existe } u \in SL(\mathbb{R}^{2m}) \text{ tel que } u(B^{2m}(1)) \subset B^{2m}(r)) \quad \Leftrightarrow \quad (1 \leq r).}$

Q 47. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$.
D'après la question **Q 15**, un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ est symplectique si et seulement si sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est symplectique.
ψ est un endomorphisme symplectique, donc sa matrice M dans $\mathcal{B}$ est symplectique : $M \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$.
D'après la question **Q 16**, $\mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition, d'où $M^T \in \mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$.
Donc ψ^T, qui est de matrice M^T dans $\mathcal{B}$, est un endomorphisme symplectique.
En particulier, on a :

$$b_s(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1)) = b_s(e_1, f_1) =< e_1, j(f_1) >=< e_1, -e_1 >= -\|e_1\|^2 = -1.$$

Ainsi $\boxed{\left|b_s(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1))\right| = 1.}$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$1 = \left|b_s(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1))\right| = \left| < \psi^T(e_1), j(\psi^T(f_1)) > \right| \leq \|\psi^T(e_1)\| \; \|j(\psi^T(f_1))\| = \|\psi^T(e_1)\| \; \|\psi^T(f_1)\|.$$

En effet, l'endomorphisme j conserve la norme, car $J^T J = I_{2m}$ donc $J \in O_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale.
Supposons par l'absurde que $\|\psi^T(e_1)\| < 1$ et $\|\psi^T(f_1)\| < 1$.
Alors $1 \leq \|\psi^T(e_1)\| \; \|\psi^T(f_1)\| < 1$, ce qui est absurde.
D'où $\boxed{\|\psi^T(e_1)\| \geq 1 \text{ ou } \|\psi^T(f_1)\| \geq 1.}$

Q 48. D'après la question **Q 47**, on a $\|\psi^T(e_1)\| \geq 1$ ou $\|\psi^T(f_1)\| \geq 1$.
On a $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ de coordonnées respectives X et Y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$< \psi(x), y >= (MX)^T Y = X^T M^T Y =< x, \psi^T(y) > .$$

- **Premier cas : on suppose que $\|\psi^T(e_1)\| \geq 1$.**
  Posons $v = \dfrac{1}{\|\psi^T(e_1)\|}\psi^T(e_1)$. Alors $\|v\| = 1$, donc $v \in B^{2m}(1)$ et $\psi(v) \in Z^{2m}(r)$. Ainsi

$$< \psi(v), e_1 >^2 + < \psi(v), f_1 >^2 \leq r^2.$$

  On obtient

$$r^2 \quad \geq \quad < \psi(v), e_1 >^2 \quad = \quad < v, \psi^T(e_1) >^2 \quad = \quad \|\psi^T(e_1)\|^2 \quad \geq \quad 1.$$

  Donc $1 \leq r$.

- **Deuxième cas : on suppose que $\|\psi^T(f_1)\| \geq 1$.**
  Posons $v = \dfrac{1}{\|\psi^T(f_1)\|}\psi^T(f_1)$. Alors $\|v\| = 1$, donc $v \in B^{2m}(1)$ et $\psi(v) \in Z^{2m}(r)$. Ainsi

$$< \psi(v), e_1 >^2 + < \psi(v), f_1 >^2 \leq r^2.$$

  On obtient

$$r^2 \quad \geq \quad < \psi(v), f_1 >^2 \quad = \quad < v, \psi^T(f_1) >^2 \quad = \quad \|\psi^T(f_1)\|^2 \quad \geq \quad 1.$$

  Donc $1 \leq r$.

Dans les deux cas, on obtient $\boxed{1 \leq r.}$

Q 49. Soient $R > 0$ et $R' > 0$.

- On suppose qu'il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ tel que $\psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R')$. Par linéarité de ψ,

$$R\psi(B^{2m}(1)) = \psi(RB^{2m}(1)) = \psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R').$$

  Donc

$$\psi(B^{2m}(1)) \subset \frac{1}{R} Z^{2m}(R') = Z^{2m}\left(\frac{R'}{R}\right).$$

  D'après **Q 48**, puisque $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m})$ vérifie $\psi(B^{2m}(1)) \subset Z^{2m}(R'/R)$, on a $1 \leq \dfrac{R'}{R}$ donc $R \leq R'$.

- Réciproquement, supposons que $R \leq R'$. Posons $\boxed{\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2m}} \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m}).}$
  Soit $(x_1, \dots x_m, y_1, \dots y_m) \in B^{2m}(R)$, alors :

$$x_1^2 + \ldots + x_m^2 + y_1^2 + \ldots + y_m^2 \leq R^2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 \leq R^2 \leq (R')^2.$$

  D'où $\psi(B^{2m}(R)) = B^{2m}(R) \subset Z^{2m}(R')$.

$$\boxed{\text{Pour } R > 0 \text{ et } R' > 0, \quad (\text{il existe } \psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^{2m}) \text{ tel que } \psi(B^{2m}(R)) \subset Z^{2m}(R')) \quad \Leftrightarrow \quad (R \leq R').}$$