

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectifs

Soit une application linéaire U d'un espace vectoriel euclidien E dans un espace vectoriel euclidien F . À partir d'une résolution généralisée de l'équation $Ux = y$ où y est donné dans F , on se propose d'associer à U une application linéaire V de F dans E possédant certaines propriétés de l'inverse d'une application linéaire.

Lorsque U est injective mais non surjective, le remplacement de y par sa projection orthogonale sur l'image de U conduit à la définition de l'inverse à gauche de U ; son étude est faite dans la première partie.

Lorsque U est surjective, mais non injective, on distingue dans l'infinité de solutions de $Ux = y$ celle de norme minimum, ce qui conduit à la définition d'une inverse à droite de U ; son étude est faite dans la deuxième partie.

La troisième partie est consacrée au cas général.

Les espaces vectoriels euclidiens E et F sont les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement munis de leurs bases canoniques, de leurs produits scalaires canoniques notés $(\cdot|\cdot)_E$ et $(\cdot|\cdot)_F$, et des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ induites par ceux-ci.

On identifiera applications linéaires et matrices associées, vecteurs et matrices colonnes. Si A est une matrice, tA désigne sa transposée. L'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}$. Grâce à l'identification faite, cette notation désignera donc ainsi l'ensemble des applications linéaires de E dans F . Ainsi, désormais, on utilisera indifféremment les termes de matrice et d'application linéaire.

On rappelle que, sous les conditions d'identifications précédentes, le produit scalaire $(Ax|y)_F$ s'écrit sous forme matricielle ${}^t y Ax$ ou ${}^t x {}^t A y$ où ${}^t y$ et ${}^t x$ désignent respectivement les transposées des colonnes x et y de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. L'orthogonal d'un sous-espace E' de E est noté $E'^\perp$. On rappelle alors que $E' \oplus E'^\perp = E$ et cette somme directe est dite orthogonale.

On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_{n,n}$.

PARTIE I - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE À GAUCHE POUR A

Dans cette première partie, la matrice A , élément de $\mathcal{M}_{m,n}$ est supposée de rang n .

On désigne par P le projecteur orthogonal dans $F = \mathbb{R}^m$ sur le sous-espace $\text{Im } A$.

On suppose $m > n$ sauf dans la question 3° b).

1. Propriété d'inversibilité et de transposition

- Montrer que si b est un vecteur de $\text{Im } A$, l'équation $Ax = b$ admet une solution unique.
- Montrer que l'endomorphisme ${}^t A A$ est symétrique et inversible.

On désigne son inverse par $({}^t A A)^{-1}$.

- Pour un élément quelconque M de $\mathcal{M}_{m,n}$, comparer $\text{Ker } {}^t M$ et $(\text{Im } M)^\perp$, $(\text{Ker } M)^\perp$ et $\text{Im } {}^t M$.

2. Détermination d'une inverse à gauche de A

- a) Soit y un élément de F .

Prouver qu'il existe un vecteur unique x appartenant à E vérifiant $Ax = Py$ et que l'application $y \mapsto x$ ainsi définie de F dans E est linéaire (cette application linéaire est notée $A^{(g)}$).

- b) Prouver que le vecteur x précédent est caractérisé par ${}^tAAx = {}^tAy$ et en déduire une expression de $A^{(g)}$ à l'aide de A et de tA .
- c) Déduire également de ce qui précède une expression du projecteur P à l'aide de A et de tA .

3. Propriétés de $A^{(g)}$. Unicité

- a) Prouver que $A^{(g)}A = I_n$, et déterminer le rang de $A^{(g)}$.
- b) Déterminer $A^{(g)}$ lorsque $m = n$.
- c) Soit B un élément de $\mathcal{M}_{m,n}$ tel que $BA = I_n$ et tel que AB soit un projecteur orthogonal. Prouver que B annule tout vecteur de $(\text{Im } A)^\perp$.
En déduire que, pour tout $y \in F$, $By = A^{(g)}y$.
Exprimer la propriété d'unicité ainsi mise en évidence.

4. Exemples

- a) On suppose que les vecteurs colonnes a_i de A sont orthogonaux deux à deux dans F . Montrer que $A^{(g)}$ s'exprime simplement à l'aide des lignes ta_i et des normes $\|a_i\|_F$.
Peut-on avoir $A^{(g)} = {}^tA$?
- b) Soit un vecteur b , élément non nul de F , cet élément représente l'application linéaire qui à s élément de $\mathbb{R}$ associe $sb \in \mathbb{R}^m$. Déterminer $b^{(g)}$ et exprimer la forme linéaire correspondante sur F au moyen du produit scalaire dans F .

5. Description d'une méthode de détermination de $A^{(g)}$.

On se propose, pour le calcul de $A^{(g)}$, de mettre en œuvre une méthode itérative ne faisant pas appel à des inversions de matrices.

