

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques I, option TSI, concours Centrale-Supélec 2006

Partie I

I.A.1)

$$\begin{aligned}
 & J =]-1, 1[\\
 & \forall r \in J, \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r} \\
 & \forall r \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^p r^n = \begin{cases} \frac{r^{p+1} - 1}{r - 1} & \text{si } r \neq 1 \\ p + 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

I.A.2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |2^{-nH} \cos(2^n x)| \leq 2^{-nH} = (2^{-H})^n$
 Or $H > 0$ et $0 < 2^{-H} < 1$; d'où $\sum 2^{-nH}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum 2^{-nH} \cos(2^n x) \text{ converge.}$$

I.A.3) L'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \cos(2^n(x + 2\pi)) = \cos(2^n x)$. D'où :

f est 2π -périodique.

L'on a $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-nH} = \frac{1}{1-2^{-H}}$ et :

$$M_1(H) = \frac{1}{1-2^{-H}}$$

I.A.4) Soit $t \in I^* = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}
 0 < |t| < \frac{1}{2} & \Rightarrow \ln |t| < -\ln 2 \\
 & \Rightarrow -\frac{\ln |t|}{\ln 2} > 1 \\
 & \Rightarrow E\left(-\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right) \geq 1.
 \end{aligned}$$

D'où :

$$N(t) \geq 1$$

En outre :
 $E\left(-\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right) \leq -\frac{\ln |t|}{\ln 2} < E\left(-\frac{\ln |t|}{\ln 2}\right) + 1$

Comme $u \rightarrow 2^{-u}$ est décroissante sur \mathbb{R} , on en déduit :

$$2^{-N(t)-1} \leq |t| \leq 2^{-N(t)}$$

La première des deux inégalités donne aussi :

$$2^{-N(t)} \leq 2|t|$$

$$\begin{aligned}
\text{I.A.5) a) } |z| &= |e^{ih} - 1 - ih| \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n h^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^n}{n!} \\
&\leq h^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|h|^{n-2}}{n!} \\
&\leq h^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|h|^n}{(n+2)!} \\
&\leq h^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|h|^n}{n!}
\end{aligned}$$

D'où :

$$|z| \leq h^2 e^{|h|}$$

b) $z = e^{i(a+h)} - e^{ia} - ih e^{ia}$ et $\operatorname{Re}(z) = \cos(a+h) - \cos(a) + h \sin(a)$. Comme :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \leq h^2 e^{|h|},$$

$$|\cos(a+h) - \cos(a) + h \sin(a)| \leq h^2 e^{|h|}$$

I.A.6) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$,

$$\begin{aligned}
&\left| S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} |[\cos(2^n(x+t)) - \cos(2^n x)] + t 2^n \sin(2^n x)|
\end{aligned}$$

En utilisant I.A.5.b) avec $a = 2^n x$ et $h = 2^n t$, on obtient :

$$\left| S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| \leq \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} 2^{2n} t^2 e^{2^n |t|}$$

Or si $n \leq N(t) - 1$, $2^n \leq 2^{N(t)-1}$.

En outre, d'après I.A.4) $2^{N(t)} \leq \frac{1}{|t|}$ et donc $2^n \leq \frac{1}{2|t|} \Rightarrow 2^n |t| \leq \frac{1}{2} \leq 1$.

D'où $e^{2^n |t|} \leq e$. Cela montre :

$$\left| S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| \leq e t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{(2-H)n}$$

- Pour $H \in]0, 2[$ et $t \in I^*$,

$$\begin{aligned}
e t^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} &= e t^2 \frac{2^{(2-H)N(t)} - 1}{2^{2-H} - 1} \text{ car } 2^{2-H} > 1 \\
&\leq e t^2 \frac{2^{(2-H)N(t)}}{2^{2-H} - 1} \\
&\leq \frac{e t^2}{|t|^{2-H}} \frac{1}{2^{2-H} - 1} \text{ car } 2^{N(t)} \leq \frac{1}{|t|} \\
&\leq \frac{e}{2^{2-H} - 1} |t|^H
\end{aligned}$$

