Mines Maths 1 MP 2022

Corrigé proposé par

Khoutaibi Abdelaziz [1] **et Hamdane Mohammed** [2]

Formule asymptotique de Hardy et Ramanujan

A. Fonctions L et P

1 ▷ En appliquant la règle de D'Alembert, on obtient facilement que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ vaut 1. Pour $z \in]-1,1[$, $L(z)$ est le développement en série entière de la fonction $z \mapsto -\ln(1-z)$ sur $]-1,1[$.

2 ▷ Notons $\Psi : t \in [0,1] \mapsto L(tz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n}$. Remarquons d'abord que Ψ est bien définie sur $[0,1]$, puisque $tz \in D$. Ψ étant la somme d'une série de fonction, on va appliquer le théorème de dérivation terme à terme pour montrer qu'elle est de classe C^1 sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, notons $u_n : t \in [0,1] \mapsto \frac{t^n z^n}{n}$, on a alors

— La série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

— Pour tout $n \geq 1$, u_n est de classe C^1 et $u_n'(t) = t^{n-1} z^n$.

— Pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in [0,1]$, $|u_n'(t)| \leqslant |z|^n$, et la série $\sum |z|^n$ est convergente car $z \in D$, donc la série $\sum u_n'(t)$ converge normalement, donc uniformément sur D.

On déduit alors, Ψ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$$\Psi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) = z \sum_{n=1}^{\infty} (tz)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}.$$

La fonction $F : t \in [0,1] \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, comme produit de fonctions de classe C^1 et $\forall t \in [0,1], F'(t) = (-z + (1-tz)\frac{z}{1-tz})e^{L(tz)} = 0$. Ainsi F est constante sur $[0,1]$. On conclut alors que $\forall t \in [0,1], F(t) = F(0) = 1$, et pour $t = 1$, on obtient que $e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}$.

3 ▷ Pour $z \in D$, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge absolument, donc on a

$$|L(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$$

Puisque pour $z \in D$, on a $\forall n \geq 1, z^n \in D$, alors d'après l'inégalité précédente on a

$$\forall n \geq 1, |L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z|^n).$$

Comme $-\ln(1-|z|^n) \sim |z|^n$, et $\sum |z|^n$ est une série à termes positive convergente, alors d'après les critères de comparaison pour les séries à termes positives, les deux séries $\sum -\ln(1-|z|^n)$ et $\sum |L(z^n)|$ sont convergentes et par suite $\sum L(z^n)$ est convergente.

1. Professeur agrégé en CPGE (lycée d'Excellence de Benguérir)
2. Professeur agrégé en CPGE (lycée Ibn Timiya-Marrakech)

B. Développement de P en série entière

4 ▷ On a $P_{n,N}=\left\{(a_1,\dots,a_N)/\sum_{k=1}^{N}ka_k=n\right\}$. Remarquons que si $(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}$ alors $0\leqslant a_k\leqslant n$. Ainsi $P_{n,N}\subset [\![0,n]\!]^N$, ce qui prouve que $P_{n,N}$ est fini et on a même $p_{n,N}\leqslant (n+1)^N$.
Pour la croissance de $p_{n,N}$, remarquons que $P_{n,N}$ s'injecte dans $P_{n,N+1}$ via l'application $P_{n,N}\to P_{n,N+1},(a_1,\dots,a_N)\mapsto(a_1,\dots,a_N,0)$. Ce qui prouve que $p_{n,N}\leqslant p_{n,N+1}$.
Si $n=0$, alors il est clair que pour tout $N\geq 1, P_{N,0}=\{(0,\dots,0)\}$, donc

$$\forall N\geq 1,\quad p_{N,0}=1$$

Si $n\geq 1$ et $N\geq n+1$, alors pour tout $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}^n$, on a l'équivalence

$$a\in P_{n,N}\Leftrightarrow\begin{cases}(a_1,\dots,a_n)\in P_{n,n}\\(a_{n+1},\dots,a_N)=(0,\dots,0)\end{cases}.$$

On en déduit que L'application $P_{n,N}\to P_{n,n},(a_1,\dots,a_N)\mapsto(a_1,\dots,a_n,0,\dots,0)$ est une bijection et par suite $p_{n,N}=p_{n,n}$, pour tout $N\geq n+1$
La suite (p_n) est alors définie par $p_0=1$ et $\forall n\geq 1, p_n=p_{n,n}$

5 ▷ La propriété est triviale pour $N=1$ car $p_{n,1}=1$ et $\forall z\in D,\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$.

Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $z\in D$, supposons que $\prod_{k=1}^{N}\dfrac{1}{1-z^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n$.

On a $\dfrac{1}{1-z^{N+1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{k(N+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nz^n$ avec

$$u_n=\begin{cases}1 & \text{si } N+1\mid n\\0 & \text{si non}\end{cases}$$

Par produit de Cauchy de séries entières $\sum p_{i,n}z^n$ et $\sum z^{k(N+1)}$ de rayons de convergence égal à 1, on peut écrire pour tout $z\in D$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}&=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i+j=n}p_{i,N}u_j)z^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{(i,j)\in I_n}p_{i,N})z_n\end{aligned}$$

où l'on a posé $I_n=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,i+j=n \text{ et } N+1\mid j\}$. On est ainsi ramené à montrer que $p_{n,N+1}=\sum_{(i,j)\in I_n}p_{i,N}$. Pour cela on introduit pour tout $(i,j)\in I_n$, la partie $A_{i,j}$ de $\mathbb{N}^{N+1}$ définie par $A_{i,j}=\{(a_1,...a_N,j)/(a_1,...,a_N)\in P_{i,N}\}$ et on va montrer que la famille $(A_{i,j})_{(i,j)\in I_n}$ est une partition de $P_{n,N+1}$.
Puisque pour tout $(i,j)\in I_n$, on a $N+1$ divise j alors, $A_{i,j}$ est incluse dans $P_{n,N+1}$. De plus si $(i_1,j_1),(i_2,j_2)\in I_n$ et $(b_1,b_2,...,b_{N+1})\in A_{i_1,j_1}\cap A_{i_2,j_2}$, alors $b_{N+1}=j_1=j_2$ et $i_1=i_2=n-b_{N+1}$.
Montrons que $P_{n,N+1}\subset\bigcup_{(i,j)\in I_n}A_{i,j}$. Soit $(b_1,...,b_{N+1})\in P_{n,N+1}$, alors $b_1+2b_2+....+(N+1)b_{N+1}=n$. Posons alors $i=b_1+2b_2+\cdots+Nb_N$ et $j=(N+1)b_{N+1}$, alors on a bien $(i,j)\in I_n$

et $(b_1, ..., b_{N+1}) \in A_{i,j}$. Nous concluons en observant que pour tout $(i,j) \in I_n$, $A_{i,j}$ à le même cardinal de $P_{i,N}$, en effet ces deux ensembles sont en bijection via l'application

$$P_{i,N} \to A_{i,j}, (a_1, ..., a_N) \mapsto (a_1, ..., a_N, j).$$

D'où $p_{n,N+1} = \text{card}(P_{n,N+1}) = \sum_{(i,j)\in I_n} \text{card}(A_{i,j}) = \sum_{(i,j)\in I_n} \text{card}(P_{i,N}) = \sum_{(i,j)\in I_n} p_{i,N}$, et notre récurrence est ainsi achevée.

6 ▷ Posons pour $(n,N) \in \mathbb{N}^2$, $w_{n,N} = (p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n$.
On fixe $N \in \mathbb{N}$, alors puisque la suite $(P_{n,N})_{n\geq 1}$ est croissante alors $|w_{n,N}z^n| = p_{n,N+1}|z|^n - p_{n,N}|z|^n$, donc d'après 5) la série $\sum_{N\geq 0} |w_{n,N}|$ est convergente comme somme de deux séries convergentes et sa somme est

$$\begin{aligned} Y_N &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N+1}|z|^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}|z|^n \\ &= \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-|z|^k} \\ &= Q_{N+1} - Q_N \end{aligned}$$

