

Exercice

1. Il suffit de réduire la forme quadratique dans une base orthonormale qu'on choisira directe.

Sa matrice dans la base départ est : $M = \begin{pmatrix} 3 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est : $P_M(\lambda) = \lambda^2 - 18\lambda - 36 = (\lambda - 18)(\lambda + 2)$

Les deux valeurs propres sont 18 et -2, simples. Les sous-espace propres sont de dimension 1 et orthogonaux.

Dans une base orthonormale directe de vecteurs propres, pris dans l'ordre des valeurs propres 18 puis -2, la forme quadratique est : $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy = 18X^2 - 2Y^2$.

L'équation de $\mathcal{H}$ devient donc, dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$: $18X^2 - 2Y^2 = 2$, ou encore, $9X^2 - Y^2 = 1$.

2. $9X^2 - Y^2 = 1$ s'écrit encore $\frac{X^2}{(1/3)^2} - \frac{Y^2}{1^2} = 1$.

C'est une hyperbole : $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, et l'excentricité : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}$.

3. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, il a la même équation dans tous les repères orthonormaux centrés à l'origine.

Dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, son équation est donc : $X^2 + Y^2 = 1$.

4. On travaille dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

$\mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ est formé de l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} 9X^2 - Y^2 = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

Ajouter ces deux équations donne $5X^2 = 1$, ou $X^2 = \frac{1}{5}$, on réinjecte ce résultat dans la seconde pour obtenir $Y^2 = \frac{4}{5}$.

Ces deux dernières équation forment un système équivalent au système de départ.

Ceci donne 4 points $A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $C\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ et $D\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

5. On a $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ et $\overrightarrow{DC}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est un parallélogramme.

D'autre part $\overrightarrow{AD}\left(0, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, c'est un rectangle.

Son aire est le produit des longueurs des cotés : $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{4}{\sqrt{5}}$, l'aire est donc : $\frac{8}{5}$.

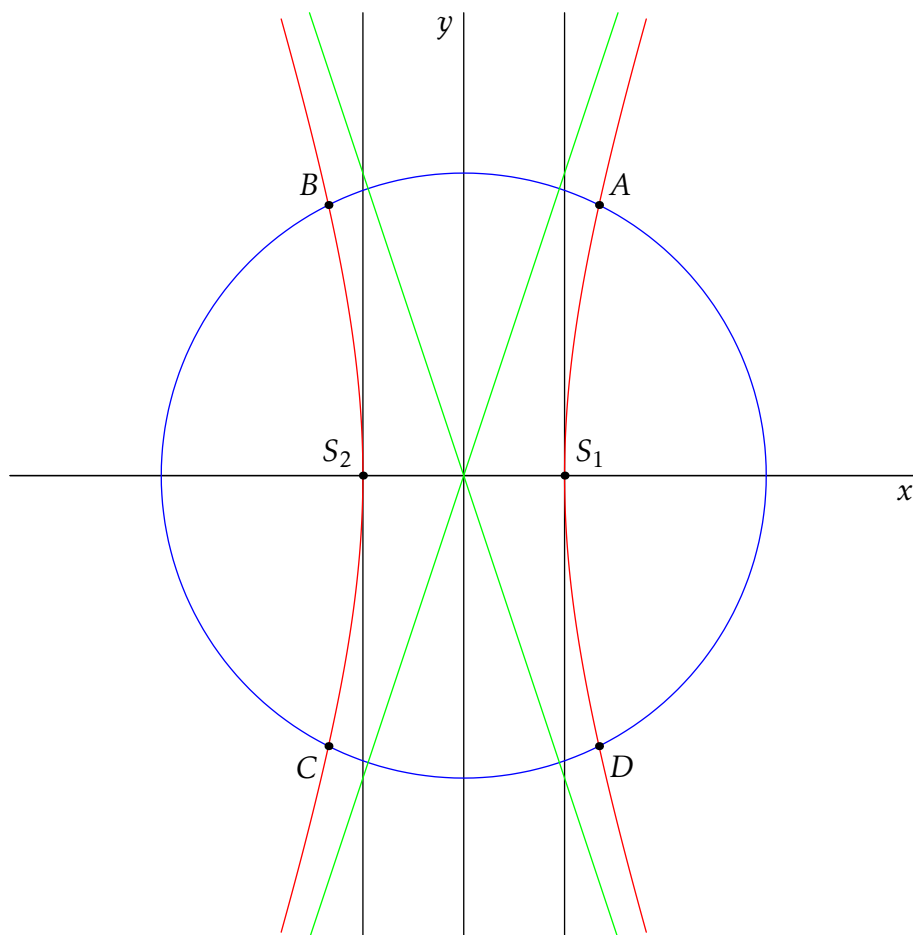
6. Les sommets sont : $S_1\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ et $S_2\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Les asymptotes s'obtiennent par $9X^2 - Y^2 = 0$, ce sont les droites $\mathcal{D}_1$ d'équation $Y = 3X$, et $\mathcal{D}_2$ d'équation $Y = -3X$.

