# CORRIGE

# 1 Partie I : Etude de cas particuliers

1. On note $A_t^{(m)} = \left\{ (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{N}^m \quad / \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = t \right\}$.

   (a) Soit $(x_1, .., x_d) \in A_t^{(m)}$, on a $\forall j \in [\![1, m]\!], \quad 0 \leqslant x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} x_i = t$, ce qui montrer que $A_t^{(m)} \subset [\![0, t]\!]^d$ dont il est fini.

   (b) Soit $(x_1, .., x_d) \in A_t^{(m)}$, on a $0 \leqslant x_1 \leqslant t$ et $x_2 + \cdots x_m = t - x_1$ donc $(x_2, .., x_m) \in A_{t-x_1}^{(m-1)}$. On en déduit l'union disjointe suivante puis on passe au cardinal

$$\begin{aligned} A_t^{(m)} &= \coprod_{k=0}^{t} \widetilde{A}_{t-k}^{(m)} \text{ où } \widetilde{A}_{t-k}^{(m)} = \left\{ (k, x_2..., x_m) \in \mathbb{N}^{m-1} \quad / \quad \sum_{i=2}^{m} x_i = t - k \right\} \\ N_1^m(t) &= \sum_{k=0}^{t} \operatorname{card}(\widetilde{A}_{t-k}^{(m)}) = \sum_{k=0}^{t} \operatorname{card}(A_{t-k}^{(m-1)}) = \sum_{k=0}^{t} N_1^{m-1}(t-k) \underset{q=t-k}{=} \sum_{q=0}^{t} N_1^{m-1}(q) \end{aligned}$$

   (c) On procède par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\times$ en posant $(\mathcal{H}_m) : \forall t \in \mathbb{N}, \quad N_1^m(t) = \binom{t+m-1}{m-1}$.

   **Initialisation** $m = 1$ : $A_t^{(1)} = \{(x_1) \in \mathbb{N} \quad / \quad x_1 = t\} = \{t\}$ donc $N_1^1(t) = 1 = \binom{t}{0} = \binom{t+1-1}{1-1}$ donc $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.

   **Hérédité** : Supposons $(\mathcal{H}_m)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{m+1})$. On commence par utiliser la formule du triangle de Pascal

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^\times, \quad & \binom{k+m-1}{m-1} + \binom{k+m-1}{m} = \binom{k+m}{m} \Leftrightarrow \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{k+m}{m} - \binom{(k-1)+m}{m} \\ \Rightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{k=1}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} = \sum_{k=1}^{t} \left[ \binom{k+m}{m} - \binom{(k-1)+m}{m} \right] \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{t+m}{m} - \binom{0+m}{m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{t+m}{m} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \binom{t+m}{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{0+m-1}{m-1} + \sum_{k=1}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} = \sum_{k=0}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} \\ \Rightarrow \quad & N_1^{m+1}(t) = \sum_{k=0}^{t} N_1^m(k) = \sum_{k=0}^{t} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{t+m}{m} \end{aligned}$$

   ce qui démontre $(\mathcal{H}_{m+1})$ et achève la récurrence.

   (d) C'est immédiat en remarquant que $N_1^m(t) = \dfrac{\overbrace{t(t-1)\cdots(t-m+1)}^{m-1 \text{ facteurs}}}{(m-1)!} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}$

2. Pour la simplicité des écritures, on note $x$ au lieu de $\overline{x}$ la classe de $x$ modulo 8 dans les questions a et b.

   (a) On désigne par $\varphi$ la première application et $\psi$ la seconde. En remarquant que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\pm 3, \pm 1\}$ et en dressant le tableau des valeurs de $\psi$, on a

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi(x)$ | $1$ | $4$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ | $1$ | $0$ |

   $\Rightarrow \operatorname{Im}(\psi) = \{0, 1, 4\}, \quad \operatorname{Im}(\varphi) = \{1\}$

   (b) Puisque $X \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, on a $X^2 = 1$ donc il s'agit de résoudre dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^3$ l'équation $Y^2 + Z^2 + T^2 = -1$. On effectue le tableau des valeurs prises par la somme de deux carrés puis de trois carrés

| $Y^2 + Z^2$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $4$ |
| $1$ | $1$ | $2$ | $5$ |
| $4$ | $4$ | $5$ | $0$ |

$Z^2$ (en colonne) / $Y^2$ (en ligne)

| $Y^2 + Z^2 + T^2$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ | $5$ |
| $1$ | $1$ | $2$ | $3$ | $5$ | $6$ |
| $4$ | $4$ | $5$ | $6$ | $0$ | $1$ |

$Y^2 + Z^2$ (en colonne) / $T^2$ (en ligne)

Par conséquent, la somme de trois carrés ne fait jamais $-1$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et l'équation $X^2+Y^2+Z^2+T^2=0$ n'admet donc aucune solution dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^3$.

(c) Suppons qu'une telle solution existe. Alors il existe $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3$ et $(\alpha,\beta,\gamma)\in(\mathbb{N}^\times)^3$ tel que $X=\dfrac{a}{\alpha},\quad Y=\dfrac{b}{\beta},\quad Z=\dfrac{c}{\gamma}$. Notons $T$ le plus petit entier naturel non nul tel que $TX$, $TY$ et $TZ$ soient simultanément entiers (relatifs). On a alors

$$X^2+Y^2+Z^2=8b-1 \underset{\times T^2}{\Rightarrow} (TX)^2+(TY)^2+(TZ)^2=(8b-1)T^2=-T^2 \bmod 8 \Leftrightarrow (TX)^2+(TY)^2+(TZ)^2+T^2=0 \bmod 8$$

D'après la question **I.2.b**, $T$ n'est pas inversible modulo 8 donc $T$ est pair, ce qui entraine que $\overline{T}^2\in\{\overline{0},\overline{4}\}$ et $(\overline{TX})^2+(\overline{TY})^2+(\overline{TZ})^2\in\{\overline{0},\overline{4}\}$. A l'aide des deux tableaux de la question **I.2.b**, on en déduit que $\overline{TX}$, $\overline{TY}$ et $\overline{TZ}$ appartiennent à $\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$ donc $TX$, $TY$, $TZ$ sont pairs et puisque $T$ est pair, on obtient que $\dfrac{T}{2}$ est un entier naturel non nul (car divisible par 2 et non nul) vérifiant

$$\left(\frac{T}{2}\right)X=\frac{TX}{2}\in\mathbb{Z},\quad \left(\frac{T}{2}\right)Y=\frac{TY}{2}\in\mathbb{Z},\quad \left(\frac{T}{2}\right)Z=\frac{TZ}{2}\in\mathbb{Z}.$$

Par minimalité de $T$, on a $T\leqslant\dfrac{T}{2}\Leftrightarrow T\leqslant 0$, ce qui est absurde car $T\in\mathbb{N}^\times$ donc l'équation $X^2+Y^2+Z^2=8b-1$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}^3$.

(d) Cela résulte immédiatement de la question **I.2.c** en remarquant que

$$X^2+Y^2+Z^2=4^a(8b-1)\Leftrightarrow\left(\frac{X}{2^a}\right)^2+\left(\frac{Y}{2^b}\right)^2+\left(\frac{Z}{2^a}\right)^2=8b-1$$

# 2 Partie II : Somme de quatre carrés

1. (a) On note $\varphi$ le morphisme de groupe. Puique $p$ est un nombre premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un corps, on a

$$x\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x-1=0\\ \text{ou}\\ x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\{\pm1\}\Rightarrow\ker(\varphi)=\{\pm1\}$$

(b) Soient $x,y\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tels que $\varphi(x)=\varphi(y)\Leftrightarrow\varphi\left(xy^{-1}\right)=1\Leftrightarrow x\in\{\pm y\}$. En particulier, si $x,y\in\left\{1,..,\dfrac{p-1}{2}\right\}$ et $\varphi(x)=\varphi(y)$ alors $x=y$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi) &= \left\{\varphi(x),\quad x\in\left\{-\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}\right\}\backslash\{0\}\right\}=\left\{\varphi(x),\quad x\in\left\{1,\frac{p-1}{2}\right\}\right\}\Rightarrow\mathrm{card}\,\mathrm{Im}(\varphi)=\frac{p-1}{2}\\ \{x^2,\quad x &\in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}=\mathrm{Im}(\varphi)\cup\{0\}\Rightarrow\mathrm{card}\{x^2,\quad x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}=\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}\end{aligned}$$

(car $\varphi(x)=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$ car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps).

(c) Notons $A$ le premier ensemble et $B$ le second. On a $\mathrm{card}\,A=\dfrac{p+1}{2}$, $\mathrm{card}\,B=\dfrac{p+1}{2}$ et $\mathrm{card}(A\cup B)\leqslant\mathrm{card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})=p$ (car $A\cup B\subset\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) ce qui entraine

$$\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cup B)\geqslant\frac{p+1}{2}+\frac{p+1}{2}-p=1\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset.$$

(d) D'après la question **II.1.c**, il existe deux $x$ et $y$ appartenant à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $-1-y^2=x^2\Leftrightarrow 1+x^2+y^2=0$. Soient $x_0$ et $y_0$ deux entiers, que l'on peut supposer appartenir à $\left\{-\dfrac{p-1}{2},\dfrac{p-1}{2}\right\}$ tels que $x=x_0 \bmod p$ et $y=y_0 \bmod p$, on a alors

$$1+x_0^2+y_0^2=0 \bmod p\Leftrightarrow\exists m\in\mathbb{Z}\quad/\quad 1+x_0^2+y_0^2=mp$$

Etant donné que $1+x_0^2+y_0^2\geqslant 1$, il est immédiat que $m>0\Leftrightarrow m\geqslant 1$. En outre, on a

$$mp=1+|x_0|^2+|y_0|^2\leqslant 1+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=\frac{p^2-2p+3}{2}\Leftrightarrow m\leqslant\frac{p}{2}-1+\frac{3}{2p}\underset{p\geqslant 3}{\leqslant}\frac{p}{2}-1+\frac{1}{2}=\frac{p-1}{2}<\frac{p}{2}<p$$

2. On commence par remarquer que $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{I} + \gamma\mathbf{J} + \delta\mathbf{K} = 0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & -\gamma - i\delta \\ \gamma - i\delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + i\beta = 0 \\ \alpha - i\beta = 0 \\ \gamma - i\delta = 0 \\ -\gamma - i\delta = 0 \end{cases} \underset{\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

   ce qui montre que $\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ est bien une famille libre de $\mathbb{H}$ et, par définition, c'est une famille génératrice de $\mathbb{H}$ donc c'est une base de $\mathbb{H}$. Le produit des matrices étant bilinéaire, il suffit de montrer que $ab \in \mathbb{H}$ lorsque $a$ et $b$ appartiennent à cette base de $\mathbb{H}$ ce qui est immédiat en dressant le tableau suivant

| $ab$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{I}$ | $\mathbf{J}$ | $\mathbf{K}$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $\mathbf{1}$ | $\mathbf{I}$ | $\mathbf{J}$ | $\mathbf{K}$ | |
| $\mathbf{I}$ | $\mathbf{I}$ | $-\mathbf{1}$ | $\mathbf{K}$ | $-\mathbf{J}$ | |
| $\mathbf{J}$ | $\mathbf{J}$ | $-\mathbf{K}$ | $-\mathbf{1}$ | $\mathbf{L}$ | |
| $\mathbf{K}$ | $\mathbf{K}$ | $\mathbf{J}$ | $-\mathbf{L}$ | $-\mathbf{1}$ | |
| $b$ | | | | | |