où l'on a a posé $Q_N = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-|z|^k}$. Ainsi Y_n est le terme général d'une série télescopique convergente car (Q_N) l'est et sa somme est $\sum_{N=0}^{+\infty}(Q_{N+1} - Q_N) = \lim_{N\to+\infty} Q_N - Q_0 = P(|z|)$. Ceci prouve la sommabilité de la suite double $(w_{n,N})_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$.
D'autre part si on fixe $n \in \mathbb{N}$, alors on a d'après la question 4) $\forall N \geq n, w_{n,N} = 0$ et par suite

$$\sum_{N=0}^{+\infty} |w_{n,N}| = \sum_{N=0}^{n-1} |w_{n,N}| = \sum_{N=0}^{n-1} (p_{n,N+1} - p_{n,N})|z|^n = p_n|z|^n.$$

D'après le théorème de Fubini

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{N=0}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} w_{n,N} = P(z).$$

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. Comme d'après la question précédente la série $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$ converge pour $z \in D$, alors $R \geq 1$. D'autre part on a $\forall n \geq 1, p_n \geq 1$, car $(n, 0, \ldots, 0) \in P_{n,n}$, donc $R \leqslant 1$. D'où $R = 1$.

7 ▷ Soit $t > 0$, alors $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta})\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{i(k-n)-kt}\mathrm{d}\theta$. On va appliquer le théorème d'intégration termes à termes sur un segment. Pour cela posons pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \theta \in [-\pi, \pi] \mapsto p_k e^{i(k-n)-kt},$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur $[-\pi, \pi]$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [-\pi, \pi], |f_k(\theta)| \leqslant p_k e^{-kt}$.
Comme $e^{-t} \in D$, alors la série $\sum p_k e^{-kt}$ est convergente, d'où la convergence normale et donc

uniforme de $\sum f_k(\theta)$ sur $[-\pi,\pi]$.
On peut don intégrer terme à terme et on obtient alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} \mathrm{d}\theta.$$

Comme on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq n \\ 2\pi \text{ si } k = n \end{cases}$ alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta})\mathrm{d}\theta = 2\pi e^{-nt} p_n$. D'où

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $xe^{i\theta} \in D$ et

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} &= \frac{\exp\left(L\left(xe^{i\theta}\right)\right)}{\exp(L(x))} \\ &= \exp\left(L\left(xe^{i\theta}\right) - L(x)\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{in\theta}\right)\frac{x^n}{n}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)\frac{x^n}{n}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right)\exp\left(i\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\theta)\frac{x^n}{n}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| = \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right) = \exp(-(1-\cos(\theta))x)\exp\left(-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right)$$

$$\leqslant \exp(-(1-\cos(\theta))x)$$

On a $\displaystyle\frac{|P(e^{xe^{i\theta}})|}{|P(e^{i\theta}|} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{|1-x^n|}{|1-x^n e^{in\theta}|}$.
Or d'après la question précédente $\displaystyle\frac{|1-x^n|}{|1-x^n e^{in\theta}|} \leqslant \exp(-(1-\cos n\theta)x^n)$. D'où

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{|1-x^n|}{|1-x^n e^{in\theta}|} \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{N}-(1-\cos n\theta)x^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{N}x^n - \sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n\right) \tag{1}$$

D'autre part $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)$. D'où

$$\lim_{N\to\infty}\exp\left(-\sum_{n=1}^{N}x^n - \sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n\right) = \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans (1), on obtient l'inégalité souhaitée

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).$$

9 ▷ On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) - &\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos\theta}{|1-xe^{i\theta}|^2} - \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \\
&= \frac{\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)-(1-x)(1-x\cos\theta)-x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \\
&\geq \frac{\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)-(1-x)(1-\cos\theta)-x(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \\
&\geq \frac{(2x-1)(1-\cos\theta)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\right)} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

car $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

On distingue deux cas

— Si $x(1-\cos(\theta)) \leqslant (1-x)^2$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} &\geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{3(1-x)^3} \\
&\geq \frac{(1-\cos(\theta))}{6(1-x)^3}
\end{aligned}$$

car $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

— Si $x(1-\cos(\theta)) \geq (1-x)^2$, alors

$$\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)} \geq \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)(3x(1-\cos(\theta))} = \frac{1}{3(1-x)}$$