Les tangentes aux sommets sont les droites $\mathcal{T}_1$ d'équation $X = \frac{1}{3}$, et $\mathcal{T}_2$ d'équation $X = -\frac{1}{3}$.

7. Le graphe

Le cercle étant le cercle trigonométrique, on n'a pas reporté les vecteurs unitaires.



Problème

Partie A

1. Clairement, la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ convient.
2. $\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = 1$, $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, et, $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = 1$, la matrice est bien stochastique.
3. On admet qu'on veut la valeur exacte de X et que le module *linalg* est chargé.

Initialisation des variables :

```
X0:=vector([1/2,1/2,0]);A0:=matrix([[7/10,2/5,1/2],[3/10,0,1/10],[0,3/5,2/5]]);
```

La procédure elle-même :

```
CCP:=proc(A0,X0,n)
local A,X,p;
A:=A0;X:=X0;
for p from 1 to n do
  X:=A&*X
od;
X
end;
```

Appel de la procédure :

CCP(A0,X0,2010) ;

qui « donne » le résultat.

$$4. \operatorname{Tr}(A) = \frac{7}{10} + \frac{2}{5} = \frac{11}{10},$$

tandis que, en développant selon la première colonne :

$$\det(A) = -\frac{21}{500} - \frac{3}{10} \left(\frac{4}{25} - \frac{3}{10} \right) = \frac{-21 - 24 + 45}{500} = 0$$

Son déterminant est nul, donc A n'est pas inversible.

$$5. {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{Et donc : } {}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc propre pour tA et la valeur propre 1.

C'est d'ailleurs une propriété de toutes les matrices stochastiques.

6. (a) $\det({}^t(M - \lambda I_3)) = \det(M - \lambda I_3)$, car une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

On a bien tM et M qui ont le même polynôme caractéristique.

- (b) Le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$, donc M admet 3 valeurs propres distinctes ou confondues.

Par théorème, quand le polynôme caractéristique est scindé, la trace est la somme des valeurs propres : $\operatorname{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

7. • Le déterminant est nul, donc 0 est valeur propre de A .

• 1 est valeur propre de tA , donc de A .

• La trace vaut $\frac{11}{10}$, donc la dernière valeur propre est : $\frac{11}{10} - 0 - 1 = \frac{1}{10}$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$, simple, $\lambda_2 = \frac{1}{10}$, simple, et, $\lambda_3 = 0$, simple aussi.

8. A est donc diagonalisable, il existe donc P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

P est constitué en colonne de vecteurs propres de A pour, respectivement, les valeurs propres 1, $1/10$ et 0.

Il nous faut donc :

– Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 1.

– Trouver a tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre $1/10$.

- Trouver b tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$ est propre pour la valeur propre 0.

Ceci se fait facilement :

- *Premier vecteur propre*

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Second vecteur propre*

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}a - \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5}a - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$$

Pour $a = 1$, le dernier vecteur vaut $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$a = 1$ convient donc.

- *Troisième vecteur propre*

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{b}{2} \\ \frac{3}{10} + \frac{b}{10} \\ \frac{6}{5} + \frac{2b}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $b = -3$, le dernier vecteur vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b = -3$ convient donc.

On a la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ qui est telle que $P^{-1}AP = D$.

9. On peut inverser la matrice à la calculatrice ou en inversant le système : $\begin{cases} 3x + y + z = X \\ x + y + 2z = Y \\ x - 2y - 3z = Z \end{cases}$

On fait $L_1 + L_2 + L_3 \rightarrow L_1$, $L_1 - 3L_2 \rightarrow L_2$ et $L_2 - L_3 \rightarrow L_3$,

on a bien un système équivalent : $\begin{cases} 5x = X + Y + Z \\ -2y - 5z = X - 3Y \\ 3y + 5z = Y - Z \end{cases}$

Maintenant, $L_2 + L_3 \rightarrow L_2$ donne : $\begin{cases} 5x = X + Y + Z \\ y = X - 2Y - Z \\ 3y + 5z = Y - Z \end{cases}$

Enfin, $L_3 - 3L_2 \rightarrow L_3$ puis $5L_2 \rightarrow L_2$ donne :
$$\begin{cases} 5x = X + Y + Z \\ 5y = 5X - 10Y - 5Z \\ 5z = -3X + 7Y + 2Z \end{cases}$$

Ce qui prouve que $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

10. Vérification initiale

Pour $n = 0$, $D^0 = I_3$, donc $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ et enfin $PD^0P^{-1}X_0 = X_0$, le résultat est vérifié.

