

— — — — — **Corrigé** — — — — —  
Centrale PSI 2001, Maths II

**Les décompositions matricielles**  
LU, QR et de Cholesky

En plus des notations adoptées par l'énoncé, on notera  $\mathcal{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$

— — — — — **Partie I** — — — — —

**I.A** —

**N.B** : qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  est triangulaire supérieure si et seulement si elle laisse stables les sevs  $F_k = \text{Vect}\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ , triangulaire inférieure ssi elle laisse stables les sevs  $G_k = \text{Vect}\{E_k, E_{k+1}, \dots, E_n\}$ .

I.A.1) Soit  $A \in \mathcal{M}_n$  triangulaire, par exemple supérieure, et inversible.  $A$  induit une bijection de  $F_k$  sur lui-même.  $A^{-1}$  aussi, elle est donc triangulaire supérieure.

Le même argument est utilisable avec les sevs  $G_k$  si  $A$  est triangulaire inférieure.

I.A.2) D'abord  $\mathcal{L}_n$  est inclu dans le groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{R})$ , puisque tout élément de  $\mathcal{L}_n$  a pour déterminant 1.

Il est clair que la matrice identité  $I_n$  est dans  $\mathcal{L}_n$ . Si  $A$  et  $B$  sont des matrices de  $\mathcal{L}_n$  alors les sevs  $G_k$ , stables par  $A$  et par  $B$ , sont aussi stables par  $AB$  et donc  $AB$  est triangulaire inférieure. De plus les éléments diagonaux de  $AB$ , qui sont les produits deux à deux des éléments diagonaux de  $A$  et de  $B$ , sont tous égaux à 1. Alors  $AB \in \mathcal{L}_n$ . Si maintenant  $A \in \mathcal{L}_n$  alors  $A^{-1}$  est triangulaire inférieure et ses éléments diagonaux, inverses de ceux de  $A$ , sont tous égaux à 1, donc  $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$ .

Ainsi  $\mathcal{L}_n$  est un sous groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**I.B** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n$

I.B.1) Supposons que  $A$  est inversible et qu'il existe des couples  $(L, U) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$  tels que  $A = LU$ . Forcément les matrices  $L$  et  $U$  sont inversibles puisque  $\det(A) = \det(L)\det(U) \neq 0$ .

Soient  $(L_1, U_1), (L_2, U_2)$  de tels couples. On a  $L_1 U_1 = L_2 U_2$ , donc  $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$ .

Les matrices égales  $L_2^{-1} L_1$  et  $U_2 U_1^{-1}$  sont alors à la fois triangulaires supérieures et inférieures et donc diagonales. Comme en plus  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_n$  alors  $L_2^{-1} L_1 \in \mathcal{L}_n$  et donc  $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$ .

Ainsi  $L_1 = L_2$  et  $U_1 = U_2$ .

I.B.2) On suppose que  $A$  est inversible et possède une décomposition LU.

Posons

$$L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} U_k & V_1 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors par identification des blocs

$$\boxed{A_k = L_k U_k}$$

(relation qui nous sera très utile par la suite)

Le bloc  $L_k$  est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous égaux à 1, donc  $\det(L_k) = 1$ . Alors

$$\boxed{\det(A_k) = \det(U_k)}$$

Et comme  $\det(U) = \det(U_k)\det(V_2)$  et que  $\det(U) \neq 0$  alors  $\det(U_k) \neq 0$ .

I.B.3) On suppose que  $\det(A_{n-1}) \neq 0$  et soit  $H \in \mathcal{L}_n$ , on pose

$$H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors

$$HA = \begin{pmatrix} H_{n-1} A_{n-1} & H_{n-1} V \\ H' A_{n-1} + W & H' V + A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour avoir  $(HA)_{n,i} = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , il suffit donc d'avoir

$$H' A_{n-1} + W = 0.$$

Il suffit alors de prendre  $H_{n-1}$  quelconque dans  $\mathcal{L}_{n-1}$ , par exemple  $H_{n-1} = I_{n-1}$ , et  $H' \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$  donné par  $H' = -W A_{n-1}^{-1}$ .