Et par décroissance de la fonction $u \mapsto e^{-u}$, on obtient les inégalités souhaitées

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

10 ▷ On a pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'_{n,\alpha}(x) = \frac{[(n-\alpha x)(1-e^{-x})-nxe^{-x}]x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^{n+1}}$$

Les deux fonctions $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont continues et positives sur $]0, +\infty[$ et

— Au voisinage de $+\infty$, on a $\varphi_{n,\alpha}(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $\varphi'_{n,\alpha}(x) = O(\frac{1}{x^2})$, donc les deux fonctions sont intégrables sur $[1, +\infty[$.

— Au voisine de zéro, on a $\varphi_{n,\alpha}(x) \sim 1$ et $\varphi'_{n,\alpha}(x) \sim \dfrac{(n-\alpha x)(1-e^{-x})-nxe^{-x}}{x^2}$. Par un calcul du développement limité à l'ordre deux en 0, on obtient $(n-\alpha x)(1-e^{-x})-nxe^{-x} = O(x^2)$, d'où $\varphi'_{n,\alpha}(x) = O(1)$ au voisinage de 0, ce qui prouve l'intégrabilité de $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sur $]0, 1]$

On conclut alors que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$

11 ▷ L'intégrabilité de $\varphi_{n,\alpha}$ sur $]0,+\infty[$ entraine la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x$. En intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left([(x-kt)\varphi_{n,\alpha}]_{kt}^{(k+1)t}-\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t)-\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t)-\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\\&=t^{n+1}S_{n,\alpha}(t)-\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On a alors

$$S_{n,\alpha}(t)=\frac{1}{t^{n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^ne^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x$$

D'autre part, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}t\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}=t\int_0^{+\infty}\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x$$

il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x=O(t)$, et par suite

$$S_{n,\alpha}(t)=\frac{1}{t^{n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^ne^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\,\mathrm{d}x+O\left(\frac{1}{t^n}\right)\quad\text{quand } t\to0^+$$

12 ▷ Remarquons d'abord que la fonction $x\mapsto\dfrac{xe^{-x}}{e^{-x}-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$: en effet, elle est continue sur $]0,+\infty\,[$, elle se prolonge par continuité en 0 (car $1-e^{-x}\sim_0 x$) et au voisinage de l'infini, elle est équivalente à xe^{-x} qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ (elle est négligeable devant x^{-2} par exemple). L'idée ensuite est d'écrire dans $\dfrac{xe^{-x}}{e^{-x}-1}$ comme somme d'une série de fonctions. Pour cela, on écrit ,

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}=\sum_{n=1}^{+\infty}xe^{-nx}\qquad\text{car } 0<e^{-x}<1.$$

Posons $f_n(x)=xe^{-nx}$. Alors

- Chaque f_n est continue par morceaux sur $]\,0,+\infty\,[$, intégrable sur ce même intervalle, et

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx=\int_0^{+\infty}xe^{-nx}dx=\frac{1}{n^2}\ (\text{intégration par parties}).$$

- Pour tout $x>0$, la série $\displaystyle\sum_n f_n(x)$ converge vers $x\mapsto\dfrac{xe^{-x}}{e^{-x}-1}$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on trouve

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}xe^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

13 ▷ On peut supposer que $X(\Omega)$ est dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$. Le cas où $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini se raméne au cas précédent en complétant par des x_n pour $n \geq r+1$ avec une probabilité nulle. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que

$$\Phi_X(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(x_n\theta) + i\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(x_n\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{ix_n\theta}.$$

Donc

$$|\Phi_X(\theta)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n\, e^{ix_n\theta}| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\,.$$

14 ▷ Soient $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}\mathrm{e}^{i(an+b)\theta} = \sum_{n=1}^{+\infty} p\mathrm{e}^{i(a+b)\theta}\left(q\mathrm{e}^{ia\theta}\right)^{n-1} = \frac{p\mathrm{e}^{i(a+b)\theta}}{1-q\mathrm{e}^{ia\theta}}$$

(somme des termes d'une série géométrique de raison $q\mathrm{e}^{ia\theta}$ de module $q < 1$).