Hérédité

On admet le résultat au rang n , on le montre au rang $n + 1$.

$$X_{n+1} = AX_n = PDP^{-1}X_n = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = PD^nP^{-1}X_0$$

$$11. \quad (a) \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } X_n = \frac{1}{5}PD^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -10 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}PD^n \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}P \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-5}{10^n} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-5}{10^n} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 - \frac{5}{10^n} \\ 2 - \frac{5}{10^n} \\ 2 + \frac{10}{10^n} \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \frac{1}{10} \left(6 - \frac{5}{10^n} + 2 - \frac{5}{10^n} + 2 + \frac{10}{10^n} \right) = 1,$$

de plus, pour $n \geq 1$, ses coordonnées sont positives, le vecteur X_n est bien stochastique.

$$12. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \left(6 - \frac{5}{10^n} \right) = \frac{3}{5}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \left(2 - \frac{5}{10^n} \right) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10} \left(2 + \frac{5}{10^n} \right) = \frac{1}{5}$$

Les trois suites des coordonnées convergent bien.

$$13. \quad \text{Donc } L = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$, de plus, ses coordonnées sont positives, ce vecteur est bien stochastique.

Il est aussi colinéaire au premier vecteur colonne de P , donc propre pour la valeur propre 1.

Partie B

1. A est une matrice 2×2 , stochastique, de première ligne (a, b) , sa deuxième ligne est donc $(1 - a, 1 - b)$.

Comme tous ses termes doivent être positifs, on a $a \geq 0$ et $1 - a \geq 0$, c'est à dire $a \in [0, 1]$, et on a aussi $b \geq 0$ et $1 - b \geq 0$, c'est à dire $b \in [0, 1]$.

Il existe bien a et b dans $[0, 1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

2. Vérification initiale

X_0 est stochastique par hypothèse.

Hérédité

On suppose X_n stochastique, on montre que X_{n+1} est aussi stochastique.

$$X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} ax_n + by_n \\ (1-a)x_n + (1-b)y_n \end{pmatrix}$$

Tous les nombres intervenant dans le calcul des coordonnées de X_{n+1} sont positifs, donc ses coordonnées sont positives.

De plus $ax_n + by_n + (1-a)x_n + (1-b)y_n = x_n + y_n = 1$, X_{n+1} est bien stochastique.

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est stochastique.

3. $\text{Tr}(A) = a + (1-b) \in [0, 2]$ puisque chaque terme est dans $[0, 1]$.

4. (a) Si $\text{Tr}(A) = 0$, alors $a = 0$ et $(1-b) = 0$, c'est à dire $b = 1$. Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Par récurrence élémentaire, $A^{2n} = I_2$, et, $A^{2n+1} = A$,

et toujours par récurrence élémentaire, $X_n = A^n X_0$, ce qui prouve que $X_{2n+1} = X_1$ et $X_{2n} = X_0$.

Dans ce cas, la suite (X_n) est périodique de période 2.

- (b) Si $\text{Tr}(A) = 2$, alors $a = 1$ et $(1-b) = 1$, c'est à dire $b = 0$.

Alors $A = I_2$ et la suite (X_n) est clairement constante égale à X_0 .

5. Si $\text{Tr}(A) \in]0, 2[$, alors $0 < a + (1-b) < 2$, ce qui équivaut à $-1 < a - b < 1$.

6. (a) $AV = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ (1-a)-(1-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (a-b)V$

V est propre pour A et la valeur propre $q = a - b$.

- (b) $-1 < a - b < 1 \Leftrightarrow |a - b| < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$

7. $\text{Tr}(A) = 1 + a - b$ est la somme des valeurs propres.

La seconde valeur propre est donc 1, distincte de q .

8. A possède donc deux valeurs propres simples et est donc diagonalisable.

9. 1 est valeur propre de A , donc, il existe un vecteur propre U associé.

(U, V) forme donc une base de $\mathbb{R}^2$, donc il existe μ et λ tels que $X_0 = \mu U + \lambda V$.

On pose $L = \mu U$, $L \in \text{Vect}(U)$ entraîne $AL = L$, avec : $X_0 = L + \lambda V$.

10. Vérification initiale

Pour $n = 0$, $X_0 = L + \lambda V = L + q^0 \lambda V$

Hérédité

On l'admet au rang n . Alors $X_{n+1} = AX_n = A(L + q^n \lambda V) = AL + q^n \lambda AV = L + q^n \lambda q V = L + q^{n+1} \lambda V$.

Conclusion

On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = L + q^n \lambda V$.

11. $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x + q^n \lambda \\ l_y + q^n \lambda \end{pmatrix}$.

Or $q^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ car $|q| < 1$, d'où, $x_n \rightarrow l_x$ et $y_n \rightarrow l_y$ quand $n \rightarrow +\infty$.