Ensuite en posant

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} K_{n-1} & 0 \\ K' & 1 \end{pmatrix}, \text{ on aurait } HH^{-1} = \begin{pmatrix} K_{n-1} & 0 \\ H' K_{n-1} + K' & 1 \end{pmatrix}$$

et en identifiant cette dernière matrice avec la matrice identité on aurait forcément  $K_{n-1} = I_{n-1}$  et  $K' = -H' = W A_{n-1}^{-1}$ .

Finalement, il suffit de prendre

$$H = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -W A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \text{ auquel cas } H^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ W A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$



e) Notons que si  $A = LU$  alors

${}^tA = {}^tU{}^tL = {}^tUD^{-1}D{}^tL$  où  $D = \text{diag}(U_{1,1}, U_{2,2}, \dots, U_{n,n})$ .  
 $L' = {}^tUD^{-1} = \left( \frac{U_{j,i}}{U_{j,j}} \right)_{i,j}$  est une matrice triangulaire inférieure, ses colonnes s'obtiennent en multipliant dans le même ordre les colonnes de  $U$  par les coefficients diagonaux de  $D^{-1}$ . En particulier les coefficients diagonaux de  $L'$  sont tous égaux à 1, donc  $L' \in \mathcal{L}_n$ . La matrice  $U' = D{}^tL$  est naturellement triangulaire supérieure.

On a ainsi  ${}^tA = L'U'$  avec  $L' \in \mathcal{L}_n$  et  $U' \in \mathcal{U}_n$ . D'après la question précédente

$$L'_{i,j} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j \end{vmatrix}_{{}^tA}}{\det({}^tA_j)}$$

Il est aisé de voir que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j \end{vmatrix}_{{}^tA} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & i \end{vmatrix}_A \text{ et que } \det({}^tA_j) = \det(A_j)$$

et que d'un autre côté  $L'_{i,j} = \frac{U_{j,i}}{U_{j,j}}$ . Ainsi

$$U_{j,i} = U_{j,j}L'_{i,j} = \frac{\det(A_j)}{\det(A_{j-1})} \times \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & i \end{vmatrix}_A}{\det(A_j)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & i \end{vmatrix}_A}{\det(A_{j-1})}$$

Ou encore, dans le bon ordre des indices, en prenant cette fois  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $2 \leq i < j$

$$U_{i,j} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j \end{vmatrix}_A}{\det(A_{i-1})}$$

**I.D** — On calcule d'abord les coefficients de  $L$  colonne par colonne. Si on prend un indice de colonne  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , et  $i \in \llbracket j, n \rrbracket$  alors

$$L_{i,j} = \frac{1}{\det(A_j)} \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,j} \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} \end{vmatrix}$$

Ces derniers déterminants, y compris  $\det(A_j)$ , sont tous d'ordre  $j$ , et sont de la forme

$$d_j(x_1, x_2, \dots, x_j) = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,j} \\ x_1 & \dots & x_j \end{vmatrix}$$

Il peut être avantageux de calculer une fois pour toute  $d_j(x_1, x_2, \dots, x_j)$  en fonction des  $x_k$  (Maple s'en acquittera vite fait) et de remplacer pour  $i$  allant de  $j$  à  $n$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_j)$  par  $(A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,j})$ .

On s'attaque ensuite au calcul des coefficients de  $U$  ligne par ligne. Si  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  est un indice

de ligne, pour tout  $j \in \llbracket i, n \rrbracket$

$$U_{i,j} = \frac{1}{\det(A_{i-1})} \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,i-1} & A_{1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,i-1} & A_{i,j} \end{vmatrix}$$

On agit de la même façon que pour les coefficients de  $L$  en considérant les fonctions

$$\delta_i : (y_1, y_2, \dots, y_i) \mapsto \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,i-1} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,i-1} & y_j \end{vmatrix}$$