15 ▷ Posons $a_n = pq^{n-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \theta \mapsto a_n\,\mathrm{e}^{i\theta n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc en particulier, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, f_n est de classe $\mathcal{C}^j$ sur $\mathbb{R}$ avec $f_n^{(j)} : \theta \mapsto a_n\,(in)^j\,\mathrm{e}^{i\theta n}$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![0,k]\!]$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $|a_n\,(in)^j\,\mathrm{e}^{i\theta n}| \leqslant a_n\,|n|^j$ (majoration uniforme par le terme général d'une série numérique convergente) : la série de fonctions $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\geq 1}$ converge normalement (donc simplement si $j < k$ et uniformément si $j = k$) sur $\mathbb{R}$ et sa fonction somme, Φ_X, est continue sur $\mathbb{R}$. Par application du théorème de dérivation (terme à terme) d'une série de fonction, la fonction somme Φ_X de la série de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, i^k\, n^k \mathrm{e}^{i\theta n}\,.$$

$$\Phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, i^k\, x_n^k = i^k\,\mathbb{E}\left(X^k\right)\,.$$

16 ▷ On fait un raisonnent par récurrence sur k.

- La propriété est varie pour $k = 0$ avec $P_0 = 1$.
- Soit $k \geq 0$. Supposons que la propriété est vraie à l'ordre k et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$. On a $\Phi_x^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta}\dfrac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}}$. En dérivant, on obtient $\Phi_x^{(k+1)}(\theta) = pi^{k+1}e^{i\theta}\dfrac{P_{k+1}\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+2}}$, avec

$$P_{k+1} = P_k + (k+1)X(1-X)P_k + XP_k',$$

et on a bien $P_{k+1}(0) = P_k(0) = 1$

17 ▷ On a d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\mathbb{E}\left(X^k\right) - \frac{1}{p^k}\right| = \left|i^{-k-1}\Phi_X^{(k)}(0) - \frac{1}{p^k}\right| = \frac{|\,P_k(q) - 1\,|}{p^k}$$

Comme $P_k(1)-1=0$ alors il existe $Q_k\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P_k(q)-1=qQ_k(q)$, donc $|P_k(q)-1|\leqslant C_kq$ où $C_k=1+\max\limits_{x\in[0,1]}|Q_k(x)|$. (Ce maximum existe car la fonction $x\mapsto|Q_k(x)|$ est continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.). D'où

$$\left|\mathbb{E}(X^k)-\frac{1}{p^k}\right|\leqslant\frac{C_kq}{p^k}$$

18 ▷ Sachant que $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^4\right)&=\mathbb{E}(X^4)-4\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X)+6\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)^2-4X\mathbb{E}(X)^3+\mathbb{E}(X)^4)\\&=(\mathbb{E}(X^4)-\frac{1}{p^4})-\frac{4}{p}(\mathbb{E}(X^3)-\frac{1}{p^3})+\frac{6}{p^2}(\mathbb{E}(X^2)-\frac{1}{p^2})-\frac{4}{p^3}(\mathbb{E}(X)-\frac{1}{p})\\&\leqslant\frac{Kq}{p^4}\end{aligned}$$

. avec $K=C_4+4C_3+6C_2+4C_1$.

19 ▷ En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz successivement aux variables aléatoires Y^2 et 1, puis Y^2 et $|Y|$ qui admettent tous un moment d'ordre 2, on obtient que
$\mathbb{E}(Y^2)^2=\mathbb{E}(Y^2.1)^2\leqslant\mathbb{E}(Y^4)\mathbb{E}(1)$. D'où

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)\leqslant\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{1/2}$$

et $\mathbb{E}(|Y|^3)^2=\mathbb{E}(Y^2.|Y|)^2\leqslant\mathbb{E}(Y^4)\mathbb{E}(Y^2)\leqslant\mathbb{E}(Y^4)^{3/2}$. Ou encore

$$\mathbb{E}\left(|\ Y\ |^3\right)\leqslant\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$$

