

BANQUE PT 2016 - MATHS A
Optimisation quadratique (méthode du gradient conjugué) puis probabilités

Partie I

1) La matrice A est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On trouve $\text{Sp}(A) = \{2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$ puis

$E_2(A) = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ et $E_{2+\sqrt{2}}(A) = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et (par exemple par un produit vectoriel) $E_{2-\sqrt{2}}(A) = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3) Puisque $0 \notin \text{Sp}(A)$, A est inversible.

4) On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec $P = P_B' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x - z) \\ \frac{1}{2}(x + z - \sqrt{2}y) \\ \frac{1}{2}(x + z + \sqrt{2}y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5) D'après presque le cours (en généralisant ce qu'on a vu sur les coniques) ou bien en bourrinant (?), en

posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

avec $A' = P^T A P = \text{diag}(2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$,

$$\langle Au, u \rangle = X^T A X = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz) = X'^T A' X' = 2x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2 + (2 - \sqrt{2})z'^2$$

6) Pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, puisque $\min(\text{Sp}(A)) = 2 - \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= 2x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2 + (2 - \sqrt{2})z'^2 \\ &\geq (2 - \sqrt{2})(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &\geq (2 - \sqrt{2})(x^2 + y^2 + z^2) \text{ car } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{ sont orthonormées} \\ &\geq (2 - \sqrt{2})\|u\|^2 \end{aligned}$$

7) Montrons d'abord que $(\cdot, \cdot)_A$ est une **forme bilinéaire symétrique**.

$(\cdot, \cdot)_A$ est à valeurs dans \mathbb{R} , elle est symétrique car pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$\begin{aligned}(u, v)_A &= u^T A v = (u^T A v)^T \text{ astuce} \\ &= v^T A^T u = v^T A u = (v, u)_A\end{aligned}$$

et on vérifie sans peine que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$,

$$(\lambda u + \mu v, w)_A = \lambda(u, w)_A + \mu(v, w)_A$$

d'où la linéarité à gauche et donc par symétrie à droite.

Soit $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Au, u \rangle \geq (2 - \sqrt{2}) \|u\|^2 \geq 0$ d'où le caractère positif.

Enfin, si $\langle Au, u \rangle = 0$ alors $\|u\|^2 = 0$ (car $2 - \sqrt{2} > 0$) donc $u = 0$, d'où le caractère **défini positif**.

En conclusion, $(\cdot, \cdot)_A$ est bien un produit scalaire.

Partie II

1) On a $J_b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. $J_b(0) = 0$.

2) J'imagine, qu'au niveau PT 2016, il faut tout écrire en termes de coordonnées.

On a avec $u = (x, y, z)$, et $b = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$J_b(u) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - \alpha x - \beta y - \gamma z$$

donc

$$(\text{grad } J_b)(u) = \begin{pmatrix} 2x - y - \alpha \\ 2y - x - z - \beta \\ 2z - y - \gamma \end{pmatrix} = Au - b$$

Puis

$$\text{Hess}(J_b)(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

3) En utilisant la question 6),

$$J_b(u) \geq \frac{1}{2} \lambda \|u\|^2 - \langle u, b \rangle$$

avec $\lambda = 2 - \sqrt{2} > 0$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle u, b \rangle| \leq \|u\| \|b\|$

donc $-\langle u, b \rangle \geq -\|u\| \|b\|$ d'où

$$J_b(u) \geq \frac{1}{2} \lambda \|u\|^2 - \|b\| \|u\| = \|u\| \left(\frac{1}{2} \lambda \|u\| - \|b\| \right)$$

4) La fonction polynômiale de degré 2, $\varphi : t \mapsto t \left(\frac{1}{2} \lambda t - \|b\| \right)$, est minorée au milieu de ses racines, donc pour

$t = \frac{\|b\|}{\lambda}$ d'où

$$J_b(u) \geq \varphi \left(\frac{\|b\|}{2\lambda} \right) = -\frac{\|b\|^2}{2\lambda}.$$

Enfin, la fonction J_b n'est pas majorée, puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} J_b(x, 0, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \alpha x) = +\infty.$$

5) La fonction J_b étant minorée, $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u)$ existe.

Comme $J_b(0, 0, 0) = 0$, on a $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) \leq 0$.

6) Si $\|u\| > \frac{2\|b\|}{\lambda}$ alors

$$J_b(u) \geq \|u\| \left(\frac{1}{2}\lambda \|u\| - \|b\| \right) \quad (\text{question 3})$$

$$> \frac{2\|b\|}{\lambda} \times 0$$

donc on peut même dire que $J_b(u) > 0$.

7) Raisonnement classique pour qui l'a déjà vu mais sinon...