**I.E** —

$$\text{I.E.1) a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On suit la méthode décrite dans la section précédente :

$$d_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Donc  $\det(A_2) = d_2(1, 2) = 1$ ,  $L_{3,2} = d_2(0, 1) = 1$  et  $L_{4,2} = d_2(1, -1) = -2$ .

$$d_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = -5x_1 + 2x_2 + x_3$$

Donc  $\det(A_3) = d_3(0, 1, -1) = 1$ ,  $L_{4,3} = d_3(1, -1, 2) = -5$ .

$$\delta_2(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_2 - y_1$$

Donc  $U_{2,3} = \delta_2(3, 1) = -2$ ,  $U_{2,4} = \delta_2(1, 3) = 2$ .

$$\delta_3(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_1 - y_2 + y_3.$$

Donc  $U_{3,4} = \delta_3(1, 3, 2) = 0$ .

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Avec  $A = LU$ , pour résoudre le système  $AX = Y$  il suffit donc de résoudre le système  $LZ = Y$  et ensuite  $UX = Z$ . L'avantage dans ce procédé est que ces deux derniers systèmes sont triangulaires.

I.E.2) La matrice inversible  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ne possède pas de décomposition LU, puisque  $A_{1,1} = 0$ .

Une matrice inversible admet au plus une décomposition LU, il faut donc essayer avec une matrice non inversible. Un exemple trivial serait de prendre  $A = 0$  et d'écrire  $A = L0$  pour tout  $L \in \mathcal{L}_2$ . En moins simple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on a alors } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.E.3) a) la formule du binôme donne  $(1+X)^{p+q} = \sum_{r=0}^{p+q} \mathbb{C}_{p+q}^r X^r$ .

et avec la convention adoptée,  $\mathbb{C}_{p+q}^r = 0$  si  $r \notin \llbracket 0, p+q \rrbracket$ , on peut écrire

$$(1+X)^{p+q} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_{p+q}^r X^r$$

D'autre part

$$(1+X)^p (1+X)^q = \left( \sum_{k=0}^p \mathbb{C}_p^k X^k \right) \left( \sum_{h=0}^q \mathbb{C}_q^h X^h \right) = \sum_{k,h \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p^k \mathbb{C}_q^h X^{k+h} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \sum_{k+h=r} \mathbb{C}_p^k \mathbb{C}_q^h X^r$$

En identifiant les coefficients du terme en  $X^r$ , on obtient

$$\mathbb{C}_{p+q}^r = \sum_{k+h=r} \mathbb{C}_p^k \mathbb{C}_q^h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p^k \mathbb{C}_q^{r-k}$$

## ----- Partie II -----

**II.A** — Soit  $A \in \mathcal{S}_n$ . Par définition de l'énoncé  $A \in \mathcal{S}_n^{++}$  ssi  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

$A$  est symétrique donc elle est orthogonalement diagonalisable, ie qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  formées de vecteurs propres de  $A$ . Posons pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $AV_k = \lambda_k V_k$ .

$\Rightarrow$ ) Si  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ , Soit  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et posons  $v = \sum_{k=1}^n x_k V_k$ . On a alors  ${}^t v A v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$ ,

les coordonnées  $x_k$  de  $v$  ne sont pas toutes nulles, donc  ${}^t v A v > 0$ .

$\Leftarrow$ ) Si pour tout  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  ${}^t v A v > 0$ , alors en particulier pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_k = {}^t V_k A V_k > 0$ . Donc  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

II.A.1)  $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $v \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$  et posons

$$V = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et } A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

${}^t V A V = {}^t v A_k v$  avec  $V \neq 0$  donc  ${}^t v A_k v > 0$ . Par ailleurs, le fait que  ${}^t A = A$  implique que  ${}^t A_k = A_k$ . Alors  $A_k$  est symétrique définie positives. Elle est donc diagonalisable de valeurs propres strictement positives. Son déterminant, produit de ces valeurs propres, est strictement positif.

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(A_k) \neq 0$ . D'après la partie I,  $A$  admet donc une décomposition LU.

II.A.2) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $U_{k,k} = \det(A_k) / \det(A_{k-1}) > 0$ .