D'où on peut prendre :

$$C_1(H) = \frac{e}{2^{2-H} - 1}$$

- Pour $H = 2$ et $t \in I^*$,

$$\begin{aligned} et^2 \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} &= et^2 N(t) \text{ car } 2^{2-H} = 1 \\ &\leq -et^2 \frac{\ln |t|}{\ln 2} \left(\text{car } 2^{N(t)} \leq \frac{1}{|t|} \text{ et } N(t) \leq -\frac{\ln |t|}{\ln 2} \right) \\ &\leq \frac{e}{\ln 2} t^2 \ln \frac{1}{|t|} \end{aligned}$$

D'où on peut prendre :

$$K = \frac{e}{\ln 2}$$

I.A.7) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$,

$$\begin{aligned} |T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)| &= \left| \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} [\cos(2^n(x+h)) - \cos(2^n x)] \right| \\ &\leq \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} |[\cos(2^n(x+h)) - \cos(2^n x)]| \\ &\leq 2 \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} \\ &\leq 2 \frac{(2^{-H})^{N(t)}}{1 - 2^{-H}} \\ &\leq \frac{2(2|t|)^H}{1 - 2^{-H}} \text{ car } 2^{-N(t)} \leq 2|t| \text{ (question I.A.4)} \\ &\leq \frac{2^{H+1}}{1 - 2^{-H}} |t|^H \end{aligned}$$

D'où on peut prendre :

$$C_2(H) = \frac{2^{H+1}}{1 - 2^{-H}}$$

I.B.1) $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$, $|2^{n(1-H)} \sin(2^n x)| \leq 2^{n(1-H)}$. Or $1 - H < 0$ et $0 < 2^{1-H} < 1$. Donc $\sum 2^{n(1-H)}$ converge et $\sum 2^{n(1-H)} \sin(2^n x)$ est absolument convergente. Donc :

g est définie sur \mathbb{R} .

On a en outre $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)} = \frac{1}{1 - 2^{1-H}}$ et :

$$M_2(H) = \frac{1}{1 - 2^{1-H}}$$

I.B.2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$,

$$\begin{aligned} |l(t)| &= \left| \frac{S_{N(t)}(x+t) + T_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) - T_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x)}{t} \right| \\ &\leq \left| \frac{S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x)}{t} \right| + \left| \frac{T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)}{t} \right| \end{aligned}$$

* Pour $H < 2$, $|l(t)| \leq C_1(H) \frac{|t|^H}{t} + C_2(H) \frac{|t|^H}{t}$ (d'après I.A.6) et I.A.7)) qui tend vers 0 quand t tend vers 0 car $H - 1 > 0$.

* Pour $H = 2$, $|l(t)| \leq Kt \ln \frac{1}{|t|} + C_2(2)t$ (d'après I.A.6) et I.A.7)) qui tend vers 0 quand t tend vers 0.

D'où :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} l(t) = 0}$$

I.B.3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in I^*$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - g(x) \right| &= \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \left(- \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right) \right| \\ &= \left| l(t) + \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right| \end{aligned}$$

Or $2^{-N(t)} \leq 2|t| \Rightarrow N(t) \geq \left(-\ln 2 + \ln \frac{1}{|t|} \right) \times \frac{1}{\ln 2}$. D'où $\lim_{t \rightarrow 0} N(t) = +\infty$ et

$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) = 0$. L'on en déduit, en utilisant I.B.2), que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \left(- \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)} \sin(2^n x) \right) = 0.$$

On a montré que f est dérivable en tout point de \mathbb{R} et que $f' = g$.