Sur $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}(0, r)$ avec $r = \frac{2\|b\|}{\lambda}$, on a vu que $J_b > 0$ donc $\inf_{u \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}(0, r)} J_b(u) \geq 0$.

$$\text{Or } \inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = \min \left(\underbrace{\inf_{u \in \bar{B}(0, r)} J_b(u)}_{\leq 0}, \underbrace{\inf_{u \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}(0, r)} J_b(u)}_{\geq 0} \right)$$

Donc $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u \in \bar{B}(0, r)} J_b(u) \leq 0$.

8) L'ensemble $\bar{B}(0, r)$ est un fermé borné de \mathbb{R}^3 et la fonction J_b est continue sur $\bar{B}(0, r)$ (expression algébrique) donc cette fonction y est bornée et atteint ses bornes (résultat admis du cours).

Ainsi, $\inf_{u \in \bar{B}(0, r)} J_b(u) = \min_{u \in \bar{B}(0, r)} J_b(u)$.

Il existe un $u_0 \in \bar{B}(0, r)$ tel que $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u \in \bar{B}(0, r)} J_b(u) = J_b(u_0)$.

9) Ainsi, on peut trouver un $u_0 \in \bar{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^3$ dans l'ouvert \mathbb{R}^3 tel que $\inf_{u \in \mathbb{R}^3} J_b(u) = J_b(u_0)$

D'après le cours, puisque la fonction J_b est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^3 , le point u_0 est un **point critique**, c'est-à-dire

$$(\text{grad } J_b)(u_0) = Au_0 - b = 0$$

Il vient qu'un tel u_0 unique est vaut $u_0 = A^{-1}b$.

Remarque Pour $u_0 = A^{-1}b$, on a, si $b \neq 0$,

$$J_b(u_0) = \frac{1}{2} \langle b, A^{-1}b \rangle - \langle A^{-1}b, b \rangle = -\frac{1}{2} \langle A^{-1}b, b \rangle < 0$$

en reprenant l'étude de la question **I.5** sur la matrice A^{-1} qui est symétrique réelle à valeurs propres > 0 .

Partie III

1) a) On applique le théorème spectral.

b) Puisque (e_i) est une base orthonormée,

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

Puis $Au = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i e_i$ donc, toujours parce que (e_i) est une base orthonormée,

$$\langle Au, u \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$$

c) Il vient

$$\langle Au, u \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda_1 \|u\|^2$$

d) Donc pour $u \neq 0$, $\langle Au, u \rangle \geq \lambda_1 \|u\|^2 > 0$ car $\lambda_1 > 0$ et $\|u\|^2 > 0$.

- 2) Montrons que la famille (v_i) est libre, comme elle est de cardinal n , on aura directement montré que (v_i) forme une base.

Soit (α_i) telle que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$0 = \langle Av_k, \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v_i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \langle Av_k, v_i \rangle = \alpha_k \langle Av_k, v_k \rangle$$

Or puisque $v_k \neq 0$, $\langle Av_k, v_k \rangle > 0$ donc $\alpha_k = 0$.

On a donc bien montré que la famille est libre.

On peut aussi (mais l'élève doit avoir du recul) réaliser que la définition de $(\cdot, \cdot)_A$ se généralise dans cette partie et reste un produit scalaire et du coup utiliser un résultat de cours sur les familles de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux (dont la démonstration est celle qui précède...).

- 3) $(\alpha M + \beta N)^T = \alpha M^T + \beta N^T$ et $(MN)^T = N^T M^T$.

(on s'en est déjà servi avant...)

- 4) $v^T v$ est un scalaire, c'est $\|v\|^2$.

vv^T est une matrice carrée de taille n (et de rang 1 ou nulle) symétrique réelle (on a bien $(vv^T)^T = vv^T$).

- 5) $\langle Bu, v \rangle = (Bu)^T v = u^T (B^T v) = \langle u, B^T v \rangle$

- 6) a) Comme vv^T est une matrice symétrique réelle, il en est de même de toute combinaison linéaire.

b) Pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} C_k A w &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\langle Av_i, v_i \rangle} v_i v_i^T A w = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\langle Av_i, v_i \rangle} (v_i^T A w) v_i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle v_i, A w \rangle}{\langle Av_i, v_i \rangle} v_i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, w \rangle}{\langle Av_i, v_i \rangle} v_i \end{aligned}$$

$\langle v_i, A w \rangle = \langle Av_i, w \rangle$, on démontre en effet que la forme $(\cdot, \cdot)_A$ est symétrique comme en **I.7** – c'est même un produit scalaire (si on ne l'a pas encore remarqué).

- c) Soit $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Pour $w = v_j$, comme $\langle Av_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, il vient

$$C_k A v_j = \frac{\langle Av_j, v_j \rangle}{\langle Av_j, v_j \rangle} v_j = v_j$$

- d) Donc $(I_n - C_k A)v_j = 0$, c'est-à-dire $D_k v_j = 0$.