20 ▷ Par application de l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 à $x\mapsto\mathrm{e}^{ix}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\left|\mathrm{e}^{iu}-\sum_{k=0}^{2}\frac{(iu)^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|u|^{n+1}}{(3)!}.$$

D'où

$$\left|e^{iu}-1-iu+\frac{u^2}{2}\right|\leqslant\frac{|u|^3}{6}.$$

$$\begin{aligned}\left|\Phi_Y(\theta)-\sum_{k=0}^{2}\frac{(i\theta)^k}{k!}\mathbb{E}\left(Y^k\right)\right|&=\left|\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{i\theta Y}-\sum_{k=0}^{2}\frac{(i\theta Y)^k}{k!}\right)\right|\leqslant\mathbb{E}\left|\mathrm{e}^{i\theta Y}-\sum_{k=0}^{2}\frac{(i\theta Y)^k}{k!}\right|\\&\leqslant\mathbb{E}\left(\frac{|\theta Y|^3}{6}\right)=\frac{|\theta|^3\,\mathbb{E}|Y|^3}{6}\end{aligned}$$

Ee en utilisant la deuxième inégalité de la question 19) on obtient alors l'inégalité souhaitée :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\left|\Phi_Y(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|\leqslant\frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}$$

21 ▷ On écrit encore une fois L'inégalité de Taylor La grange à l'ordre 2 pour la fonction $\theta\mapsto\exp\left(-\dfrac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)$, on obtient que

$$\left|\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|\leqslant\frac{|\theta|^4}{8}\mathbb{E}(Y^2)^2\leqslant\frac{|\theta|^4}{8}\mathbb{E}(Y^4),$$

(d'après la première estimation de la question 19)
Donc

$$\left|\Phi_Y(\theta)-\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)\right| \leqslant \left|\Phi_Y(\theta)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|+\left|\exp\left(-\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)-1+\frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right|$$
$$\leqslant \frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y^4\right)\right)^{3/4}+\frac{|\theta|^4}{8}\mathbb{E}(Y^4)$$

F. Convergence vers une gaussienne

22 ▷ On raisonne par récurrence sur n.

— La propriété est triviale pour $n=1$

— Montrons que la propriété est vraie pour $n=2$. Soit z_1, z_2, u_1, u_2 des complexes tous de module inférieur ou égal à 1 alors
$\mid z_1z_2-u_1u_2\mid=\mid(z_1-u_1)z_2+(z_2-u_2)u_1\mid\leqslant\mid z_1-u_1\mid+\mid z_2-u_2\mid$

— Supposons que la propriété est vraie à l'ordre n et montrons la à l'ordre $n+1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ ainsi que des complexes $z_1,\ldots,z_{n+1},u_1,\ldots,u_{n+1}$ tous de module inférieur ou égal à 1. Alors en appliquant la propriété pour $n=2$ on obtient

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1}z_k-\prod_{k=1}^{n+1}u_k\right|\leqslant\left|\prod_{k=1}^{n}z_k-\prod_{k=1}^{n}u_k\right|+|z_{n+1}-u_{n+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}|z_k-u_k|\,.$$

23 ▷ Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$. On considère, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, une variable aléatoire suivant la loi $G\left(1-e^{-kt}\right)$, et on pose $Y_k=k\left(Z_k-\mathbf{E}\left(Z_k\right)\right)$. Démontrer que

$$h(t,\theta)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)$$

D'après la question 14) on a $\Phi_{Y_k}(\theta)=\dfrac{(1-e^{-kt})e^{i(k-kE(Z_k))\theta}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}=\dfrac{(1-e^{-kt})e^{-i\frac{\theta ke^{-kt}}{1-e^{-kt}}}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}$. Donc

$$\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)=\prod_{k=1}^{n}e^{-i\frac{\theta ke^{-kt}}{1-e^{-kt}}}\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-kt+ik\theta}}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-kt}}}=\exp\left(-i\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta ke^{-kt}}{1-e^{-kt}}\right)\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-kt+ik\theta}}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-kt}}}$$

En passant à la lmite lorque n tend vers l'infini et compte tenu des définitions de P et m_t on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)=\frac{P(e^{-t}e^{i\theta}))}{P(e^{-t})}e^{-im_t}=h(t,\theta)$$

Pour l'autre estimation, commençons d'bord par majorer la quantité $\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)-\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{\theta^2u_k(t)}{2}}\right|$, où $u_k(t)=\dfrac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-k\cdot t})^2}$. Pour cela on va utiliser la relation précédente puisque $|\Phi_k(\theta)|\leqslant 1$ et $|e^{-\frac{\theta^2u_k(t)}{2}}|\leqslant 1$ et l'estimation
$\mathbb{E}(Y_k^4)=k^4\mathbb{E}((Z_k-E-Z_k)^4)\leqslant K.\dfrac{k^4e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)-\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{\theta^2 u_k(t)}{2}}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\Phi_{Y_k}(\theta)-e^{-\frac{\theta^2 u_k(t)}{2}}\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathbb{E}\left(Y_k^4\right)\right)^{3/4}+\frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}(Y_k^4)\\ &\leqslant K^{3/4}\frac{|\theta|^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3e^{-3/4kt}}{(1-e^{kt})^3}+K\frac{\theta^4}{8}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n\to\infty$, et en observons que $e^{-\frac{\theta^2\sum_{k=1}^{n}u_k(t)}{2}}=\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{\theta^2 u_k(t)}{2}}$, on obtient alors que

$$\left|h(t,\theta)-e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right|\leqslant K^{3/4}|\theta|^3S_{3,3/4}(t)+K\theta^4S_{4,1}(t) \tag{2}$$

24 ▷ On a $t^2\sigma_t^2=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^2k^2e^{-kt}}{(1-e^{-k\cdot t})^2}$.

D'après le résultat admis de la question 11), on a $\sigma_t^2=\frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})}\,\mathrm{d}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or d'aprés le résultat admis de la question 12) on a , $\int_0^{+\infty}\varphi_{2,1}(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3}$. Donc $t^2\sigma_t^2\sim\frac{\pi^2}{3t}$, puis $\sigma_t\sim\frac{\pi}{\sqrt{3}t^{3/2}}$ quand $t\to0^+$.

En appliquant l'estimation (2), avec $\theta=\frac{u}{\sigma_t}$, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\left|h(t,\frac{u}{\sigma_t})-e^{-\frac{u^2}{2}}\right| &\leqslant K^{3/4}\frac{|u|^3}{\sigma_t^3}S_{3,3/4}(t)+K\frac{u^4}{\sigma_t^4}S_{4,1}(t)\\ &\leqslant K^{\frac{3}{4}}\frac{|u|^3}{\sigma_t^3}\times O\left(\frac{1}{t^4}\right)+K\frac{u^4}{\sigma_t^4}\times O\left(\frac{1}{t^5}\right)=O(\sqrt{t})\underset{t\to0}{\longrightarrow}0\end{aligned} \tag{3}$$

Il reste à montrer que $\exp\left(i\frac{u}{\sigma_1}\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right)\to1$ quand $t\to0^+$. Pour cela on applique encore une fois les questions 11) et 12), on obtient alors

$$m_t=\frac{\pi^2}{6t^2}+O\left(\frac{1}{t}\right)\text{ quand }t\to0^+$$

et par suite $\frac{u}{\sigma_1}\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)=O(\sqrt{t})$. D'où $\left(m_t-\frac{\pi^2}{6t^2}\right)\to0$ quand $t\to0^+$.

25 ▷ Considérons la fonction $g:\theta\in[-\pi,\pi]\mapsto\begin{cases}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\text{ si }\theta\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}\\ \frac{1}{2}\text{ si }\theta=0\end{cases}$. Alors g est continue et strictement positive sur $[-\pi,\pi]$. D'après le théorème des bornes atteintes, g est minorée et atteint sa borne inférieure α sur $[-\pi,\pi]$. Donc $\alpha>0$ et
$\forall\theta\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}\ 1-\cos\theta\geq\alpha\theta^2$. Cette inégalité est encore valable pour $\theta=0$. On va utiliser les inégalités trouvées à la question 9) pour $x=e^{-t}$, $t>0$. Pour cela x doit vérifier la condition $0\leqslant\frac{1}{2}\leqslant x<1$. Or on a

$$e^{-t}=x\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow t\leqslant\ln(2)=t_0$$

On a la majoration l'une des deux estimations :

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6\left(1-e^{-t}\right)^3}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6\left(1-e^{-t}\right)^3}\right)$$

ou

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right)$$

La fonction : $t \longmapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ qui est définit sur $]0,t_1]$, prolongeable par continuité en 0 , strictement positive, elle est alors majorée :

$$\exists C>0 \quad ,\forall t \in]\,0,t_1]\,, \quad 1-e^{-t} \leqslant Ct$$

On a alors $\left|\dfrac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\beta_1\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}$ où $\beta_1 = \dfrac{\alpha}{6C^3}$

Ou $\left|\dfrac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\gamma_1\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}$ avec $\gamma_1 = \dfrac{1}{C\pi^{2/3}}$. Mais comme $\sigma_t \sim \mu t^{-3/2}$, avec $\mu = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, alors il existe $t_0 \in]0,t_1[$ tel que $\forall t \in]0,t_0[, \sigma_t \leqslant \dfrac{3\mu}{2}t^{-3/2}$, et par suite on a

$\left|\dfrac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-l}\right)}\right| \leqslant e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2}$ où $\beta = \dfrac{4}{9\mu}\beta_1$, ou $\left|\dfrac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-l}\right)}\right| \leqslant e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}$ avec $\gamma = \dfrac{2}{3\mu}\gamma_1$.

26 ▷ On va appliquer le théorème de convergence dominée. On pose pour $(t,u) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ $f(t,u) = J(t,u)\mathbb{1}_{[-\sigma_t\pi,\sigma_t\pi]}(u)$, alors

- Pour tout $t>0$, la fonction $u \mapsto f(t,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f(t,u) \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} e^{-u^2/2}$.
- **Hypothèse de domination :** D'après la question précédente il existe $t_0>0$ tel que $\forall (t,\theta) \in]0,t_0[\times[-\pi,\pi]$, $|h(t,\theta)| \leqslant e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}$.
  Donc si $u \in [-\sigma_t\pi,\sigma_t\pi]$, $|j(t,u)| \leqslant e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma(|u|)^{2/3}} = \varphi(u)$, et si $u \notin [-\sigma_t\pi,\sigma_t\pi]$ alors $|j(t,u)| = 0 \leqslant \varphi(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,u)\mathrm{d}u = \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

G. La conclusion

27 ▷ D'après la question on a

$$p_n = \frac{e^{nt}P\left(e^{-t}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta.$$

En effectuant le changement de variable $u = \sigma_t\theta$ et en prenant $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta. &= \frac{1}{\sigma_t}\int_{-\sigma_t\pi}^{\sigma_t\pi} e^{-in\frac{u}{\sigma_t}}\frac{P\left(e^{-t+i\frac{u}{\sigma_t}}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sigma_t}\int_{-\sigma_t\pi}^{\sigma_t\pi} e^{-i\frac{\pi^2}{6t^2}\frac{u}{\sigma_t}}\frac{P\left(e^{-t+i\frac{u}{\sigma_t}}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sigma_t}\int_{-\sigma_t\pi}^{\sigma_t\pi} \exp\left(i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_1 - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) e^{-im_t\frac{u}{\sigma_t}}\frac{P\left(e^{-t+i\frac{u}{\sigma_t}}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sigma_t}\int_{-\sigma_t\pi}^{\sigma_t\pi} J(t,u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Donc $p_n \sim \dfrac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{6n}^{3/2}}\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{6n}}}\exp\pi\left(\sqrt{\dfrac{2n}{3}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sim \dfrac{\exp\left(\pi\sqrt{\dfrac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}$ quand $n \to +\infty$.