I.B.4) a) L'on sait que $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(px) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi & \text{(si } n = p \neq 0) \\ 2\pi & \text{(si } n = p = 0) \end{cases}$

f est continue, 2π -périodique et paire. Ses coefficients de Fourier sont donc :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-pH} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) dx \\ &= 0 \quad (2^p \text{ est un entier } > 0) \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} * \quad a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-pH} \int_0^{2\pi} \cos(2^p x) \cos(nx) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \forall q \in \mathbb{N}, n \neq 2^q \\ 2^{-qH} & \text{si } \exists q \in \mathbb{N}, n = 2^q \end{cases} \end{aligned}$$

* $b_n(f) = 0$ puisque f est paire.

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall q \in \mathbb{N}, n \neq 2^q \\ 2^{-qH} & \text{si } \exists q \in \mathbb{N}, n = 2^q \end{cases} \quad \text{et } b_n(f) = 0}$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=0}^{2^n} a_p(f) \cos(px) = \sum_{p=0}^n a_{2^p}(f) \cos(2^p x) \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{p=0}^{2^n} a_p(f) \cos(px) = \sum_{p=0}^n 2^{-pH} \cos(2^p x)} \\ \text{(somme partielle de rang } n \text{ de la série numérique qui définit } f(x))$$

c) f est C^1 sur \mathbb{R} puisque g est continue sur \mathbb{R} . Elle est 2π -périodique. Le théorème de Dirichlet permet donc d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la somme partielle de la série de Fourier de f en x converge vers $f(x)$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{2^n} a_p(f) \cos(px) = f(x)$$

I.B.5) a) f est continue par morceaux et 2π périodique : la formule de Parseval s'applique.

On obtient que $a_0(f)^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(f)^2}{2}$ converge et a pour somme $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$.

$$\text{D'où } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2nH}}{2} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2nH} = \frac{\pi}{1 - 2^{-2H}}$$

L'on en déduit :

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{\pi}{1 - 2^{-2H}}$$

b) D'après la question précédente,

$$\frac{\pi}{1 - 2^{-2H}} = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| M_1(H) dx \leq \frac{1}{1 - 2^{-H}} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx. \text{ D'où :}$$

$$\frac{\pi}{1 + 2^{-H}} \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

A vrai dire, on peut faire mieux :

$$a_{2^0}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(2^0 x) dx \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \Rightarrow$$

$$\pi \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

$$\begin{aligned} \text{I.C.1) } f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n} \cos\left(2^n \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{16} \cos \pi + \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-2n} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sin\left(2^n \frac{\pi}{4}\right) \\ &= - \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \quad (\text{car } \sin k\pi = 0 \text{ pour } k \text{ entier}) \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n} \cos\left(2^n \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= \cos \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{16} \cos 3\pi + \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-2n} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \times \frac{4}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{24} \\
g\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \sin\left(2^n \frac{3\pi}{4}\right) \\
&= -\sin \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} \quad (\text{car } \sin k\pi = 0 \text{ pour } k \text{ entier}) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

D'où :

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{24}$
$g\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$
$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{24}$
$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

I.C.2) a) La calculatrice montre que φ atteint son minimum sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ en $\frac{3\pi}{4}$ et que celui-ci est égal à 0.207 à 10^{-3} près par défaut.

$$b) \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], |g(x) + \varphi(x)| = \left| \sum_{n=4}^{+\infty} 2^{-n} \sin(2^n x) \right| \leq \sum_{n=4}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{2^{-4}}{1-2^{-1}} = \frac{1}{8}$$

D'où :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], |g(x) + \varphi(x)| \leq \frac{1}{8}$$

c) On en déduit que $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], g(x) < -\varphi(x) + 0.125 < -0.207 + 0.125 = -0.082$. D'où :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], g(x) < 0$$

I.C.3) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{24} > 0$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{24} < 0$; or f est continue sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (elle est même C^1); d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

En outre, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], f'(x) = g(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et elle ne s'y annule qu'au plus une fois.

Donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

I.D.1) Définissons ψ par $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \psi(x) = 1 - \cos(x) - \frac{x^2}{4}$.