Enfin rappelons que les matrices C_k et la matrice A sont symétriques donc

$$D_k^T = I_n - A C_k,$$

il vient

$$D_k^T A v_j = A v_j - A (C_k A v_j) = A v_j - A v_j = 0.$$

- e) D_n est la matrice représentant l'endomorphisme $u \mapsto D_n u$ dans la base canonique. Puisque cet endomorphisme est nul sur la base (v_j) , sa matrice est également nulle : $D_n = 0$.

Il vient $C_n A = I_n$ donc, C_n est l'inverse (à gauche donc tout court...) de la matrice A .

Exercice de probabilités

- 1) On remarque (= on peut supposer) que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

La variable aléatoire N compte le nombre d'essais avant le premier succès (pile), il s'agit donc d'une **loi géométrique de paramètre p** .

Pour $n \geq 1$, $\mathbb{P}(N = n) = (1-p)^{n-1} p$

Sachant que $N = n$ (avec $n \geq 1$ fixé), on compte le nombre de piles au cours de n lancers, il s'agit d'une **loi binomiale de paramètres n et p** .

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Pour $k > n$, $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = 0$.

2) Pour $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(N, X) = (n, k)\}) &= \mathbb{P}(X = k \text{ et } N = n) \\ &= \mathbb{P}(X = k \mid N = n) \times \mathbb{P}(N = n) \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times (1-p)^{n-1} p = \boxed{\binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1}} \end{aligned}$$

3) En écrivant $f(x)$ sous la forme $(1-x)^{-1}$, il vient immédiatement pour $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

En dérivant k fois le développement en série entière suivant sur l'intervalle ouvert de convergence $] - 1, 1[$,

$$\forall x \in] - 1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

on obtient

$$\forall x \in] - 1, 1[, \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \times \dots \times (n-k+1) x^{n-k}$$

ou encore

$$\forall x \in] - 1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+k}{k} x^m.$$

4) En utilisant le système complet d'événement $(\{N = n\})_{n \geq 1}$, on a pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, N = n) \text{ car pour } n < k, \text{ la proba. est nulle et que } k \geq 1 \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} = p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2(n-k)} \\ &= p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = p^{k+1} \times (1-p)^{k-1} \times \frac{1}{p^{k+1} (2-p)^{k+1}} \\ &= \boxed{\frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}} \end{aligned}$$

Enfin, pour $k = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 0, N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^1 (1-p)^{2n-1} \text{ (subtile différence } n = k = 0 \text{ est exclu)} \\ &= p(1-p) \sum_{m=0}^{+\infty} (1-p)^{2m} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \boxed{\frac{1-p}{2-p}} \end{aligned}$$

5) a) D'après le cours, les variables aléatoires U et V étant indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U) \times \mathbb{E}(V) = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = \boxed{1}$$

(on est censé savoir que $\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\lambda}$)

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 0) &= \mathbb{P}(U = 0 \text{ ou } V = 0) \\ &= \mathbb{P}(U = 0) \text{ car } \mathbb{P}(V = 0) = 0 \\ &= 1 - \lambda\end{aligned}$$

Remarque pour puriste on pourrait être tenté d'écrire $\{Y = 0\} = \{U = 0\}$ car on peut raisonnablement penser que $V(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ (mais avec des modélisations tordues de notre tribu, on pourrait avoir seulement $\mathbb{P}(V \notin \mathbb{N}^*) = 0$ et l'ensemble $\{V \notin \mathbb{N}^*\}$ négligeable pas vide).

Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y = k \text{ et } U = 0) + \mathbb{P}(Y = k \text{ et } U = 1) \\ &= 0 + \mathbb{P}(Y = k \mid U = 1) \times \mathbb{P}(U = 1) = (1 - \lambda)^{k-1} \lambda^2.\end{aligned}$$

c) On a

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$$

Or $U^2 = U$ et V^2 sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(U^2 V^2) = \mathbb{E}(U^2) \times \mathbb{E}(V^2) = \mathbb{E}(U) \times \mathbb{E}(V^2) = \lambda \times \mathbb{E}(V^2)$$

Avec nos connaissances de cours (pour accélérer), on sait que

$$\text{Var}(V) = \frac{1 - \lambda}{\lambda^2} = \mathbb{E}(V^2) - (\mathbb{E}(V))^2 = \mathbb{E}(V^2) - \frac{1}{\lambda^2}$$

donc $\mathbb{E}(V^2) = \frac{2 - \lambda}{\lambda^2}$ d'où $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{2 - \lambda}{\lambda}$ et donc

$$\boxed{\text{Var}(Y)} = \frac{2 - \lambda}{\lambda} - 1 = \boxed{2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)}$$

6) En posant λ tel que $1 - \lambda = \frac{1 - p}{2 - p}$ c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{2 - p}$, on s'aperçoit que

$$\text{pour } k \geq 1, \mathbb{P}(Y = k) = (1 - \lambda)^{k-1} \lambda^2 = \frac{(1 - p)^{k-1}}{(2 - p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1 - p}{2 - p}$$

donc X et Y ont même loi.