- a) Soient F_0 et F_1 deux sous-espaces vectoriels de F tels que $F_1 = F_0 + \text{Vect } \{\delta\}$ où $\text{Vect } \{\delta\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur δ donné dans F_1 , et n'appartenant pas à F_0 . On pose $\delta = d + d'$ où d' est la projection orthogonale de δ sur F_0 . On désigne par P_0 et par P_1 les projecteurs orthogonaux de F respectivement sur F_0 et sur F_1 .
Prouver que, pour tout vecteur y de F , on a : $P_1y = P_0y + \beta(d|y)_F d$, où β est un scalaire que l'on déterminera à l'aide de d .
- b) On suppose toujours que A est de rang n et que $m > n$. On note A_k ($1 \leq k \leq n$) la matrice élément de $\mathcal{M}_{m,n}$ dont les colonnes sont les k premières colonnes $a_1, a_2, \dots, a_k$ de A .
À l'aide de ce qui précède, déterminer un vecteur d_k de F tel que pour $k \geq 2$, on ait :

$$(1) \quad A_k A_k^{(g)} = A_{k-1} A_{k-1}^{(g)} + d_k d_k^{(g)}.$$

Exprimer d_k à l'aide de $I_m - A_{k-1} A_{k-1}^{(g)}$ et de a_k .

Pour k entier donné ($1 \leq k \leq n$) on écrit $A_k^{(g)}$ sous la forme $A_k^{(g)} = \begin{pmatrix} C_k \\ {}^t\gamma_k \end{pmatrix}$ où C_k est une matrice de $\mathcal{M}_{k-1,m}$ et γ_k une matrice colonne à m éléments.

- c) Écrire à l'aide des blocs C_k, γ_k, A_{k-1} et a_k la relation $A_k^{(g)} A_k = I_k$.
En utilisant le fait que γ_k est un élément de $\text{Im } A_k$, déduire en particulier des relations ainsi obtenues, que $\gamma_k = \frac{d_k}{\|d_k\|^2}$.

d) À l'aide de la relation (1), déterminer C_k à l'aide de $A_{k-1}^{(g)}$, de d_k et de a_k .

Montrer enfin que $C_k = A_{k-1}^{(g)} [I_m - a_k d_k^{(g)}]$.

PARTIE II - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE À DROITE POUR A

Dans cette partie, sauf dans la question 2.c), $n > m$ et A est supposée de rang m .

Parmi l'infinité de solutions de l'équation $Ax = y$, où y est un vecteur donné de F , on choisit la solution $\bar{x}$ de norme minimum dans E . On définit ainsi une application $y \mapsto \bar{x}$ de F dans E .

1. Détermination d'une inverse à droite

a) Soit y un élément fixé dans F .

Montrer qu'il existe un vecteur unique noté $\bar{x}$ dans $(\text{Ker } A)^\perp$ vérifiant $A\bar{x} = y$.

Prouver que $\bar{x}$ est l'élément de E qui a la norme minimum parmi toutes les solutions x de $Ax = y$.

b) Prouver que l'application $y \mapsto \bar{x}$ ainsi définie est linéaire.

Cette application linéaire est notée $A^{(d)}$. Prouver que $AA^{(d)} = I_m$.

2. Propriétés de $A^{(d)}$.

a) Déterminer le rang de $A^{(d)}$.

b) Prouver que $A^{(d)}A$ est un projecteur orthogonal dans E dont on donnera l'image.

c) Déterminer $A^{(d)}$ lorsque $m = n$.

d) Montrer que ${}^t(A^{(d)}) {}^tA = I_m$ et que ${}^tA {}^t(A^{(d)})$ est un projecteur orthogonal ; en déduire une expression de $A^{(d)}$ à l'aide de A et de tA .

PARTIE III - GÉNÉRALISATION

Dans cette partie, on considère une application linéaire (ou une matrice) notée V de E dans F et dont le rang r vérifie $r \leq \inf(n, m)$. On se propose de généraliser les notions de matrice inverse définies précédemment. On désigne par P le projecteur orthogonal dans F sur $\text{Im } V$ et par Q le projecteur orthogonal dans E sur $(\text{Ker } V)^\perp$.

1. a) Montrer que la restriction de V à $(\text{Ker } V)^\perp$ induit un isomorphisme R sur un sous-espace de F que l'on définira. On note R^{-1} l'inverse de cet isomorphisme.

b) En déduire l'existence d'une application linéaire W de F dans E possédant les propriétés suivantes :

$$\text{Ker } W = (\text{Im } V)^\perp$$

$$\text{Im } W = (\text{Ker } V)^\perp$$

$$WV = Q \text{ et } VW = P$$

c) Montrer que l'application linéaire W est la seule qui possède les 3 propriétés :

$$WV = Q$$

$$VW = P$$

$$WVW = W$$

d) Prouver que si $r = n$ alors $W = V^{(g)}$ et que si $r = m$ alors $W = V^{(d)}$.

Dans ce qui suit, W est notée V^+ qui est appelée pseudo inverse de V .

2. Propriétés

Établir que $(V^+)^+ = V$.

Établir que $({}^tV)^+ = {}^t(V^+)$.

PARTIE IV - APPLICATION ALGORITHMIQUE

Étant donné une fonction réelle f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, un réel $\varepsilon > 0$, m points distincts t_i , $i = 1, 2, \dots, m$, de cet intervalle, on souhaite construire une approximation polynomiale de f au sens suivant :

Trouver le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ et $(p+1)$ réels x_k , $k = 0, 1, \dots, p$, tels que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^m \left(f(t_i) - \sum_{k=0}^p x_k t_i^k \right)^2 \leq \varepsilon.$$

1. Établir que le problème possède une solution, qui vérifie en outre l'inégalité $p \leq m$.
2. À l'aide des résultats obtenus dans les questions précédentes, proposer un algorithme dont la p -ième itération conduise au résultat cherché.