ψ est alors C^∞ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\psi'(x) = \sin(x) - \frac{x}{2} \geq \frac{2x}{\pi} - \frac{x}{2} = \frac{x(4-\pi)}{2\pi} \geq 0$.
On en déduit le tableau de variations de ψ :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\psi'(x)$	0	+
$\psi(x)$	0	$\nearrow 1 - \frac{\pi^2}{16}$

D'où :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 1 - \cos(x) \geq \frac{x^2}{4}$$

$$\text{I.D.2) } \forall t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, |S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)| = \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} (1 - \cos(2^n t))$$

Or $0 \leq n \leq N(t) - 1$ et $0 \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2^n t \leq \frac{1}{2}$ (vu dans I.A.6), ce qui montre $0 \leq 2^n t \leq \frac{\pi}{2}$

D'où :

$$\begin{aligned} |S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)| &\geq \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH} \frac{2^{2nt^2}}{4} \\ &\geq \frac{t^2}{4} \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} \\ &\geq \frac{t^2}{4} \frac{2^{N(t)(2-H)} - 1}{2^{2-H} - 1} \end{aligned}$$

Or $2^{N(t)} \geq \frac{1}{2t}$. D'où :

$$\begin{aligned} |S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)| &\geq \frac{t^2}{4} \frac{2^{H-2} t^{H-2} - 1}{2^{2-H} - 1} \\ &\geq \frac{2^{H-2}}{4(2^{2-H} - 1)} (t^H - t^2 2^{2-H}) \end{aligned}$$

et on peut poser :

$$C_3(H) = \frac{2^{H-2}}{4(2^{2-H} - 1)}$$

$$\text{I.D.3) } \forall t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) = \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} \underbrace{(1 - \cos(2^n t))}_{\geq 0}. \text{ D'où :}$$

$$\forall t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[, T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) \geq 0$$

$$\text{I.D.4) } \forall t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[,$$

$$\begin{aligned} \frac{f(0) - f(t)}{t} &= \frac{S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t) + T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t)}{t} \\ &\geq \frac{S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t)}{t} \\ &\geq C_3(H) (t^{H-1} - t^{2-H}) \end{aligned}$$

Or $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{H-1} = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{2-H} = 0$ et $C_3(H) > 0$. D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0) - f(t)}{t} = +\infty$$

Partie II

II.A.1) f est évidemment C^∞ sur \mathbb{R}^2 .

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)f(x, y) = (2ax + by + a')f(x, y) \text{ et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)f(x, y) = (bx + 2cy + b')f(x, y). \text{ D'où :}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2ax + by + a')f(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (bx + 2cy + b')f(x, y)$$

Comme f ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 ,

les dérivées partielles de f s'annulent aux mêmes points que celles de Q .

II.A.2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x, y)f(x, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\right)^2 f(x, y) = (2a + (2ax + by + a')^2) f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x, y)f(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)f(x, y) \\ &= (b + (2ax + by + a')(bx + 2cy + b')) f(x, y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x, y)f(x, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)\right)^2 f(x, y) = (2c + (bx + 2cy + b')^2) f(x, y). \text{ D'où :}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (2a + (2ax + by + a')^2) f(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (b + (2ax + by + a')(bx + 2cy + b')) f(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (2c + (bx + 2cy + b')^2) f(x, y) \end{cases}$$

En un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$, l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x, y)f(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x, y)f(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x, y)f(x, y) \end{aligned}$$

II.A.3) En un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ correspondant à un extremum local, les dérivées partielles de f , donc de Q sont nulles. On alors :

$\exists \varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f(x_0, y_0) +$

$$\frac{1}{2} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] +$$

$$((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\varepsilon(x, y) \text{ et } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x, y) = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}
T_2(f)(x, y) &= \underbrace{f(x_0, y_0)}_{>0} \\
&\times \frac{1}{2} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] \\
&= \underbrace{f(x_0, y_0) T_2(Q)(x, y)}_{>0}
\end{aligned}$$

Après avoir montré que les points critiques f et Q sont les mêmes, on s'aperçoit que les sommes $T_2(f)(x, y)$ et $T_2(Q)(x, y)$ des termes de rang 2 des développements de Taylor-Young de f et Q en ces points critiques sont de même signe.