## II.B —

II.B.1) Une astuce déjà utilisée permet d'écrire,  ${}^t A = ({}^t U D^{-1})(D {}^t L)$  où  $D = \text{diag}(U_{1,1}, \dots, U_{n,n})$ .

Comme  ${}^t A = A$ , et par unicité de la décomposition LU de  $A$  on a donc  $L = {}^t U D^{-1}$  et  $U = D {}^t L$ , et ainsi  $A = L D {}^t L$ .

Sachant que les coefficients diagonaux de  $D$  sont strictement positifs, Soit  $\Delta$  l'unique matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telle que  $\Delta^2 = D$ .

En posant  $B = \Delta {}^t L$ ,  $B$  est bien triangulaire supérieure et  ${}^t B B = L \Delta^2 L = A$ .

L'écriture  $A = {}^t B B$  est dite décomposition de Cholesky de la matrice  $A$ .

II.B.2) Supposons que  $A = {}^t B B = {}^t C C$  avec  $C \in \mathcal{U}_n$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $B_{i,i} > 0$  et  $C_{i,i} > 0$ .

La matrice  ${}^t C^{-1} {}^t B = C B^{-1}$  est à la fois triangulaire supérieure et inférieure, elle est donc diagonale. Son  $i^{\text{eme}}$  coefficient diagonal est  $\frac{B_{i,i}}{C_{i,i}} = \frac{C_{i,i}}{B_{i,i}}$ .  $B_{i,i}^2 = C_{i,i}^2$  et les deux réels  $B_{i,i}$  et  $C_{i,i}$  sont strictement positifs donc  $B_{i,i} = C_{i,i}$ . Alors les coefficients diagonaux de  $C B^{-1}$  sont tous égaux à 1.  $C B^{-1} = I_n$  où encore  $C = B$ .

**Noter** que la condition  $B_{i,i} > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est essentielle pour l'unicité car, par exemple, avec  $C = -B$  on a bien  $A = {}^t C C$ .

## II.C —

i  $\Rightarrow$  iii) Si  $M \in \mathcal{S}_n^{++}$ , on a déjà vu (question II.A.1) que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(M_k) > 0$ .

iii  $\Rightarrow$  ii) Si  $M$  est symétrique et  $\det(M_k) > 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $M$  admet une décomposition LU unique, à partir de laquelle on construit une matrice  $B \in \mathcal{U}_n$  forcément inversible telle que  $M = {}^t B B$  (comme fait dans la question II.B.1).

ii  $\Rightarrow$  i) S'il existe  $B \in \mathcal{U}_n$  inversible telle que  $M = {}^t B B$ .  $M$  est symétrique et pour tout  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  ${}^t v M v = {}^t v {}^t B B v = |Bv|^2$ , où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Comme  $B$  est inversible  $Bv \neq 0$  et donc  $|Bv| > 0$ . Alors  ${}^t v M v > 0$ . Ainsi  $M \in \mathcal{S}_n^{++}$ .

**N.B** : L'implication :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\det(M_k) > 0 \implies M$  est définie positive.

n'est pas du tout triviale, on l'a contournée ici grâce à la décomposition de Cholesky.

## ----- Partie III -----

### III.A —

III.A.1) Noter que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $v {}^t v x = \langle v, x \rangle v = p(x)$  où  $p$  est la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  sur la droite  $D = \mathbb{R}v$ .  $H^{(v)} = I_n - 2p$ , donc  $H^{(v)}$  est la symétrie orthogonale d'axe l'hyperplan  $D^\perp$ .

III.A.2) Soit  $a \in \mathbb{R}^n$  et posons  $b = (\|a\|, 0, \dots, 0)$ .

Si  $b = a$  n'importe quelle réflexion dont l'axe contient  $a$  convient.

Si  $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ ,  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$  donc  $\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 = 0$ . En considérant un vecteur  $\mathbf{v}$  unitaire colinéaire à  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  et  $\mathcal{H}$  l'hyperplan orthogonal de la droite  $\mathbb{R}\mathbf{v}$ ,  
 $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{H}^\perp$  et  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathcal{H}$ , donc  $\mathbf{H}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{a}) = S_{\mathcal{H}}(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ .

**III.B** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n$ .

III.B.1) Soit  $C_1 = (A_{1,1}, \dots, A_{n,1})$  la première colonne de  $A$ . D'après (III.A.2), il existe une matrice de Householder  $H_1$  telle que

$$H_1 C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha_1 = \|C_1\|.$$

On peut alors écrire

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\mathbf{B}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{n-1}.$$

Si on suppose qu'il existe des matrices de Householder d'ordre  $n-1$ ,  $H'_2, H'_2, \dots, H'_{n-1}$  telles que  $\mathbf{U}' = H'_{n-1} \cdots H'_2 \mathbf{B} \in \mathcal{U}_{n-1}$  et en posant pour tout  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{H'_k} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ces matrices sont des matrices de Householder (à justifier) et

$$H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{H'_{n-1} \cdots H'_2 \mathbf{B}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\mathbf{U}'} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Ainsi  $H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A \in \mathcal{U}_n$ . Le principe de récurrence permettrait alors de conclure.

III.B.2) Soient des matrices de Householder  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  telles que  $\mathbf{U} = H_{n-1} \cdots H_1 A \in \mathcal{U}_n$ . Puisque pour chaque  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $H_k^{-1} = H_k$  alors  $A = H_1 \cdots H_{n-1} \mathbf{U}$ , et en posant  $P = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$ ,  $P$  est orthogonale comme produit de matrices orthogonales et  $A = P\mathbf{U}$ .

Maintenant si on considère la matrice diagonale  $D = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  telle que  $\varepsilon_k = 1$  si  $U_{k,k} \geq 0$ ,  $-1$  si  $U_{k,k} < 0$ , et si on pose  $Q = PD^{-1}$  et  $R = D\mathbf{U}$  alors  $A = QR$ ,  $Q$  étant encore orthogonale et cette fois  $R \in \mathcal{U}_n^+$ .

III.B.3) Supposons que  $A$  est inversible et soient  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_n$  orthogonales et  $R_1, R_2 \in \mathcal{U}_n^+$  telles que  $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ .

Les matrices  $R_1$  et  $R_2$  sont forcément inversibles (grâce au déterminant) ce qui permet d'avoir  $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$ .

Posons  $B = R_2 R_1^{-1} = Q_2^{-1} Q_1$ , puisque  $R_1, R_2$  sont dans  $\mathcal{U}_n^+$  et qu'elles sont inversibles, alors leurs coefficients diagonaux sont strictement positifs et donc ceux de  $B$  aussi.

Maintenant la matrice  $B$  est à la fois triangulaire supérieure et orthogonale, elle est forcément égale à la matrice identité  $I_n$ .

**Première justification** en utilisant la décomposition de Cholesky.  $B$  est orthogonale donc  ${}^t B B = I_n$ , D'après la question (II.B.2), la décomposition  $I_n = {}^t B B$  est unique, comme on a aussi  $I_n = {}^t I_n I_n$ , alors  $B = I_n$ .

**Deuxième justification** de façon élémentaire.  $B$  est orthogonale donc ses seules valeurs propres possibles sont  $1$  et  $-1$  (grâce à la conservation de la norme).  $B$  est triangulaire, ses coefficients diagonaux (strictement positifs) sont donc tous égaux à  $1$ . Puisque chaque vecteur colonne de  $B$  est unitaire alors ses colonnes ont tous leurs coefficients nuls sauf celui sur la diagonale, qui vaut  $1$ , ie  $B = I_n$ .

Ainsi  $R_2 R_1^{-1} = Q_2^{-1} Q_1 = I_n$  ie  $R_1 = R_2$  et  $Q_1 = Q_2$ .

**N.B :** En général, une matrice qui est à la fois triangulaire et orthogonale est forcément diagonale et ses éléments diagonaux valent  $1$  ou  $-1$ . Ainsi un automorphisme orthogonale dont le polynôme caractéristique est scindé est diagonalisable, c'est une symétrie orthogonale.

**III.C** — En utilisant le procédé de Gram-Schmidt.

Soit  $A$  une matrice inversible, ces vecteurs colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , forment une famille libre. Soit  $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  la base orthonormée obtenue par procédé de Gram-Schmidt à partir de cette famille.

On rappelle que  $\mathcal{E}$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . La formule de passage d'une base à une autre donne

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \dots, C_n) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}} \text{Mat}_{\mathcal{V}}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Si on pose  $Q = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}}$  et  $R = \text{Mat}_{\mathcal{V}}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ , alors  $A = QR$ .  $Q$  est orthogonale puisque  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{V}$  sont des bases orthonormées. Pour chaque  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $C_k \in \text{Vect}\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  donc  $R$  est triangulaire supérieure.

Reste à justifier qu'en fait  $R \in \mathcal{U}_n^+$ . C'est du au procédé de Gram-Schmidt. Posons pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $F_k = \text{Vect}\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  et notons  $p_k$  la projection orthogonale sur  $F_k$ . le procédé introduit le vecteur  $U_k = C_k - p_{k-1}(C_k)$  et pose ensuite  $V_k = \frac{U_k}{\|U_k\|}$ .

on a donc  $C_k = U_k + p_{k-1}(C_k) = \|U_k\| V_k + p_{k-1}(C_k)$ . Sachant que  $p_{k-1}(C_k)$  s'exprime à l'aide des vecteurs  $V_1, \dots, V_{k-1}$ , la composante de  $C_k$  selon  $V_k$ , qui est aussi le  $k^e$  coefficient diagonal de  $R$ , est  $\|U_k\|$  qui est positif.

**N.B :**  $\|U_k\| = d(C_k, F_{k-1})$

**Le procédé de Gram–Schmidt** permet aussi de justifier la décomposition de **Cholesky**. En effet, soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. et considérons la forme bilinéaire symétrique  $\Phi : (X, Y) \mapsto \langle X, AY \rangle$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\Phi) = (\Phi(E_i, E_j))_{ij} = ((E_i, AE_j))_{ij} = ({}^t E_i A E_j)_{ij} = (A_{ij})_{ij} = A$ , comme  $A$  est définie positive alors  $\Phi$  est un produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons alors la base  $\Phi$ -orthonormale  $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^n$  en utilisant ce produit scalaire ( $\Phi$  bien sûr). Si  $B = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}}$  alors la formule de passage pour les formes bilinéaires symétriques donne, sachant que  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\Phi) = A$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\Phi) = I_n$

$$A = {}^t B I_n B = {}^t B B.$$

Comme expliqué auparavant  $B$ , obtenu par le procédé de Gram-Schmidt, est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont strictement positif.

## — — — Partie IV — — —

### IV.A —

IV.A.1) Continuité de l'application bilinéaire  $(M, N) \mapsto MN$  sur  $\mathcal{M}_n^2$ .

IV.A.2) a) Noter que pour tout vecteur  $Y$ ,  $\|MY\| \leq \|M\| \|Y\|$ . Pour tout vecteur  $X$  tel que  $\|X\| \leq 1$  on a donc

$$\|MN\| \leq \|M\| \|N\| \quad \|MX\| \leq \|M\| \|N\| \|X\| \leq \|M\| \|N\|$$

et en passant au sup  $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$ .

b) **1<sup>ère</sup> façon** : Soient  $\lambda \in \text{Sp}(M)$  et un vecteur  $X$  non nul tel que  $MX = \lambda X$ .

$$\|MX\| \leq \|M\| \|X\| \text{ donne } |\lambda| \leq \|M\|.$$

Si maintenant  $\|M\| < 1$  alors  $-1$  ne peut être une valeur propre de  $M$ . Donc  $I_n + M$  est inversible.

**2<sup>ème</sup> façon** : Une récurrence simple basée sur (IV.A.2.a) permet de justifier que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\|M^p\| \leq \|M\|^p$ . Donc si  $\|M\| < 1$  alors la série  $\sum (-1)^p M^p$  converge absolument. On a alors

$$(I_n + M) \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p M^p = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p M^p + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p M^{p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p M^p - \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p M^p = I_n$$

$$\text{Donc } I_n + M \text{ est inversible et } (I_n + M)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p M^p.$$

IV.A.3)  $A$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes donc elle est diagonalisable, d'où l'existence de la matrice inversible  $P$ .

**IV.B** —  $A_1$  est semblable à  $A$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} (Q_k R_k) Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k$  donc  $A_{k+1}$  est semblable à  $A_k$ . Ainsi par récurrence toute les matrices  $A_k$  sont semblables (orthogonalement) à  $A$ .

**IV.C** — Posons  $L_k = D^k L D^{-k}$ , les matrices  $D^k$  et  $D^{-k}$  étant diagonales les coefficients de  $L_k$

$$\text{se calculent simplement : } (L_k)_{i,j} = \frac{\lambda_i^k}{\lambda_j^k} L_{i,j} = (\lambda_i/\lambda_j)^k L_{i,j}.$$

Si  $i < j$  la matrice  $L$  est triangulaire inférieure donc  $(L_k)_{i,j} = L_{i,j} = 0$ .

Si  $i > j$ ,  $|\lambda_i/\lambda_j| < 1$  donc  $(L_k)_{i,j} \rightarrow 0$ .

Si  $i = j$ ,  $(L_k)_{i,i} = L_{i,i} = 1$ .

Ainsi la suite  $(L_k)_k$  converge vers la matrice identité  $I_n$ .

**IV.D** —  $E_k = D^k L D^{-k} - I_n$ .

D'après la question précédente la suite  $(E_k)_k$  converge vers la matrice nulle  $0$ .

Donc  $I_n + R E_k R^{-1} \rightarrow I_n$ . Par continuité du déterminant on a donc  $\det(I_n + R E_k R^{-1}) \rightarrow 1$ , et donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\det(I_n + R E_k R^{-1}) \geq 1/2$ . Les matrices  $I_n + R E_k R^{-1}$  sont donc inversibles à partir du rang  $N$ , chacune à une décomposition QR unique.

### IV.E —

IV.E.1)  $(\tilde{Q}_k)$  converge vers  $\tilde{Q}$  donc par continuité de l'application  $M \mapsto {}^t M$ ,  $({}^t \tilde{Q}_k)$  converge vers  ${}^t \tilde{Q}$ . D'après la question (IV.A.1), on a donc  ${}^t \tilde{Q}_k \tilde{Q}_k \rightarrow {}^t \tilde{Q} \tilde{Q}$ .

Comme pour tout  $k \geq N$ ,  ${}^t \tilde{Q}_k \tilde{Q}_k$  alors  ${}^t \tilde{Q} \tilde{Q} = I_n$ ,  $\tilde{Q}$  est donc orthogonale.

IV.E.2) pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{R}_k = \tilde{Q}_k^{-1} (I_n * R E_k R^{-1}) = {}^t \tilde{Q}_k (I_n * R E_k R^{-1})$ . On en déduit que  $\tilde{R}_k \rightarrow {}^t \tilde{Q}$ .

Maintenant chaque coefficient de  ${}^t R_k$  converge vers le coefficient correspondant de  $\tilde{R} = {}^t \tilde{Q}$ , les matrices  $\tilde{R}_k$  sont triangulaires supérieure donc  $\tilde{R}$  est triangulaire supérieure.

Pour la même raison les coefficients diagonaux de  $\tilde{R}$  sont positifs ou nuls, et puisque  $\tilde{R} = {}^t \tilde{Q}$  est inversible, ils sont strictement positifs. Alors  $\tilde{R} \in \mathcal{U}_n^{++}$ .

IV.E.3)  $\tilde{R} = {}^t \tilde{Q}$  est triangulaire supérieure et orthogonale donc  $\tilde{R} = \tilde{Q} = I_n$ .

IV.E.4) Vous n'en voudriez pas de toute façon ;—)

**N.B** : Cette partie donne une méthode pour le calcul approché des valeurs propres d'une matrice inversible.