12. $X_0 = \begin{pmatrix} l_x + \lambda \\ l_y - \lambda \end{pmatrix}$ est stochastique, donc $(l_x + \lambda) + (l_y - \lambda) = l_x + l_y = 1$.

Donc L est stochastique.

Contrairement à ce que dit l'énoncé, on n'a pas besoin du B.2.

13. L est stochastique, donc non nul. Comme $AL = L$, L est donc propre pour la valeur propre 1, et enfin une base du sous-espace propre associé puisque celui-ci est de dimension 1.

Si $AT = T$, alors $T = kL = \begin{pmatrix} kl_x \\ kl_y \end{pmatrix}$.

Comme T est stochastique, $kl_x + kl_y = 1$, mais $kl_x + kl_y = k(l_x + l_y) = k$.

Ce qui donne $k = 1$ et $T = L$.

Partie C

1. A n'est pas inversible, elle n'est donc pas de rang 2.

A est stochastique, donc non nulle, et n'est donc pas de rang 0.

A est donc de rang 1.

2. On se souvient que les valeurs propres étaient 1 et $a - b$, ici comme 0 est valeur propre, c'est 1 et 0.

Donc $a = b$, et si on appelle cette quantité α , qui appartient donc à $[0, 1]$, alors : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$.

3. Un calcul simple donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha) & \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha) \\ (1 - \alpha)\alpha + (1 - \alpha)^2 & (1 - \alpha)\alpha + (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 - \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix} = A$$

4. On montre ce résultat par récurrence.

On a $X_1 = AX_0$, et si on admet que $X_n = AX_0$ pour $n \geq 1$, alors : $X_{n+1} = AX_n = A(AX_0) = A^2X_0 = AX_0$.

Ce qui donne : $X_{n+1} = aX_0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. $A^2 = A$ nous donne $f \circ f = f$, c'est à dire que f est un projecteur.

C'est même une équivalence.

6. Le noyau et l'image sont de dimension 1, l'image à cause du rang et le noyau par application du théorème du rang.

La recherche du noyau de f conduit aux équations :
$$\begin{cases} \alpha(x + y) = 0 \\ (1 - \alpha)(x + y) = 0 \end{cases}$$

$\ker(f)$ est donc d'équation : $x + y = 0$.

$\text{Im}(f)$ est engendrée par $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$, c'est donc la droite vectorielle d'équation : $(1 - \alpha)x - \alpha y = 0$.

7. On aura une projection orthogonale si et seulement si ce noyau et cette image sont orthogonaux, c'est à dire $(1 - \alpha) - \alpha = 0$, ou encore $\alpha = \frac{1}{2}$.

8. $A \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\cos \theta + \sin \theta) \\ (1 - \alpha)(\cos \theta + \sin \theta) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4) \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$

La base étant orthonormale, on en déduit :

$$\begin{aligned} \|f(\vec{u}(\theta))\|^2 &= 2 \sin^2(\theta + \pi/4) (\alpha^2 + (1 - \alpha)^2) = \sin^2(\theta + \pi/4) (4\alpha^2 - 4\alpha + 2) \\ &= \sin^2(\theta + \pi/4) ((2\alpha^2 - 1)^2 + 1). \end{aligned}$$

9. $\vec{u}(\theta) = \vec{i}$ donne $\theta = 0$.

$$\text{Donc : } \|f(\vec{i})\|^2 = \frac{1}{2} ((2\alpha^2 - 1)^2 + 1) = \frac{(2\alpha^2 - 1)^2 + 1}{2}.$$

$$\text{Et enfin : } \frac{\|f(\vec{i})\|}{\|\vec{i}\|} = \sqrt{\frac{(2\alpha^2 - 1)^2 + 1}{2}}.$$

Notons que $(\vec{i} + \vec{j})$ est propre pour la valeur propre 1, donc $\frac{\|f(\vec{i} + \vec{j})\|}{\|\vec{i} + \vec{j}\|} = 1$.

10. ($\Rightarrow$) Si f est une projection orthogonale, alors, $\alpha = 1/2$ et $\left\|f\left(\vec{u}(\theta)\right)\right\|^2 = \sin^2(\theta + \pi/4)$.

En appelant θ l'argument d'un vecteur $\vec{x}$, on obtient $\left\|f\left(\vec{x}\right)\right\|^2 = \sin^2(\theta + \pi/4) \left\|\vec{x}\right\|^2$,

ce qui implique bien $\left\|f\left(\vec{x}\right)\right\| \leq \left\|\vec{x}\right\|$.

($\Leftarrow$) Si $\alpha \neq 1/2$, pour $\theta = \pi/4$, $\left\|f\left(\vec{u}(\theta)\right)\right\|^2 > 1 = \left\|\vec{u}(\theta)\right\|^2$.

On a bien l'équivalence demandée.