Les extrémums locaux de f et Q sont donc de même nature.

II.B.1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) = x + \frac{2y}{3} - \frac{5}{3}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{3} - 2y + \frac{11}{3}.$$

Les points critiques sont solutions de :

$$\begin{cases} x + \frac{2y}{3} - \frac{5}{3} = 0 \\ \frac{2x}{3} - 2y + \frac{11}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{11} \\ y = \frac{11}{22} \end{cases}$$

En utilisant les notations de Monge au point critique, $r = 1$, $s = \frac{2}{3}$ et $t = -2$.

D'où $rt - s^2 = -2 - \frac{4}{9} < 0$. Donc :

f_1 n'admet pas d'extrémum.

II.B.2) Comme $f_2(x, y) = 2 \exp Q_2(x, y)$, on peut utiliser les résultats de II.A.3). $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{19}{10}, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{5} + \frac{1}{10}.$$

Les points critiques sont solutions de :

$$\begin{cases} 2x - \frac{19}{10} = 0 \\ \frac{y}{5} + \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{20} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En utilisant les notations de Monge au point critique, $r = 2$, $s = 0$ et $t = \frac{1}{5}$.

D'où $rt - s^2 = \frac{2}{5} > 0$. Comme en outre, $r > 0$:

f_2 admet un minimum local en $\left(\frac{19}{20}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{De plus } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad Q_2(x, y) = \left(x - \frac{19}{20}\right)^2 + \frac{1}{10} \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{251}{400},$$

ce qui montre que ce minimum est global.

$$\begin{aligned}
\text{II.B.3) } Q_1(x, 2x) = Q_2(x, 2x) &\Leftrightarrow -\frac{13x^2}{6} + \frac{17x}{3} - \frac{7}{2} = \frac{7x^2}{5} - \frac{17x}{10} + \frac{3}{10} \quad ; \\
&\Leftrightarrow 107x^2 - 221x + 114 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 1) \left(x - \frac{114}{107}\right) = 0 \text{ (solution évidente)}
\end{aligned}$$

On en déduit que, sur la droite d'équation $y = 2x$, Q_1 et Q_2 prennent des valeurs égales en

$$\boxed{(1, 2)} \text{ et } \boxed{\left(\frac{114}{107}, \frac{228}{107}\right)}.$$

II.C.1) $Q_1(1, 2) = Q_2(1, 2) = 0$. D'où $f_1(1, 2) = 1$ et $f_2(1, 2) = 2$. D'où :

$$F(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

II.C.2) f_1 étant C^1 sur \mathbb{R}^2 , le plan tangent à la surface d'équation $z = f_1(x, y)$ au point de coordonnées $(1, 2, 1)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} z &= f_1(1, 2) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \Leftrightarrow \\ z &= 1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x}(1, 2)f_1(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial Q_1}{\partial y}(1, 2)f_1(1, 2)(y - 2) \Leftrightarrow \\ z &= 1 + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{10}{3}(y - 2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$z = \frac{2}{3}x - \frac{10y}{3} + 7$$

De même, le plan tangent à la surface d'équation $z = f_2(x, y)$ au point de coordonnées $(1, 2, 2)$ a pour équation :

$$\begin{aligned} z &= f_2(1, 2) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2)(y - 2) \Leftrightarrow \\ z &= 2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x}(1, 2)f_2(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial Q_2}{\partial y}(1, 2)f_2(1, 2)(y - 2) \Leftrightarrow \\ z &= 2 + \frac{1}{5}(x - 1) + y - 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$z = \frac{x}{5} + y - \frac{1}{5}$$

II.C.3) f_1 et f_2 étant C^1 sur \mathbb{R}^2 , F l'est aussi et

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 2) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

△△△

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI

Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc

Tel. 0296639414

Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr