

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)



CONCOURS D'ADMISSION 1985



MATHÉMATIQUES

1ère ÉPREUVE

OPTIONS M, P' et T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : **MATHÉMATIQUES !**

PRELIMINAIRES IMPORTANTS

1°) \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

C_n^k : nombre des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments ; $n, k \in \mathbb{N}$; $0 \leq k \leq n$.

$x \mapsto \text{Arccos } x$ désigne la fonction inverse de la restriction de la fonction $x \mapsto \cos x$ à l'intervalle $[0, \pi]$.

2°) Les deux résultats suivants seront admis sans démonstration par les candidats qui pourront les utiliser :

a) $n! = n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon(n))$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0$.

b) Soit une série entière de terme général $a_n x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ de rayon de convergence $R (R > 0)$. Soit f la fonction définie sur $] -R, R[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Si la série de terme général $a_n R^n$ est convergente, il vient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

De même, si la série de terme général $a_n (-R)^n$ est convergente, il vient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -R \\ x > -R}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$$

3°) Les deuxième et troisième parties sont indépendantes de la première.

1ère PARTIE

Soient $u_n, v_n, w_n, n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions définies sur \mathbb{R} , par les relations :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n(x) = \frac{x^n}{n \cdot n!}, \quad w_n(x) = \frac{x^n}{n^2 \cdot n!}.$$

1°) Déterminer le rayon de convergence commun R des trois séries entières de terme général $u_n(x)$, $v_n(x)$ et $w_n(x)$.

2°) Étudier la convergence de chacune des séries de terme général respectivement $u_n(R)$, $u_n(-R)$, $v_n(R)$, $v_n(-R)$, $w_n(R)$ et $w_n(-R)$.

2ème PARTIE

Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) \quad x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0.$$

1°) Déterminer la solution générale $x \rightarrow y(x)$ de l'équation différentielle (E) continûment dérivable définie successivement sur l'intervalle :

$$I_1 =]-\infty, -2[.$$

$$I_2 =]-2, 0[.$$

$$I_3 =]0, +\infty[.$$

Indication : Il est préférable, pour la suite du problème, d'exprimer les solutions au moyen de $\sqrt{x(x+2)}$ et $\ln |1+x+\sqrt{x(x+2)}|$ ou de $\sqrt{-x(x+2)}$ et de $\text{Arccos}(x+1)$ selon le cas.

2°) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution u , définie sur I_2 , qui admet une limite finie, lorsque la variable x tend vers 0 par valeurs inférieures. Déterminer u et $u(0)$ défini par :

$$u(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} u(x).$$

Montrer, de même, que l'équation (E) admet une unique solution v , définie sur I_3 , qui admet une limite finie lorsque la variable x tend vers 0 par valeurs supérieures. Déterminer v et $v(0)$ défini par :

$$v(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} v(x).$$

3°) Les fonctions u et v , étant ainsi prolongées par continuité en 0, soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } -2 < x \leq 0, \\ v(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction f est continûment dérivable sur l'intervalle $]-2, +\infty[$. Préciser $f(0)$ et $f'(0)$.

4°) Montrer que cette fonction f est l'unique solution de (E) continue dans l'intervalle $]-2, +\infty[$. Est-ce que l'équation (E) admet une solution continue dans \mathbb{R} ?

3ème PARTIE

1°) Montrer que l'équation différentielle (E), définie à la seconde partie, admet une solution ϕ définie dans un intervalle $]-R_1, R_1[$, par la relation :

$$\forall x \in]-R_1, R_1[, \phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Déterminer les coefficients a_n en fonction de l'entier n ;

Préciser le rayon de convergence R_1 de cette série entière.

Étudier la convergence des séries de terme général a_n et b_n définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = a_n(R_1)^n, \quad b_n = a_n(-R_1)^n.$$

2°) Montrer que, dans un intervalle, qui sera précisé, la relation $f(x) = \phi(x)$ a lieu ; f est la fonction définie à la troisième question de la deuxième partie.

4ème PARTIE

Soient U, V et W les fonctions définies par les relations :

$$U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \quad V(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x), \quad W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x).$$

Les fonctions u_n, v_n et w_n sont celles qui ont été introduites à la première partie ; chacune des fonctions U, V et W est définie dans un intervalle.

1°) Démontrer, en justifiant les calculs, la relation :

$$\forall x \in]-R, R[\quad \phi\left(-\frac{x}{2}\right) - x\phi'\left(-\frac{x}{2}\right) = 1 + U(x).$$

ϕ est la fonction définie à la troisième partie ; en déduire une expression explicite de $U(x)$. Calculer les valeurs des deux sommes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{C_{2n}^n}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{C_{2n}^n}$$

2°) Démontrer de même :

$$\forall x \in]-R, R[\quad V(x) = \frac{x}{2} \phi\left(-\frac{x}{2}\right).$$

En déduire une expression explicite de $V(x)$. Calculer les deux sommes :

$$S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot C_{2n}^n}, \quad S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot C_{2n}^n}$$

3°) Démontrer que la fonction W s'exprime à l'aide de la fonction : $x \longmapsto \int_0^x \phi(t) dt$;

en déduire une expression explicite de $W(x)$. Calculer les deux sommes :

$$S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2 \cdot C_{2n}^n}, \quad S_6 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{n^2 \cdot C_{2n}^n}.$$

5ème PARTIE

L'objet de cette dernière partie est d'étudier les variations de la fonction $x \longmapsto f(x)$ définie sur l'intervalle $]-2, +\infty[$.

1°) En utilisant de préférence la troisième partie, déterminer les signes de $f(x), f'(x)$ et $f''(x)$ lorsque $x \in]-2, 0]$.

En déduire les variations de $f(x)$ sur cet intervalle puis le graphe de la restriction de f à cet intervalle.

2°) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par la relation :

$$g(x) = f(x - 1)$$

Soit t la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$t(x) = \frac{1}{x} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} g'(x).$$

A l'aide de cette fonction t , déterminer le signe de $g'(x)$; en déduire les variations de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3°) Calculer $g''(x)$; étudier son signe à l'aide d'une méthode analogue. Représenter le graphe de la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, +\infty[$.