   (b) Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ et $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \tau(\lambda(a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}) + \lambda'(a' + b'\mathbf{I} + c'\mathbf{J} + d'\mathbf{K})) &= \tau((\lambda a + \lambda' a') + (\lambda b + \lambda' b')\mathbf{I} + (\lambda c + \lambda' c')\mathbf{J} + (\lambda d + \lambda' d')\mathbf{K}) \\ &= (\lambda a + \lambda' a') - (\lambda b + \lambda' b')\mathbf{I} - (\lambda c + \lambda' c')\mathbf{J} - (\lambda d + \lambda' d')\mathbf{K} \\ &= \lambda(a - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}) + \lambda'(a' - b'\mathbf{I} - c'\mathbf{J} - d'\mathbf{K}) \\ &= \lambda\tau(a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}) + \lambda'\tau(a' + b'\mathbf{I} + c'\mathbf{J} + d'\mathbf{K})) \end{aligned}$$

   Soient $x = a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$ et $y = a' + b'\mathbf{I} + c'\mathbf{J} + d'\mathbf{K}$ appartenant à $\mathbb{H}$, en remarquant que $\tau(1) = 1, \quad \tau(I) = -I, \quad \tau(J) = -J, \quad \tau(K) = -K$ et en utilisant le tableau de la question **II.3.a**, on obtient

$$\begin{aligned} xy &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc') + (ac' - bd' + ca' + db')\mathbf{J} + (ad' + bc' - cb' + da')\mathbf{K} \\ \tau(xy) &= (aa' - bb' - cc' - dd') - (ab' + ba' + cd' - dc') - (ac' - bd' + ca' + db')\mathbf{J} - (ad' + bc' - cb' + da')\mathbf{K} \\ \tau(y)\tau(x) &= (a' - b'\mathbf{I} - c'\mathbf{J} - d'\mathbf{K})(a - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}) \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (-a'b - b'a + c'd - d'c)\mathbf{I} + (-a'c - b'd - c'a + d'b)\mathbf{J} + (-a'd + b'c - c'b - d'a)\mathbf{K} \\ &= \tau(xy) \end{aligned}$$

   (c) On commence par vérifiée que $z\tau(z) = \tau(z)z$. Si l'on a $z = a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$ alors $\tau(z) = a' + b'\mathbf{I} + c'\mathbf{J} + d'\mathbf{K}$ avec $a' = a$, $b' = -b$, $c' = -c$, $d' = -d$ et les calculs de la question **II.2.b** nous donne

$$z\tau(z) = (a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K})(a - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \tau(z)z$$

   donc l'application $N$ est bien définie.

   (d) D'après la question **II.2.c** et en remarquant que $a\lambda b = \lambda ab$ lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{H}$ (les scalaires commutent aux matrices), on a

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{H}, \quad N(z_1 z_2) = [z_1\tau(z_1)]\,[\tau(z_2)z_2] = z_1\,[\tau(z_2)z_2]\,\tau(z_1) = z_1 N(z_2)\tau(z_2) = N(z_2)\,[z_1\tau(z_1)] = N(z_1)N(z_2).$$

3. Soient $a, b \in \mathcal{N}_2^4$, il existe $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$, $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ appartenant à $\mathbb{N}^4$ tels que

$$a = \sum_{i=1}^{4} a_i^2 = N(\underbrace{a_1 + a_2\mathbf{I} + a_3\mathbf{J} + a_4\mathbf{K}}_{=z_1\in\mathbb{H}}), \quad b = \sum_{i=1}^{4} b_i^2 = N(\underbrace{b_1 + b_2\mathbf{I} + b_3\mathbf{K} + b_4\mathbf{K}}_{=z_2\in\mathbb{H}})$$

   En utilisant les questions **II.2.b**, **II.2.c** et **II.2.d**, on obtient que

$$\begin{aligned} ab &= N(z_1)N(z_2) = N(z_1 z_2) \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 \\ &\quad + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2 \\ &= \underbrace{|a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4|^2}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{|a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3|^2}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{|a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2|^2}_{\in\mathbb{N}} \\ &\quad + \underbrace{|a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1|^2}_{\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

   donc $ab \in \mathcal{N}_2^4$.

4. (a) D'après la question **II.1.d**, il existe un entier $m \in \{1,..,p-1\}$ et deux entiers $x, y$, que l'on peut supposer positifs quitte à changer $x$ en $-x$ et/ou $y$ en $-y$, tels que

$$mp = 1 + x^2 + y^2 = 1^2 + x^2 + y^2 + 0^2 \in \mathcal{N}_2^4.$$

(b) i. En utilisant la formule de développement du carré d'une somme et comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps, on a

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \bmod 2 = mp \bmod 2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \bmod 2.$$

Par conséquent, $x_1+x_2+x_3+x_4$ est un entier pair et c'est la somme de quatre entiers donc soient ces quatres entiers sont pairs, soient les quatres sont impairs, soient deux sont pairs et deux sont impairs.

- Premier cas : ils ont tous la même parité. On les réordonne de façon croissante

$$0 \leqslant x_{i_4} \leqslant x_{i_3} \leqslant x_{i_2} \leqslant x_{i_1}$$

L'application $\sigma : j \mapsto i_j$ est clairement une permutation de $\mathfrak{S}_4$ et les entiers $x_{\sigma(1)} \pm x_{\sigma(2)}$, $x_{\sigma(3)} \pm x_{\sigma(4)}$ sont tous positifs et pairs

- Second cas : deux sont pairs et deux sont impairs. Il existe deux indices distincts $i_1$, $i_2$ tels que $x_{i_1}, x_{i_2}$ sont pairs et deux autre indices distincts $i_3$, $i_4$ tels que $x_{i_3}, x_{i_4}$ sont impairs. On définit alors $\sigma$ par

$$\begin{array}{rcl} \text{si } x_{i_1} & \geqslant & x_{i_2} \text{ alors } \sigma(1) = i_1 \text{ et } \sigma(2) = i_2, \text{ si } x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \text{ alors } \sigma(1) = i_2 \text{ et } \sigma(2) = i_1 \\ \text{si } x_{i_3} & \geqslant & x_{i_4} \text{ alors } \sigma(3) = i_3 \text{ et } \sigma(4) = i_4, \text{ si } x_{i_3} \leqslant x_{i_4} \text{ alors } \sigma(3) = i_4 \text{ et } \sigma(4) = i_3 \end{array}$$

et les entiers $x_{\sigma(1)} \pm x_{\sigma(2)}$, $x_{\sigma(3)} \pm x_{\sigma(4)}$ sont tous positifs et pairs

ii. Puisque $\dfrac{x_{\sigma(1)} \pm x_{\sigma(2)}}{2}$ et $\dfrac{x_{\sigma(3)} \pm x_{\sigma(4)}}{2}$ sont des entiers positifs, on a

$$\begin{array}{rcl} & & \left(\dfrac{x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_{\sigma(3)} + x_{\sigma(4)}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}}{2}\right)^2 \\ = & & \dfrac{1}{2}\left(x_{\sigma(1)}^2 + x_{\sigma(2)}^2 + x_{\sigma(3)}^2 + x_{\sigma(4)}^2\right) = \dfrac{mp}{2} \in \mathcal{N}_2^4. \end{array}$$

(c) Procédons par l'absurde en suppose $m_0$ pair alors $\dfrac{m_0}{2}$ est un entier positif non nul et $\dfrac{m_0}{2}p = \dfrac{m_0 p}{2} \in \mathcal{N}_2^4$. Par minimalité de $m_0$, on a $m_0 \leqslant \dfrac{m_0}{2} \Leftrightarrow m_0 \leqslant 0$, ce qui est absurde car $m_0 \geqslant 1$ donc $m_0$ est impair.

(d) i. Pour tout $i$ appartenant à $[\![1,4]\!]$, on considère $b_i$ l'entier le plus proche de $\dfrac{x_i}{m_0}$ (i.e. $b_i = \lfloor \dfrac{x_i}{m_0} \rfloor$ ou $\lfloor \dfrac{x_i}{m_0} \rfloor + 1$ selon que $\dfrac{x_i}{m_0} \in \left[\lfloor \dfrac{x_i}{m_0} \rfloor, \lfloor \dfrac{x_i}{m_0} \rfloor + \dfrac{1}{2}\right]$ ou $\left[\lfloor \dfrac{x_i}{m_0} \rfloor + \dfrac{1}{2}, \lfloor \dfrac{x_i}{m_0} \rfloor\right]$). On a

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \quad \left|\frac{x_i}{m_0} - b_i\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

S'il existe $i$ tel que

$$\left|\frac{x_i}{m_0} - b_i\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_i}{m_0} - b_i = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \pm\frac{m_0}{2} = x_i - b_i m_0 \Leftrightarrow m_0 = \pm 2(x_i - b_i m_0) \in 2\mathbb{Z}$$

ce qui est absurde donc

$$\forall i \in [\![1,4]\!], \quad \left|\frac{x_i}{m_0} - b_i\right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x_i - b_i m_0| < \frac{m_0}{2}$$

On pose $\forall i \in [\![1,4]\!], \quad y_i = x_i - b_i m_0$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \forall i & \in & [\![1,4]\!], \quad |y_i| < \dfrac{m_0}{2} \\ y_i & = & x_i \bmod m_0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^4 y_i^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \bmod m_0 = m_0 p \bmod m_0 = 0 \bmod m_0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^4 y_i^2 & < & \displaystyle\sum_{i=1}^4 \left(\frac{m_0}{2}\right)^2 = m_0^2 \end{array}$$

Supposons que

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,4]\!] \quad y_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,4]\!], \quad x_i = b_i m_0 \Rightarrow m_0 p = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = m_0^2 \sum_{i=1}^{4} b_i^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \underbrace{m_0}_{\in\mathbb{N}} \underbrace{\sum_{i=1}^{4} b_i^2}_{\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} b_i^2 = m_0 = 1$$

ce qui est absurde donc $0 < \sum_{i=1}^{4} y_i^2$.

ii. On considère les réels $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ définis par

$$(x_1 + x_2\mathbf{I} + x_3\mathbf{J} + x_4\mathbf{K})(y_1 - y_2\mathbf{I} - y_3\mathbf{J} - y_4\mathbf{K}) = z_1 + z_2\mathbf{I} + z_3\mathbf{J} + z_4\mathbf{K}$$

D'après les questions **II.2.c** et **II.2.d**, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} z_i^2 &= N((x_1 + x_2\mathbf{I} + x_3\mathbf{J} + x_4\mathbf{K})(y_1 - y_2\mathbf{I} - y_3\mathbf{J} - y_4\mathbf{K})) \\ &= N(x_1 + x_2\mathbf{I} + x_3\mathbf{J} + x_4\mathbf{K})N(y_1 - y_2\mathbf{I} - y_3\mathbf{J} - y_4\mathbf{K})) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{4} y_i^2\right) = (m_0 p)(m_0 m_1) = m_0^2 m_1 p\end{aligned}$$

La question **II.2.b** nous montre que les $(z_i)_i$ sont en fait des entiers relatifs donne et l'on a

$$\begin{aligned}z_1 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i}_{\in\mathbb{Z}} = \sum_{i=1}^{4} x_i(x_i - b_i m_0) = \underbrace{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}_{=0 \bmod m_0} - m_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i}_{\in\mathbb{N}} = 0 \bmod m_0 \\ z_2 &= -x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 = -x_1(x_2 - b_2 m_0) + x_2(x_1 - b_1 m_0) + x_3(x_4 - b_4 m_0) - x_4(x_3 - b_3 m_0) \\ &= -m_0\left(b_1 x_2 - b_2 x_1 - b_3 x_4 + b_4 x_3\right) = 0 \bmod m_0 \\ z_3 &= -x_1 y_3 + x_2 y_4 + x_3 y_1 - x_4 y_2 = -x_1(x_3 - b_3 m_0) + x_2(x_4 - b_4 m_0) + x_3(x_1 - b_1 m_0) - x_4(x_2 - b_2 m_0) \\ &= -m_0\left(b_1 x_3 - b_3 x_1 - b_2 x_4 + b_4 x_2\right) = 0 \bmod m_0 \\ z_4 &= -x_1 y_4 - x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_4 y_1 = -x_1(x_4 - b_4 m_0) - x_2(x_3 - b_3 m_0) + x_3(x_2 - b_2 m_0) + x_4(x_1 - b_1 m_0) \\ &= -m_0\left(b_1 x_4 + b_2 x_3 - b_3 x_2 - b_4 x_1\right) = 0 \bmod m_0\end{aligned}$$

(e) Puisque $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $m_0$ divise $z_i$, $\left|\frac{z_i}{m_0}\right|$ est un entier positif tel que

$$\sum_{i=1}^{4} \left|\frac{z_i}{m_0}\right|^2 = \frac{1}{m_0^2}\sum_{i=1}^{4} z_i^2 = m_1 p, \quad m_1 = \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{4} y_i^2 < \frac{m_0^2}{m_0} = m_0$$

Par conséquent, on a $m_1 p \in \mathcal{N}_2^4$, $m_1 \in \mathbb{N}^\times$ (car $\sum_{i=1}^{4} y_i^2 > 0$) et $m_1 < m_0$, ce qui contredit la minimalité de $m_0$ donc l'hypothèse $m_0 \neq 1$ est absurde ce qui entraine que $m_0 \leqslant 1$ et comme $m_0 \in \mathbb{N}^\times$, on en déduit que $m_0 = 1$.

5. D'après la question **II.4.e**, tout nombre premier $p$ appartient à $\mathcal{N}_2^4$ (puisque $m_0 p = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$ et $m_0 = 1$) et par multiplicativité de $\mathcal{N}_2^4$ (question **II.3**) tout produit de nombres premiers appartient à $\mathcal{N}_2^4$. Etant donné que tout entier naturel non nul est produit de nombres premiers, on en déduit que $\mathbb{N}^\times \subset \mathcal{N}_2^4$. Evidemment $0 \in \mathcal{N}_2^4$ $(0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2)$ donc $\mathbb{N} \subset \mathcal{N}_2^4$ et par définition $\mathcal{N}_2^4 \subset \mathbb{N}$ ce qui montre que $\mathbb{N} = \mathcal{N}_2^4$.

# 3 Partie III : Les fonctions $g$ et $G$

1. (a) Pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, on a

$$0 \leqslant x_j^d \leqslant \sum_{i=1}^{m} x_i^d = 2^d \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^d \right\rfloor - 1 \leqslant 2^d \left(\frac{3}{2}\right)^d - 1 = 3^d - 1 < 3^d \Rightarrow 0 \leqslant x_j < 3 \Leftrightarrow x_j \in \{0,1,2\}.$$

(b) Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m}\in\mathbb{N}^m$ tel que $2^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1=\sum_{i=1}^m x_i^d$. On note $k_x=\text{card}(\{i\in[\![1,m]\!] \quad / \quad x_i=2\})$. On a

$$k_x2^d=\sum_{i\ /\ x_i=2}x_i^d\leqslant\sum_{i=1}^m x_i^d=2^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1\Leftrightarrow k_x\leqslant\underbrace{\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor}_{\in\mathbb{N}}-\underbrace{\frac{1}{2^d}}_{\leqslant1}\Rightarrow k_x\leqslant\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1$$

Par conséquent, il faut au plus $\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1$ termes égaux à $2^d$ dans tout écriture de $2^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1$ comme somme de puissances $d$-ième d'entiers et tous les autres termes sont égaux à 0 ou à 1. Si l'on effectue la somme de $\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1$ termes égaux à $2^d$, on obtient $2^d\left(\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1\right)=2^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-2^d$ donc, pour obtenir $2^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1$, il faut ajouter exactement $2^d-1$ termes égaux à 1. Ainsi, il faut au moins $\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1+2^d-1=\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor+2^d-2$ termes pour écrire $^d\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor-1$ comme somme de puissances $d$-ième d'entiers donc

$$m\geqslant\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor+2^d-2\Rightarrow g(d)\geqslant\left\lfloor\left(\frac{3}{2}\right)^d\right\rfloor+2^d-2$$

2. L'inclusion

$$\left\{m\in\mathbb{N} \quad / \quad \forall t\in\mathbb{N},\quad \exists(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m,\quad t=\sum_{i=1}^m x_i^d\right\}\subset\left\{m\in\mathbb{N} \quad / \quad \exists t_0\in\mathbb{N},\quad \forall t\in\mathbb{N},\quad t\geqslant t_0\Rightarrow\exists(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m,\right.$$

montre que $g(d)\geqslant G(d)$. En particulier, si $G(d)=+\infty$ alors $g(d)=+\infty$. Si l'ensemble

$$\left\{m\in\mathbb{N} \quad / \quad \exists t_0\in\mathbb{N},\quad \forall t\in\mathbb{N},\quad t\geqslant t_0\Rightarrow\exists(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m,\quad t=\sum_{i=1}^m x_i^d\right\}$$

est non vide alors $G(d)<+\infty$. Soit $t_0\in\mathbb{N}$ (fixé, ne dépendant que de $G(d)$) tel que

$$\forall t\geqslant t_0,\quad \exists(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m,\quad t=\sum_{i=1}^m x_i^d$$

En remarquant que $\forall t<t_0$, on a $t=\sum_{i<t}1^d+\sum_{t\leqslant i\leqslant t_0}0^d$ donc tout entier $t<t_0$ s'écrit comme somme de $t_0$ puissances $d$-ième d'entiers ce qui entraine que tout entier s'écrit comme somme de $G(d)+t_0$ puissances $d$-ième d'entiers (rajouter des 0 à l'écriture pour obtenir $G(d)+t_0$ termes). Ainsi l'ensemble

$$\left\{m\in\mathbb{N} \quad / \quad \forall t\in\mathbb{N},\quad \exists(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m,\quad t=\sum_{i=1}^m x_i^d\right\}$$

est non vide car il contient $G(d)+t_0$, ce qui démontre l'équivalence $G(d)<+\infty\Leftrightarrow g(d)<+\infty$. Dans ce cas, on a $G(d)\leqslant g(d)\leqslant G(d)+t_0$ où $t_0$ est un certain entier (la dernière majoration n'apporte aucune information supplémentaire car $t_0$ n'est pas connu et pour tous entiers $a\geqslant b$, on a la majoration triviale $b\leqslant a+\underbrace{(b-a)!}_{\in\mathbb{N}}$)

3. D'après la question **II.5**, on a $\mathbb{N}=\mathcal{N}_2^4$ donc $g(d)\leqslant 4$ et d'après la question **I.2.c** $7=8\times1-1$ ne peut être écrit comme somme de 3 carrés d'entiers donc $g(2)>3$ ce qui montre que $g(2)=4$.
D'après la question **III.2**, on a $G(4)\leqslant 4$. Supposons que $G(2)\leqslant 3$ alors il existe un entier $t_0$ tel que tout entier supérieur à $t_0$ est somme de 3 carrés d'entiers. Or, d'après la qestion **I.2.c.**, $8(t_0+1)-1$ ne peut être écrit comme somme de 3 carrés d'entiers et $8(t_0+1)-1>t_0(\Leftrightarrow t_0>-1)$ ce qui est absurde. Par conséquent, $G(2)=4$.

# 4 Partie IV : Expression intégrale

1. Si $n=0$, on a $\int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}d\alpha=\int_0^1 1d\alpha=1$ et si $n\geqslant1$, on a $\int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}d\alpha=\left[\frac{e^{2\pi in\alpha}}{2\pi in}\right]_0^1=0$.

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{x\in\mathbb{Z}^m\cap[0,B]^m} e^{2i\pi(f_d^m(x)-t)\alpha}d\alpha &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^m\cap[0,B]^m}\int_0^1 e^{2i\pi(f_d^m(x)-t)\alpha}d\alpha = \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}^m\cap[0,B]^m\\ f(x)=t}}\int_0^1 e^{2i\pi(f_d^m(x)-t)\alpha}d\alpha = \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}^m\cap[0,B]^m\\ f(x)=t}} 1\\ &= \text{card}(x\in\mathbb{Z}^m\cap[0,B]^m \quad / \quad f(x)=t) = N_d^m(t,B)\end{aligned}$$

3. Il est immédiat que pour tout $B\in\mathbb{R}_+$, on a l'inclusion ensembliste

$$\left\{(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m\cap[0,B]^m \quad / \quad \sum_{i=1}^m x_i^d = t\right\} \subset \left\{(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m \quad / \quad \sum_{i=1}^m x_i^d = t\right\}$$

En outre, pour tout $x\in\mathbb{N}^d$, on a

$$\forall j\in[\![1,m]\!], \quad 0\leqslant x_j^d\leqslant\sum_{i=1}^m x_i^d = t \Leftrightarrow 0\leqslant x_i^d\leqslant t \Leftrightarrow 0\leqslant x_i\leqslant t^{1/d}\leqslant B \text{ quand } B\geqslant t^{1/d}$$

donc, lorsque $B\geqslant t^{1/d}$, on a

$$\left\{(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m \quad / \quad \sum_{i=1}^m x_i^d = t\right\} = \left\{(x_1,..,x_m)\in\mathbb{N}^m\cap[0,B]^m \quad / \quad \sum_{i=1}^m x_i^d = t\right\}$$

ce qui démontre l'égalité ensembliste et donc l'égalité des cardinaux lorsque $B\geqslant t^{1/d}$.

# 5 Partie V : Majoration de sommes d'exponentielles

1. (a)

$$\phi_2(g_1,g_2) = \phi(0)-\phi(g_1)-\phi(g_2)+\phi(g_1+g_2).$$

(b)

$$\begin{aligned}\phi_k(g_1,..,g_{k-1},0) &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\left[(-1)^0\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+0.0\right)+(-1)^1\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+1.0\right)\right]\\ &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+(-1)^1\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)\right]=0\end{aligned}$$

(c) Commençons par calculer séparément les différents termes du second membre

$$\begin{aligned}\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k) &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\left[(-1)^0\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+0.g_k\right)+(-1)^1\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+1.g_k\right)\right]\\ &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)-\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+g_k\right)\right]\end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on a

$$\begin{aligned}\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_{k+1}) &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)-\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+g_{k+1}\right)\right]\\ \phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k+g_{k+1}) &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)-\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+g_k+g_{k+1}\right)\right]\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
&\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k)+\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_{k+1})-\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k+g_{k+1})\\
=&\sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}[\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)-\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+g_k\right)-\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+g_{k+1}\right)\\
&+\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+g_k+g_{k+1}\right)]\\
=&\sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}}\sum_{(\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1})\in\{0,1\}^2}\phi\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i g_i\right)+\varepsilon_k g_k+\varepsilon_{k+1}g_{k+1}\right)\\
=&\sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k+1})\in\{0,1\}^{k+1}}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k+1}}\phi\left(\sum_{i=1}^{k+1}\varepsilon_i g_i\right)=\phi_{k+1}(g_1,.,g_{k+1})
\end{aligned}$$

(d) Soit $\sigma$ une permutation de $\mathfrak{S}_k$. L'application $(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)\mapsto(\varepsilon_{\sigma(1)},..,\varepsilon_{\sigma(k)})$ est une permutation de $\{0,1\}^k$ donc

$$\begin{aligned}
\phi_k(g_{\sigma(1)},..,g_{\sigma(k)}) &= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k}\phi\left(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i g_{\sigma(i)}\right)=\sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\varepsilon_{\sigma(1)}+\cdots+\varepsilon_{\sigma(k)}}\phi\left(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{\sigma(i)}g_{\sigma(i)}\right)\\
&= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\varepsilon_{\sigma(1)}+\cdots+\varepsilon_{\sigma(k)}}\phi\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j g_j\right)\quad(j=\sigma(i))\\
&= \sum_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k}\phi\left(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j g_j\right)=\phi_k(g_1,..,g_k)
\end{aligned}$$

puisque l'on a $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{\sigma(i)}\underset{j=\sigma(i)}{=}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j$.

2. (a) Soient $a_1,a_2\in A$, d'après la question **V.1.a**, on a

$$\begin{aligned}
\phi_2(a_1,a_2) &= \phi(0)-\phi(a_1)-\phi(a_2)+\phi(a_1+a_2)\\
&= -a_1^n-a_2^n+(a_1+a_2)^n=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a_1^k a_2^{n-k}=n!\sum_{\substack{i_1+i_2=n\\ i_1\geqslant 1,i_2\geqslant 1}}\frac{a_1^{i_1}a_2^{i_2}}{i_1!i_2!}
\end{aligned}$$

(cette dernière formule sera utile à la question suivante)

(b) Montrons par récurrence sur $k\in[\![1,n]\!]$ la propriété

$$(\mathcal{H}_k):\forall a_1,..,a_k\in A,\quad \phi_k(a_1,..,a_k)=(-1)^k n!\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n\\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}}\frac{a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}}{i_1!\cdots i_k!}$$

**Initialisation** $k=1$ : on a $\phi_1(a_1)=-a_1^n$ et $(-1)^1 n!\sum_{\substack{i_1=n\\ i_1\geqslant 1}}\frac{a_1^{i_1}}{i_1!}=-n!\frac{a_1^n}{n!}=-a_1^n$ donc $(\mathcal{H}_1)$ est vraie.

**Hérédité** : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{k+1})$. D'après la question **V.1.c**, on a

$$\begin{aligned}
\phi_{k+1}(a_1,.,a_{k+1}) &= \phi_k(a_1,..,a_{k-1},a_k)+\phi_k(a_1,..,a_{k-1},a_{k+1})-\phi_k(a_1,..,a_{k-1},a_k+a_{k+1}) \\
&= (-1)^k n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}}{i_1!\cdots i_k!} + (-1)^k n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{k-1}+i_{k+1}=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}a_{k+1}^{i_k}}{i_1!\cdots !i_k!} \\
&\quad +(-1)^k n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}(a_k+a_{k+1})^{i_k}}{i_1!\cdots i_k!} \\
&= (-1)^k n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}}{i_1!\cdots i_k!}\left(a_k^{i_k}+a_{k+1}^{i_k}-\left(a_k+a_{k+1}\right)^{i_k}\right) \\
&= (-1)^k n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}}{i_1!\cdots i_k!}(-1).i_k! \sum_{\substack{\widetilde{i_k}+\widetilde{i_{k+1}}=i_k \\ \widetilde{i_k}\geqslant 1,\widetilde{i_{k+1}}\geqslant 1}} \frac{a_k^{\widetilde{i_k}}a_{k+1}^{\widetilde{i_{k+1}}}}{\widetilde{i_k}!\widetilde{i_{k+1}}!} \quad \textbf{(V.2.a)} \\
&= (-1)^{k+1} n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{k-1}+\widetilde{i_k}+\widetilde{i_{k+1}}=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_{k-1}\geqslant 1,\widetilde{i_k}\geqslant 1,\widetilde{i_{k+1}}\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_{k-1}^{i_{k-1}}a_k^{\widetilde{i_k}}a_{k+1}^{\widetilde{i_{k+1}}}}{i_1!\cdots i_{k-1}!\widetilde{i_k}!\widetilde{i_{k+1}}!}
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence.
Par conséquent, pour $k=n$, on obtient

$$\phi_n(a_1,..,a_n) = (-1)^n n! \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=n \\ i_1\geqslant 1,..,i_k\geqslant 1}} \frac{a_1^{i_1}\cdots a_k^{i_k}}{i_1!\cdots i_k!} = (-1)^n n! \frac{a_1^1\cdots a_n^1}{1!\cdots 1!} = (-1)^n n! a_1\cdots a_n$$

3. Il est immédiat que pour tout ensemble $I$, toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de $G$ et tout élément $a$ de $G$, on a

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) - a = \bigcap_{i\in I}(A_i - a)$$

ce qui entraine que

$$\begin{aligned}
U(g_1,..,g_{k-1}) &= \bigcap_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} (U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1})) \\
&= \bigcap_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} (U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1}+0.g_k)) \\
U(g_1,..,g_{k-1})-g_k &= \left[\bigcap_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} (U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1}))\right]-g_k \\
&= \bigcap_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} (U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1})-g_k)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& U(g_1,..,g_{k-1})\cap(U(g_1,..,g_{k-1})-g_k) \\
= & \bigcap_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})\in\{0,1\}^{k-1}} [(U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1}+0.g_k))\cap(U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1})-g_k)] \\
= & \bigcap_{(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)\in\{0,1\}^k} (U-(\varepsilon_1 g_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}g_{k-1}+\varepsilon_k g_k))
\end{aligned}$$

4. (a) On commence par remarquer que

$$\forall g\in G,\quad \overline{\mathbf{e}(\phi(g))} = \overline{e^{2\pi i\phi(g)}} = e^{-2\pi i\phi(g)} = \mathbf{e}(-\phi(g))$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}|S|^2 &= S\overline{S} = \sum_{g\in U}\mathbf{e}(\phi(g))\overline{\sum_{h\in U}\mathbf{e}(\phi(h))} = \sum_{g\in U}\mathbf{e}(\phi(g))\sum_{h\in U}\overline{\mathbf{e}(\phi(h))} = \sum_{g\in U}\mathbf{e}(\phi(g))\sum_{h\in U}\mathbf{e}(-\phi(h))\\ &= \sum_{g\in U}\sum_{h\in U}\mathbf{e}(\phi(g))\mathbf{e}(-\phi(h)) = \sum_{g,h\in U}\mathbf{e}(\phi(g)-\phi(h))\end{aligned}$$

(b) Considérons l'application

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} U^2 & \to & U^D \\ (g,h) & \mapsto & g-h\end{array}\right.$$

Par définition de $U^D$, l'application $\varphi$ est surjective. En outre, les ensembles $\varphi^{-1}(\{g_1\})$ et $\varphi^{-1}(\{g_2\})$ sont disjoints lorsque $g_1 \neq g_2$, ce qui nous fournit la partition de $U^2$ suivante

$$U^2 = \coprod_{g_1\in U^D}\varphi^{-1}(\{g_1\})$$

Déterminons $\varphi^{-1}(\{g_1\})$ pour $g_1 \in U^D$. Soit $(g,h)\in U^2$, on a

$$(g,h)\in\varphi^{-1}(\{g_1\}) \Leftrightarrow \varphi(g,h) = g_1 \Leftrightarrow g-h = g_1 \Leftrightarrow g = g_1+h \Leftrightarrow (g,h) = (g_1+h,h)$$

En outre, on a $h\in U$ par définition et l'égalité $h = g-g_1$ montre que $h\in U-g_1$ donc $h\in U\cap(U-g_1) = U(g_1)$ ce qui fournit l'inclusion ensembliste

$$\varphi^{-1}(\{g_1\}) \subset \{(g_1+h,h),\quad h\in U(g_1)\}$$

Réciproquement, si $h\in U(g_1)$ alors $h\in U$ et il existe $g\in U$ tel que

$$\begin{aligned}h &= g-g_1 \Leftrightarrow g = g_1+h \Leftrightarrow g_1 = g-h = \varphi(g,h) \Rightarrow (g,h) = (g_1+h,h)\in\varphi^{-1}(\{g_1\})\\ &\Rightarrow \{(g_1+h,h),\quad h\in U(g_1)\}\subset\varphi^{-1}(\{g_1\}) \Rightarrow \varphi^{-1}(\{g_1\}) = \{(g_1+h,h),\quad h\in U(g_1)\}\end{aligned}$$

Il est immédiat que

$$(g_1+h,h) = (g_1+h',h') \Leftrightarrow h = h'$$

ce qui nous donne une nouvelle décomposition de $U^2$

$$U^2 = \coprod_{g_1\in U^D}\varphi^{-1}(\{g_1\}) = \coprod_{g_1\in U^D}\coprod_{h\in U(g_1)}\{(g_1+h,h)\}$$

et en utilisant la question **V.4.a**, on obtient

$$|S|^2 = \sum_{g_1\in U^D}\sum_{h\in U(g_1)}\mathbf{e}(\phi(g_1+h)-\phi(h))$$

(c) On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\phi(g_1+g_2)-\phi(g_2) &= \phi_2(g_1,g_2)-\phi(0)+\phi(g_1)\\ \mathbf{e}(\phi(g_1+g_2)-\phi(g_2)) &= \mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))\mathbf{e}(-\phi(0)+\phi(g_1))\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|S|^2 &= \sum_{g_1\in U^D}\mathbf{e}(-\phi(0)+\phi(g_1))\sum_{g_2\in U(g_1)}\mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))\\ &= \left|\sum_{g_1\in U^D}\mathbf{e}(-\phi(0)+\phi(g_1))\sum_{g_2\in U(g_1)}\mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))\right| \quad (|S|^2\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow |S|^2 = \left||S|^2\right|)\\ &\leqslant \sum_{g_1\in U^D}\left|\mathbf{e}(-\phi(0)+\phi(g_1))\sum_{g_2\in U(g_1)}\mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))\right|\\ &= \sum_{g_1\in U^D}|\mathbf{e}(-\phi(0)+\phi(g_1))|\left|\sum_{g_2\in U(g_1)}\mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))\right| = \sum_{g_1\in U^D}\left|\sum_{g_2\in U(g_1)}\mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))\right|\end{aligned}$$

5. (a) Ce résulte du théorème de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1.x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

(b) Comme nous le propose l'énoncé, on procède par récurrence sur $k \geqslant 2$ en posant

$$(\mathcal{H}_k) : |S|^{2^{k-1}} \leqslant \left(\sharp U^D\right)^{2^{k-1}-k} \sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1,..,g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1,..,g_k)) \right|$$

**Initialisation** $k = 2$ : On a

$$\left(\sharp U^D\right)^{2^{2-1}-2} \sum_{(g_1)\in U^D} \left| \sum_{g_2 \in U(g_1)} \mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))) \right| = \sum_{(g_1)\in U^D} \left| \sum_{g_2 \in U(g_1)} \mathbf{e}(\phi_2(g_1,g_2))) \right| \geqslant |S|^2 = |S|^{2^{2-1}}$$

d'après la question **V.4.c** ce qui démontre $(\mathcal{H}_2)$.
**Hérédité** : Supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{k+1})$

$$\begin{aligned}
|S|^{2^{(k+1)-1}} &= |S|^{2^k} = \left(|S|^{2^{k-1}}\right)^2 \leqslant \left( \left(\sharp U^D\right)^{2^{k-1}-k} \sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1,..,g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1,..,g_k)) \right| \right)^2 \\
&= \left(\sharp U^D\right)^{2.2^{k-1}-2k} \left( \sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1,..,g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1,..,g_k)) \right| \right)^2 \\
&\leqslant \left(\sharp U^D\right)^{2^k-2k} \sharp\left((U^D)^{k-1}\right) \sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1,..,g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1,..,g_k)) \right|^2 \\
&= \left(\sharp U^D\right)^{2^k-2k} (\sharp U^D)^{k-1} \sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1,..,g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1,..,g_k)) \right|^2 \\
&= \left(\sharp U^D\right)^{2^k-k-1} \sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in (U^D)^{k-1}} \left| \sum_{g_k \in U(g_1,..,g_{k-1})} \mathbf{e}(\phi_k(g_1,..,g_k)) \right|^2
\end{aligned}$$

On fixe $(g_1,..,g_{k-1})$ puis on considère l'ensemble $\widetilde{U} = U(g_1,..,g_{k-1})$ et l'application $\widetilde{\phi} : \left\{ \begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \to & \mathbb{R} \\ g_k & \mapsto & \phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k) \end{array} \right.$.
D'après la question **V.4.c**, on a

$$\left| \sum_{g_k \in \widetilde{U}} \mathbf{e}(\widetilde{\phi}(g_k)) \right|^2 \leqslant \sum_{g_k \in \widetilde{U}^D} \left| \sum_{g_{k+1} \in \widetilde{U}(g_k)} \mathbf{e}(\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1})) \right|$$

Etant donné que $\widetilde{U} \subset U$, on a $\widetilde{U}^D \subset U^D$ (car $\forall g,h \in \widetilde{U}$, $\underbrace{g}_{\in U} - \underbrace{h}_{\in U} \in U^D$) donc

$$\sum_{g_k \in \widetilde{U}^D} \left| \sum_{g_{k+1} \in \widetilde{U}(g_k)} \mathbf{e}(\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1})) \right| \leqslant \sum_{g_k \in U^D} \left| \sum_{g_{k+1} \in \widetilde{U}(g_k)} \mathbf{e}(\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1})) \right|.$$

D'autre part, d'après la question **V.3**, on a

$$\widetilde{U}(g_k) = \widetilde{U} \cap \left(\widetilde{U} - g_k\right) = U(g_1,..,g_{k-1}) \cap (U(g_1,..,g_{k-1}) - g_k) = U(g_1,..,g_{k-1},g_k)$$

donc

$$\sum_{g_k \in U^D} \left| \sum_{g_{k+1} \in \widetilde{U}(g_k)} \mathbf{e}(\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1})) \right| = \sum_{g_k \in U^D} \left| \sum_{g_{k+1} \in U(g_1,..,g_k)} \mathbf{e}(\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1})) \right|.$$

Pour finir, en combinant les questions **V.1.a,b,c**, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1}) &= \widetilde{\phi}(0)-\widetilde{\phi}(g_k)-\widetilde{\phi}(g_{k+1})+\widetilde{\phi}(g_k+g_{k+1})\\ &= \phi_k(g_1,..,g_{k-1},0)-\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k)-\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_{k+1})+\phi_k(g_1,..,g_{k-1},g_k+g_{k+1})\\ &= \phi_{k+1}(g_1,..,g_{k+1})\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{g_k\in U^D}\left|\sum_{g_{k+1}\in U(g_1,..,g_k)}\mathbf{e}(\widetilde{\phi}_2(g_k,g_{k+1}))\right| = \sum_{g_k\in U^D}\left|\sum_{g_{k+1}\in U(g_1,..,g_k)}\mathbf{e}(\phi_{k+1}(g_1,..,g_{k+1}))\right|$$

Par conséquent, on obtient la majoration souhaitée

$$\begin{aligned}|S|^{2^{(k+1)-1}} &\leqslant \left(\sharp U^D\right)^{2^k-k-1}\sum_{(g_1,..,g_{k-1})\in(U^D)^{k-1}}\sum_{g_k\in U^D}\left|\sum_{g_{k+1}\in U(g_1,..,g_k)}\mathbf{e}(\phi_{k+1}(g_1,..,g_{k+1}))\right|\\ &= \left(\sharp U^D\right)^{2^k-k-1}\sum_{(g_1,..,g_k)\in(U^D)^k}\left|\sum_{g_{k+1}\in U(g_1,..,g_k)}\mathbf{e}(\phi_{k+1}(g_1,..,g_{k+1}))\right|\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence.

6. (a) En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\sum_{j=a}^{b}\mathbf{e}(\alpha nj)\right| \leqslant \sum_{j=a}^{b}|\mathbf{e}(\alpha nj)| = \sum_{j=a}^{b}1 = b-a+1$$

Lorsque $\alpha n\in\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{2}{|1-e(\alpha n)|}=+\infty$ donc

$$\min\left(\frac{2}{|1-e(\alpha n)|},b-a+1\right)=b-a+1\geqslant\left|\sum_{j=a}^{b}\mathbf{e}(\alpha nj)\right|.$$

Si $\alpha n\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (donc $\mathbf{e}(\alpha n)\neq 1$), on calcule la somme

$$\begin{aligned}\sum_{j=a}^{b}\mathbf{e}(\alpha nj) &= \mathbf{e}(\alpha na)+\cdots+\mathbf{e}(\alpha nb)=(\mathbf{e}(\alpha n))^a+\cdots+(\mathbf{e}(\alpha n))^b\\ &= (\mathbf{e}(\alpha n))^a\left(1+\cdots+(\mathbf{e}(\alpha n))^{b-a}\right)\underset{\mathbf{e}(\alpha n)\neq 1}{=}(\mathbf{e}(\alpha n))^a\frac{1-(\mathbf{e}(\alpha n))^{b-a+1}}{1-\mathbf{e}(\alpha n)}\\ \Rightarrow\quad\left|\sum_{j=a}^{b}\mathbf{e}(\alpha nj)\right| &= \frac{\left|1-(\mathbf{e}(\alpha n))^{b-a+1}\right|}{|1-\mathbf{e}(\alpha n)|}\leqslant\frac{2}{|1-\mathbf{e}(\alpha n)|}\\ \Rightarrow\quad\left|\sum_{j=a}^{b}\mathbf{e}(\alpha nj)\right| &\leqslant \min\left(\frac{2}{|1-e(\alpha n)|},b-a+1\right)\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\left|\sum_{j=a}^{b}\mathbf{e}(\alpha nj)\right|\leqslant\min\left(\frac{2}{|1-e(\alpha n)|},b-a+1\right)$$

(b) Pour tous $n,m$ appartenant à $\mathbb{Z}$ et pour tous réels $a,b$, on a

$$\|a+b\|\leqslant|a+b-(n+m)|=|(a-n)+(b-m)|\leqslant|a-n|+|b-m|$$

Si l'on fixe $m\in\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\forall n\quad\in\quad\mathbb{N},\quad |a-n|\geqslant\underbrace{\|a+b\|-|b-m|}_{\text{indépendant de }n}&\Rightarrow\|a\|\geqslant\|a+b\|-|b-m|\\ \Rightarrow\quad\forall m\in\mathbb{Z},\quad |b-m|\geqslant\underbrace{\|a+b\|-\|a\|}_{\text{indépendant de }m}&\Rightarrow\|b\|\geqslant\|a+b\|-\|b\|\\ \Leftrightarrow\quad\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|&\end{aligned}$$

(c) Etant donné que $n \mapsto n-1$ et $n \mapsto -n$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$, on a l'égalité ensembliste

$$\begin{array}{rcl} \forall x & \in & \mathbb{R}, \quad \{|x-n|, \quad n \in \mathbb{Z}\} = \{|x-(n-1)| = |(x+1)-n|, \quad n \in \mathbb{Z}\} \\ \forall x & \in & \mathbb{R}, \quad \{|x-n|, \quad n \in \mathbb{Z}\} = \{|x+n| = |-(x+n)| = |-x-n|, \quad n \in \mathbb{Z}\} \\ & \Rightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \|x\| = \|x+1\|, \quad \|x\| = \|-x\| \end{array}$$

Par conséquent, les fonctions $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto |1-\mathbf{e}(x)|$ sont 1-périodiques et paires car

$$|1-\mathbf{e}(-x)| = |\mathbf{e}(-x)(\mathbf{e}(x)-1)| = |\mathbf{e}(-x)|\,|\mathbf{e}(x)-1| = |\mathbf{e}(x)-1| = |1-\mathbf{e}(x)|$$

Pour démontrer l'inégalité, on peut se ramener à le montrer lorsque $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. En se rappelant de la fameuse minoration $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$ lorsque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad |1-\mathbf{e}(x)| = \left|1-e^{2\pi i x}\right| = \left|e^{\pi i x}\left(e^{-\pi i x}-e^{\pi i x}\right)\right| = 2\left|\sin(\pi x)\right| \underset{0 \leqslant \pi x \leqslant \pi/2}{=} 2\sin(\pi x) \geqslant 2 \times \frac{2}{\pi}\pi x = 4x$$

Lorsque $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\|x\| = x$ donc

$$|1-\mathbf{e}(x)| \geqslant 4\|x\| \underset{\|x\| \geqslant 0}{\geqslant} \|x\|.$$

(d) On a $S_B^1(\alpha) = \sum_{n \in U} \phi(n)$ avec $U = [0,B] \cap \mathbb{Z}$ et $\phi : n \mapsto \alpha n^d$. Il est immédiat que

$$U^D = [-B,B] \cap \mathbb{Z} = [-\lfloor B \rfloor, \lfloor B \rfloor] \Rightarrow \sharp U^D = 2\lfloor B \rfloor + 1 \leqslant 2B+1,$$

Montrons par récurrence sur $k$ la propriété $(\mathcal{H}_k)$ : " quels que soient les entiers naturels $n_1, .., n_k$, l'ensemble $U(n_1, .., n_k)$ est un intervalle entier $[\![\alpha_k, \beta_k]\!]$" (éventuellement vide lorsque $\alpha_k > \beta_k$).
**Initialisation** $k=0$ : $U(n_1, .., n_k) = U = [-\lfloor B \rfloor, \lfloor B \rfloor]$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
**Hérédité** : Supposons $(\mathcal{H}_k)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{k+1})$. D'après la question **V.3** et d'après $(\mathcal{H}_k)$, on a

$$\begin{array}{rcl} U(n_1, .., n_{k+1}) & = & U(n_1, .., n_k) \cap (U(n_1, .., n_k) - n_{k+1}) \\ & = & [\![\alpha_k, \beta_k]\!] \cap [\![\alpha_k - n_{k+1}, \beta_k - n_{k+1}]\!] = [\![\alpha_k, \beta_k - n_{k+1}]\!] \end{array}$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence.
Les questions **V.5.b** et **V.2.b** appliquées à $S_B^1$, $U$, $\phi$ et $k=d$ ($2^{d-1} \geqslant d$ par récurrence sur $d$) nous donnent

$$\left|S_B^1(\alpha)\right|^{2^d-1} \leqslant (2B+1)^{2^{d-1}-d} \sum_{(n_1,..,n_{d-1}) \in ([-B,B] \cap \mathbb{Z})^{d-1}} \left| \sum_{n_d \in [\![\alpha_{d-1}, \beta_{d-1}]\!]} \mathbf{e}((-1)^d d! n_1 \cdots n_{d-1} \alpha) \right|$$

Etant donné que $\mathbf{e}((-1)^d n_1 \cdots n_{d-1}\alpha) = \mathbf{e}(n_1 \cdots n_{d-1}\alpha)$ ou $\mathbf{e}(-n_1 \cdots n_{d-1}\alpha) = \overline{\mathbf{e}(n_1 \cdots n_{d-1}\alpha)}$ selon la parité de $d$, on a

$$\left| \sum_{n_d \in [\![\alpha_{d-1}, \beta_{d-1}]\!]} \mathbf{e}((-1)^d d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha) \right| = \left| \sum_{n_d \in [\![\alpha_{d-1}, \beta_{d-1}]\!]} \mathbf{e}(d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha) \right|$$

On combinant cette égalité à la question **V.6.c** et en remarquant que par construction de $\alpha_k$ et $\beta_k$, on a

$$[\![\alpha_{d-1}, \beta_{d-1}]\!] \subset [\![\alpha_0, \beta_0]\!] = [\![0, \lfloor B \rfloor]\!] \Rightarrow \beta_{d-1} - \alpha_{d-1} \leqslant \lfloor B \rfloor \leqslant B,$$

ce qui nous fournit la majoration

$$\begin{array}{rcl} \left|S_B^1(\alpha)\right|^{2^d-1} & \leqslant & (2B+1)^{2^{d-1}-d} \sum_{(n_1,..,n_{d-1}) \in ([-B,B] \cap \mathbb{Z})^{d-1}} \left| \sum_{n_d \in [\![\alpha_{d-1}, \beta_{d-1}]\!]} \mathbf{e}(d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha) \right| \\ & \leqslant & (2B+1)^{2^{d-1}-d} \sum_{(n_1,..,n_{d-1}) \in ([-B,B] \cap \mathbb{Z})^{d-1}} \min\left( \frac{2}{\|d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha\|}, \beta_{d-1} - \alpha_{d-1} + 1 \right) \\ & \leqslant & (2B+1)^{2^{d-1}-d} \sum_{(n_1,..,n_{d-1}) \in ([-B,B] \cap \mathbb{Z})^{d-1}} \min\left( \frac{2}{\|d! n_1 \cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1 \right) \end{array}$$

(e) i. Si l'on note respectivement $\widetilde{N}_B^\alpha$ et $\widetilde{M}_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$ les ensembles dont $N_B^\alpha$ et $M_B^\alpha(n_1,.,n_{d-2})$ sont les cardinaux, on a immédiatement l'union disjointe

$$\widetilde{N}_B^\alpha = \coprod_{(n_1,..,n_{d-2})\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{d-2}} \widetilde{M}_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2}) \Rightarrow N_B^\alpha = \sum_{(n_1,..,n_{d-2})\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{d-2}} M_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$$

ii. On note

$$\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2}) = \left\{ n_{d-1}\in[-B,B]\cap\mathbb{Z} \quad / \quad \{d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\} \in \left[\frac{\delta}{B},\frac{\delta+1}{B}\right[ \right\}$$

C'est clairement un ensemble fini. Si $\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})=\emptyset$, la majoration souhaitée est évidente. Sinon, soient $n_{d-1}$ et $n'_{d-1}$ deux éléments de $\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$, on a

$$(1): \frac{\delta}{B} \leqslant d!n_1\cdots n_{d-2}n_{d-1}\alpha - \lfloor d!n_1\cdots n_{d-2}n_{d-1}\alpha\rfloor < \frac{\delta+1}{B}$$
$$(2): \frac{\delta}{B} \leqslant d!n_1\cdots n_{d-2}n'_{d-1}\alpha - \lfloor d!n_1\cdots n_{d-2}n'_{d-1}\alpha\rfloor < \frac{\delta+1}{B}$$
$$(1)-(2): -\frac{1}{B} < d!n_1\cdots n_{d-2}(n_{d-1}-n'_{d-1})\alpha - \left(\lfloor d!n_1\cdots n_{d-2}n_{d-1}\alpha\rfloor - \lfloor d!n_1\cdots n_{d-2}n'_{d-1}\alpha\rfloor\right) < \frac{1}{B}$$
$$\Rightarrow \left| d!n_1\cdots n_{d-2}(n_{d-1}-n'_{d-1})\alpha - \underbrace{\left(\lfloor d!n_1\cdots n_{d-2}n_{d-1}\alpha\rfloor - \lfloor d!n_1\cdots n_{d-2}n'_{d-1}\alpha\rfloor\right)}_{\in\mathbb{Z}} \right| < \frac{1}{B}$$
$$\Rightarrow \left\| d!n_1\cdots n_{d-2}(n_{d-1}-n'_{d-1})\alpha \right\| < \frac{1}{B}$$

On considère $n_{d-1}^0 = \min \widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$ et $n_{d-1}^1 = \max \widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$. Par définition,

$$\forall n_{d-1}\in\widetilde{P_{B,\delta}^\alpha}(n_1,..,n_{d-2}), \quad -B\leqslant n_{d-1}^0\leqslant n_{d-1}\leqslant n_{d-1}^1\leqslant B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0\leqslant n_{d-1}-n_{d-1}^0 \\ n_{d-1}-n_{d-1}^1\leqslant 0 \end{array}\right.$$

Si $n_{d-1}\in\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})\cap\mathbb{N}$ alors on a nécessairement $n_{d-1}^1\geqslant 0$, ce qui nous donne

$$-B\leqslant -n_{d-1}^1 \underset{n_{d-1}\geqslant 0}{\leqslant} n_{d-1}-n_{d-1}^1\leqslant 0 \Rightarrow n_{d-1}-n_{d-1}^1\in[-B,B]\cap\mathbb{Z}$$
$$\text{et } \left\|d!n_1\cdots n_{d-2}(n_{d-1}-n_{d-1}^1)\alpha\right\| < \frac{1}{B} \Rightarrow n_{d-1}-n_{d-1}^1\in\widetilde{M}_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$$
$$\Leftrightarrow n_{d-1}\in n_{d-1}^1+\widetilde{M}_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2}) \Rightarrow \sharp(\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})\cap\mathbb{N})\leqslant M_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$$

Si $n_{d-1}\in\widetilde{P_{B,\delta}^\alpha}(n_1,..,n_{d-2})\cap(-\mathbb{N})$ alors on a nécessairement $n_{d-1}^0\leqslant 0$, ce qui nous donne

$$0\leqslant n_{d-1}-n_{d-1}^0 \underset{n_{d-1}\leqslant 0}{\leqslant} -n_{d-1}^0\leqslant B \Rightarrow n_{d-1}-n_{d-1}^0\in[-B,B]\cap\mathbb{Z}$$
$$\text{et } \left\|d!n_1\cdots n_{d-2}(n_{d-1}-n_{d-1}^0)\alpha\right\| < \frac{1}{B} \Rightarrow n_{d-1}-n_{d-1}^0\in\widetilde{M}_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$$
$$\Leftrightarrow n_{d-1}\in n_{d-1}^0+\widetilde{M}_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2}) \Rightarrow \sharp(\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})\cap(-\mathbb{N}))\leqslant M_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$$

Par conséquent, on obtient la majoration souhaitée car

$$\sharp\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})\leqslant\sharp(\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})\cap\mathbb{N})+\sharp(\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})\cap(-\mathbb{N}))\leqslant 2M_B^\alpha(n_1,..,n_{d-2})$$

iii. Puisque $[0,B]\cap\mathbb{Z}=[\![0,\lfloor B\rfloor]\!]$, on a $S_B^1(\alpha)=S_{\lfloor B\rfloor}^1(\alpha)$. Si l'on montre la majoration demandée lorsque $B$ est entier, on aura alors

$$\left|S_B^1(\alpha)\right|^{2^{d-1}} = \left|S_{\lfloor B\rfloor}^1(\alpha)\right|^{2^{d-1}} \leqslant 8(2\lfloor B\rfloor+1)^{2^{d-1}-d+1}(\ln(\lfloor B\rfloor)+1)N_{\lfloor B\rfloor}^\alpha \underset{\lfloor B\rfloor\leqslant B}{\leqslant} 8(2B+1)^{2^{d-1}-d+1}(\ln(B)+1)N_{\lfloor B\rfloor}^\alpha$$

on aura ainsi montrer le cas où $B$ est un réel quelconque supérieur ou égal à 1. On suppose désormais que $B$ est un entier naturel supérieur à 1. D'après la question **V.6.d**, on a

$$\begin{aligned}\left|S_B^1(\alpha)\right|^{2^d-1} &\leqslant (2B+1)^{2^{d-1}-d}\sum_{(n_1,..,n_{d-1})\in([\![-B,B]\!])^{d-1}}\min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|},B+1\right)\\ &= (2B+1)^{2^{d-1}-d}\sum_{(n_1,..,n_{d-2})\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{d-2}}\sum_{\delta=0}^{B-1}\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}_{B,\delta}^\alpha(n_1,..,n_{d-2})}\min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|},B+1\right)\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, étant donné que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, on en déduit que

$$\|x\| = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & \text{si } 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor \leqslant \frac{1}{2} \\ \lfloor x \rfloor + 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1 \end{cases} = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 \leqslant \{x\} \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 - \{x\} & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1 \end{cases}$$

- si $\dfrac{\delta+1}{B} \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \delta \leqslant \dfrac{B}{2} - 1 \Leftrightarrow \delta \leqslant \lfloor \dfrac{B}{2} \rfloor - 1$ alors

$$\begin{aligned} \forall n_{d-1} \quad \in \quad & \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2}), \quad \|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\| = \{d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\} \in \left[\frac{\delta}{B}, \frac{\delta+1}{B}\right] \\ \Rightarrow \quad & \frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|} \leqslant \frac{2B}{\delta} \underset{\text{si } \delta \geqslant 2}{\leqslant} B \leqslant B+1 \\ \Rightarrow \quad & \min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right) = \frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|} \text{ si } 2 \leqslant \delta \leqslant \lfloor \frac{B}{2} \rfloor - 1 \end{aligned}$$

  Si $\delta \in \{0,1\}$ alors $\min\left(\dfrac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right) \leqslant B+1$.

- si $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\delta}{B} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{B}{2} < \delta < B \Leftrightarrow \lfloor \dfrac{B}{2} \rfloor + 1 \leqslant \delta \leqslant B$ alors

$$\begin{aligned} \forall n_{d-1} \quad \in \quad & \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2}), \quad \|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\| = 1 - \{d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\} \in \left]1 - \frac{\delta+1}{B}, 1 - \frac{\delta}{B}\right[ \\ \Rightarrow \quad & \frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|} \leqslant \frac{2}{1 - \dfrac{\delta+1}{B}} \underset{\text{si } \delta \leqslant B-3}{\leqslant} \frac{2}{1 - \dfrac{B-2}{B}} = B \leqslant B+1 \\ \Rightarrow \quad & \min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right) = \frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|} \text{ si } \lfloor \frac{B}{2} \rfloor + 1 < \delta \leqslant B-3 \end{aligned}$$

  Si $\delta \in \{B-2, B-1\}$ alors $\min\left(\dfrac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right) \leqslant B+1$.

On en déduit les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{\delta \in \{0,1,B-2,B-1\}} \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right) &\leqslant \sum_{\delta \in \{0,1,B-2,B-1\}} \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} (B+1) \\ = 4(B+1) \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} 1 &= 4(B+1) M^{\alpha}_{B}(n_1,..,n_{d-2}) = 4(B+1)\ln(B)\, M^{\alpha}_{\lfloor B \rfloor}(n_1,..,n_{d-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leqslant \delta \leqslant B/2-1} \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}, B+1\right) &\leqslant \sum_{2 \leqslant \delta \leqslant \lfloor B/2 \rfloor - 1} \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|} \\ \leqslant \sum_{2 \leqslant \delta \leqslant \lfloor B/2 \rfloor - 1} \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \frac{2B}{\delta} &= 2B \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \sum_{2 \leqslant \delta \leqslant \lfloor B/2 \rfloor - 1} \frac{1}{\delta} \\ \leqslant 2B \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \sum_{2 \leqslant \delta \leqslant \lfloor B/2 \rfloor - 1} \int_{\delta-1}^{\delta} \frac{dt}{t} &= 2B \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \int_{1}^{\lfloor B/2 \rfloor - 1} \frac{dt}{t} \\ = 2B \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \ln(\lfloor B/2 \rfloor - 1) &\leqslant 2B \sum_{n_{d-1} \in \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \ln(B) \\ = 2B\ln(B) \sharp \widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2}) \leqslant 4B\ln(B)\, M^{\alpha}_{B}(n_1,..,n_{d-2}) &= 4B\ln(B)\, M^{\alpha}_{\lfloor B \rfloor}(n_1,..,n_{d-2}) \end{aligned}$$

$$\sum_{B/2<\delta\leqslant B-3}\ \sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \min\left(\frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|},B+1\right)$$

$$\leqslant \sum_{\lfloor B/2\rfloor+1<\delta\leqslant B-3}\ \sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \frac{2}{\|d!n_1\cdots n_{d-1}\alpha\|}$$

$$\leqslant \sum_{\lfloor B/2\rfloor+1<\delta\leqslant B-3}\ \sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})} \frac{2}{1-\dfrac{\delta+1}{B}} = 2\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})}\ \sum_{\lfloor B/2\rfloor+1<\delta\leqslant B-3}\frac{B}{B+1-\delta}$$

$$\underset{i=B+1-\delta}{=} 2B\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})}\ \sum_{4<q\leqslant B-\lfloor B/2\rfloor}\frac{1}{q}\leqslant 2B\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})}\ \sum_{4<q\leqslant B-\lfloor B/2\rfloor}\int_{q-1}^{q}\frac{dt}{t}$$

$$= 2B\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})}\int_{3}^{B-\lfloor B/2\rfloor}\frac{dt}{t} = 2B\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})}\left[\ln\left(B-\lfloor B/2\rfloor\right)-\ln(3)\right)$$

$$\leqslant 2B\sum_{n_{d-1}\in\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})}\ln B = 2B(\ln B)\,\sharp\,\widetilde{P}^{\alpha}_{B,\delta}(n_1,..,n_{d-2})$$

$$\leqslant 4B(\ln B)M^{\alpha}_{B}(n_1,..,n_{d-2}) = 4B\ln(B)\,M^{\alpha}_{\lfloor B\rfloor}(n_1,..,n_{d-2})$$

En combinant ces trois majorations et en utilisant la question **V.6.e.i**, on obtient la majoration souhaitée

$$\left|S^1_B(\alpha)\right|^{2^{d-1}} \leqslant (2B+1)^{2^{d-1}-d}\left[\underbrace{4(B+1)}_{\leqslant 8(4B+1)}+\underbrace{8B}_{\leqslant 8(2B+1)}(\ln B)\right]\underbrace{\sum_{(n_1,..,n_{d-2})\in([-B,B]\cap\mathbb{Z})^{d-2}} M^{\alpha}_{\lfloor B\rfloor}(n_1,..,n_{d-2})}_{=N^{\alpha}_{\lfloor B\rfloor}}$$

$$= 8(2B+1)^{2^{d-1}-d+1}\left[1+\ln(B)\right]N^{\alpha}_{\lfloor B\rfloor}$$

$$\left|S^1_B(\alpha)\right|^{2^{d-1}} \leqslant 8(2B+1)^{2^{d-1}-d+1}(\ln(B)+1)N^{\alpha}_{\lfloor B\rfloor}.$$

7. (a) En remarquant que $\forall x\in\mathbb{R},\quad \|-x\|=\|x\|,\quad \|x\|\leqslant|x|$ (puisque $|x|=|x-0|\geqslant\|x\|$), $\quad|y-y'|\leqslant q$ et en utilisant la question **V.6.b**, on a

$$\left\|\frac{a}{q}(y-y')\right\| = \left\|\left(\frac{a}{q}-\alpha\right)(y-y')+\alpha(y-y')\right\| = \left\|\left(\frac{a}{q}-\alpha\right)(y-y')+\alpha(y+x_0)-\alpha(y'+x_0)\right\|$$

$$\leqslant \left\|\left(\frac{a}{q}-\alpha\right)(y-y')\right\|+\|\alpha(y+x_0)\|+\|\alpha(y'+x_0)\|$$

$$\leqslant \left|\left(\frac{a}{q}-\alpha\right)(y-y')\right|+\frac{1}{B}+\frac{1}{B}<\frac{1}{q^2}.q+\frac{2}{B}=\frac{2}{B}+\frac{1}{q}.$$

(b) Soit $z\in\mathbb{Z}$ tel que $\left\|\frac{a}{q}z\right\|<\frac{2}{B}+\frac{1}{q}$. Il existe $m_z\in\mathbb{Z}$ tel que

$$\left|\frac{a}{q}z-m_z\right| = \left\|\frac{a}{q}z\right\| < \frac{2}{B}+\frac{1}{q}\Leftrightarrow|az-qm_z|\leqslant\frac{2q}{B}+1\Leftrightarrow|az-qm_z|\leqslant\lfloor\frac{2q}{B}\rfloor+1$$

donc $az-qm_z$ prend au plus

$$2\left(\lfloor\frac{2q}{B}\rfloor+1\right)+1\leqslant 2\left(\frac{2q}{B}+1\right)+1=\frac{4q}{B}+3\leqslant 4\left(\frac{q}{B}+1\right)=4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)$$

valeurs distinctes. Etant donné que $az-qm_z$ étant un représentant de $az \bmod q$, $az \bmod q$ prend au plus $4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)$ valeurs distinctes et puisque l'application $x \bmod q\mapsto ax \bmod q$ est bijective (car $\text{pgcd}(a,q)=1$), on en déduit que $z \bmod q$ prend au plus $4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)$ valeurs distinctes.

(c) On désigne par $A$ cet ensemble. S'il est vide, le résultat est démontré. Sinon, soient $y'$ (fixé) et $y$ des éléments de $A$ alors, d'après la question **V.7.a**, $\left\|\frac{a}{q}(y-y')\right\|<\frac{2}{B}+\frac{1}{q}$ donc, d'après la question **V.7.b**,

$$\sharp\left\{y-y',\quad y\in A\right\}\leqslant 4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\Leftrightarrow\sharp A=\sharp\left\{y,\quad y\in A\right\}\leqslant 4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)$$

(puisque $y \mapsto y - y'$ est clairement une bijection).

(d) On note $C$ l'ensemble considéré. On désigne par $r$ le plus petit entier tel que

$$(r+1)q \geqslant d!B^{d-1} \Leftrightarrow \underbrace{r+1}_{\in\mathbb{N}} \geqslant \frac{d!B^{d-1}}{q} \Leftrightarrow r+1 = \lfloor d!B^{d-1}/q \rfloor + 1 \Leftrightarrow r = \lfloor d!B^{d-1}/q \rfloor$$

Par définition de $r$, on a $rq < d!B^{d-1} \Leftrightarrow rq+1 \leqslant d!B^{d-1}$ donc

$$[\![1, d!B^{d-1}]\!] \subset \coprod_{k=0}^{\lfloor d!B^{d-1}/q \rfloor} [\![kq+1, (k+1)q]\!]$$

ce qui nous donne

$$C \subset \coprod_{k=0}^{\lfloor d!B^{d-1}/q \rfloor} (C \cap [\![kq+1, (k+1)q]\!]) \Rightarrow \sharp C \leqslant \sum_{k=0}^{\lfloor d!B^{d-1}/q \rfloor} \sharp(C \cap [\![kq+1, (k+1)q]\!])$$

Or tout élément $x$ de $C \cap [\![kq+1, (k+1)q]\!]$ s'écrit $x = y + kq$ avec $1 \leqslant y \leqslant q$ et $\|\alpha(y+kq)\| < \dfrac{1}{B}$. La question **V.7.c** appliquée à $x_0 = kq$ nous donne

$$\sharp(C \cap [\![kq+1, (k+1)q]\!]) \leqslant 4q\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{q}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sharp C = \sum_{k=0}^{\lfloor d!B^{d-1}/q \rfloor} 4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right) &\leqslant 4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(\lfloor \frac{d!B^{d-1}}{q} \rfloor + 1\right) \leqslant 4q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{d!B^{d-1}}{q}+1\right) \\ &= 4d!q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{B^{d-1}}{q}+\frac{1}{d!}\right) \leqslant 4d!q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{B^{d-1}}{q}+1\right)\end{aligned}$$

8. (a) Il est immédiat que $\tau(1) = 1$ et $\tau(1 \times n) = \tau(n) = \tau(n) \times \tau(1)$. Soient $n$ et $m$ sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Si l'on considère la décomposition en produit de facteurs premiers $n = \prod_{p\in A} p^{\alpha_p}$ et $m = \prod_{p\in B} p^{\beta_p}$ alors le fait que $n$ et $m$ sont premiers entre eux se traduit par le fait que $A \cap B = \emptyset$. Si $k$ est un diviseur de $nm$ alors $k = \prod_{p\in A} p^{\alpha'_p} \prod_{p\in B} p^{\beta'_p}$ avec $\forall p \in A \cup B, \quad \begin{cases} \alpha'_p \leqslant \alpha_p \\ \beta'_p \leqslant \beta_p \end{cases}$. Si l'on note $q = \prod_{p\in A} p^{\alpha'_p}$ et $r = \prod_{p\in B} p^{\beta'_p}$ alors $k = qr$ avec $q$ divisant $n$ et $r$ divisant $m$. Ainsi, tout diviseur de $nm$ est le produit d'un diviseur de $n$ et d'un diviseur de $m$. En outre, si $q'$ et $r'$ sont des diviseurs respectifs de $n$ et $m$ avec $nm = q'r'$, l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers étant unique (à l'ordre près), on en déduit que $q = q'$ et $r = r'$. Par conséquent, l'application $(q, r) \mapsto qr$ est une bijection du produit de l'ensemble des diviseurs de $n$ par l'ensemble des diviseurs de $m$ sur l'ensemble des diviseurs de $nm$ donc $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$.

(b) Si $n = p^\alpha$ avec $p$ premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Les seuls diviseurs de $p^\alpha$ sont les $(p^k)_{0\leqslant k\leqslant\alpha}$ qui sont au nombre de $\alpha+1$ donc $\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$. Si $n = \prod_{p\in A} p^{\alpha_p}$ où $A$ est un sous-ensemble fini de l'ensemble des nombres premiers et les $(\alpha_p)_{p\in A}$ sont des entiers naturels, par multiplicativité de $\tau$, on a $\tau(n) = \prod_{p\in A}(1+\alpha_p)$. Montrer l'existence d'une constante $C$ (dépendant à priori de $\varepsilon$ mais indépendante de $n$, i.e. de $A$ et des $\alpha_p$) telle que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \tau(n) \leqslant Cn^\varepsilon &\Leftrightarrow \ln\tau(n) - \varepsilon\ln n \leqslant \ln C \Leftrightarrow \sum_{p\in A}\ln(1+\alpha_p) - \varepsilon\sum_{p\in A}\alpha_p \ln p \leqslant \ln C \\ &\Leftrightarrow \sum_{p\in A}[\ln(1+\alpha_p) - \varepsilon(\alpha_p \ln p)] \leqslant \ln C\end{aligned}$$

Etant donné que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) \leqslant x$ donc $\ln(1+\alpha_p) - \varepsilon(\alpha_p \ln p) \leqslant \alpha_p(1 - \varepsilon\ln p) \leqslant 0$ quand $1 - \varepsilon\ln p \leqslant 0$. On considère l'ensemble $B_\varepsilon = \{p \text{ premier tel que } 1 - \varepsilon\ln p \leqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\}$. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers alors $\mathcal{P}\backslash B_\varepsilon$ est un ensemble fini, soit $p_\varepsilon$ son maximum (indépendant de $A$ donc de $n$). La fonction $x \mapsto \ln(1+x) - \varepsilon x \ln p_\varepsilon$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers $-\infty$ quand $x \mapsto +\infty$ donc elle est majorée sur

$\mathbb{R}_+$ par une certaine constante $M_\varepsilon$ (indépendant de $A$ et des $\alpha_p$ donc de $n$). On en déduit que

$$\begin{aligned}\ln\tau(n)-\varepsilon\ln n &\leqslant \sum_{p\in A}[\ln(1+\alpha_p)-\varepsilon(\alpha_p\ln p)] = \sum_{p\in A\cap B_\varepsilon}\underbrace{[\ln(1+\alpha_p)-\varepsilon(\alpha_p\ln p)]}_{\leqslant 0}+\sum_{p\in A\setminus B_\varepsilon}[\ln(1+\alpha_p)-\varepsilon(\alpha_p\ln p)]\\ &\leqslant \sum_{p\in A\cap B_\varepsilon}\underbrace{\alpha_p(1-\varepsilon\ln p)}_{\leqslant 0}+\sum_{p\in A\setminus B_\varepsilon}M_\varepsilon \leqslant \sum_{p\in\mathcal{P}\setminus B_\varepsilon}M_\varepsilon = M_\varepsilon\sharp(\mathcal{P}\setminus B_\varepsilon)\\ &\Rightarrow \quad \forall n\in\mathbb{N}^\times,\quad \tau(n)\leqslant \underbrace{\exp\left(M_\varepsilon\sharp(\mathcal{P}\setminus B_\varepsilon)\right)}_{=C}n^\varepsilon\end{aligned}$$

9. D'après la question **V.6.e.iii**, il suffit d'obtenir une majoration de $N^\alpha_{\lfloor B\rfloor}$. On considère les ensembles

$$D=\left\{x\in\mathbb{Z}\quad/\quad |x|\leqslant d!B^{d-1}\text{ et }\|\alpha x\|<\frac{1}{B}\right\},\quad C=\left\{x\in\mathbb{Z}\quad/\quad 1\leqslant x\leqslant d!B^{d-1}\text{ et }\|\alpha x\|<\frac{1}{B}\right\}$$

Il est immédiat que l'on dispose de l'union disjointe

$$D=\{0\}\cup(D\cap\mathbb{N}^\times)\cup(D\cap\mathbb{Z}^\times_-)=\{0\}\cup C\cup(D\cap\mathbb{Z}^\times_-)$$

L'application $x\mapsto -x$ est une bijection de $D\cap\mathbb{Z}^\times_-$ sur $C$ donc $\sharp D=1+2.\sharp C$. L'application

$$\varphi:(n_1,..,n_{d-1})\in\widetilde{N}^\alpha_B\mapsto d!n_1\cdots n_{d-1}\in D$$

est une surjection donc on dispose de l'union disjointe suivante

$$\widetilde{N}^\alpha_B=\coprod_{m\in D}\varphi^{-1}(\{m\})\Rightarrow\sharp\widetilde{N}^\alpha_B=\sum_{m\in D}\sharp(\varphi^{-1}(\{m\}))$$

Il reste donc à majorer le cardinal de chaque $\varphi^{-1}(\{m\})$.

- $m=0$ :

$$\begin{aligned}(n_1,..,n_{d-1}) &\in \varphi^{-1}(\{0\})\Leftrightarrow\varphi(n_1,..,n_{d-1})=0\Leftrightarrow n_1\cdots n_{d-1}=0\Leftrightarrow\exists i\quad/\quad n_i=0\\ &\Leftrightarrow (n_1,..,n_{d-1})\in[\![-\lfloor B\rfloor,\lfloor B\rfloor]\!]^{d-1}\setminus\left\{[\![-\lfloor B\rfloor,\lfloor B\rfloor]\!]^{d-1}\setminus\{(0,..,0)\}\right\}\\ &\Rightarrow \sharp(\varphi^{-1}(\{0\}))=(2\lfloor B\rfloor+1)^{d-1}-(2\lfloor B\rfloor)^{d-1}\\ &= \sum_{k=0}^{d-2}\binom{d-1}{k}2^k\lfloor B\rfloor^k\leqslant\lfloor B\rfloor^{d-2}\sum_{k=0}^{d-2}\binom{d-1}{k}2^k\leqslant\lfloor B\rfloor^{d-2}\sum_{k=0}^{d-1}\binom{d-1}{k}2^k=3^{d-1}\lfloor B\rfloor^{d-2}\leqslant 3^{d-1}B^{d-2}\end{aligned}$$

- $m\geqslant 1$ :

$$(n_1,..,n_{d-1})\in\varphi^{-1}(\{m\})\Leftrightarrow\varphi(n_1,..,n_{d-1})=m\Leftrightarrow n_1\cdots n_{d-1}=m\Rightarrow|n_1|\cdots|n_{d-1}|=|m|$$

Par conséquent, chaque $|n_i|$ est un diviseur positif de $|m|$ or, d'après la question **V.8.b**, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $C_\varepsilon$ (ne dépendant que de $\varepsilon$ et pas de $m$) telle que le nombre $\tau(|m|)$ de diviseurs positifs de $|m|$ vérifie

$$\tau(|m|)\leqslant C_\varepsilon|m|^\varepsilon\leqslant C_\varepsilon\lfloor B\rfloor^\varepsilon\leqslant C_\varepsilon B^\varepsilon$$

On en déduit que $(|n_1|,..,|n_{d-1}|)$ prend au plus $(C_\varepsilon B^\varepsilon)^{d-1}$ valeurs distinctes donc $(n_1,..,n_{d-1})$ prend au plus $2^{d-1}(C_\varepsilon B^\varepsilon)^{d-1}$ valeurs distinctes (si $|n_i|$ est donné, $n_i$ ne peut prendre que 2 valeurs $\pm|n_i|$). En remplaçant $\varepsilon$ par $\dfrac{\varepsilon}{d-1}$ et en posant $D_\varepsilon=(C_\varepsilon)^{d-1}$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $D_\varepsilon$ (dépendant uniquement de $\varepsilon$ et $d$) telle que

$$\forall m\in D\setminus\{0\},\quad\sharp(\varphi^{-1}(\{m\}))\leqslant 2^{d-1}D_\varepsilon B^\varepsilon$$

En combinant ces majorations à la question **V.7.d**, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\sharp\widetilde{N}^\alpha_B &= \sharp(\varphi^{-1}(0))+\sum_{m\in D\setminus\{0\}}\sharp(\varphi^{-1}(\{m\}))\leqslant 3^{d-1}B^{d-2}+\sum_{m\in D}2^{d-1}D_\varepsilon B^\varepsilon=3^{d-1}B^{d-2}+2^{d-1}D_\varepsilon B^\varepsilon(\sharp D)\\ &\leqslant 3^{d-1}B^{d-2}+2^{d-1}D_\varepsilon B^\varepsilon(1+8d!q\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{B^{d-1}}{q}+1\right))\end{aligned}$$

En posant $E_\varepsilon = \max(3^{d-1}, 2^{d-1}D_\varepsilon 8d!)$ (constante ne dépendant que de $\varepsilon$ et $d$) et en factorisant par $B^{d-1+\varepsilon}$ (la plus grande puissance intervenant dans la majoration), on obtient

$$\begin{aligned}
\sharp\widetilde{N}_B^\alpha &\leqslant E_\varepsilon B^{d-1+\varepsilon}\left[\frac{1}{B^{1+\varepsilon}} + \left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{q}{B^{d-1}}\right)\right] \underset{B\geqslant 1}{\leqslant} E_\varepsilon B^{d-1+\varepsilon}\left[\frac{1}{B} + \left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{q}{B^{d-1}}\right)\right] \\
&= E_\varepsilon B^{d-1+\varepsilon}\left[\frac{2}{B}+\frac{1}{q}+\frac{1}{B^{d-1}}+\frac{q}{B^d}\right] \underset{B\geqslant 1,\ d-1\geqslant 1}{\leqslant} E_\varepsilon B^{d-1+\varepsilon}\left[\frac{3}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right] \\
&\leqslant 3E_\varepsilon B^{d-1+\varepsilon}\left[\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right] \leqslant 3E_\varepsilon(2B+1)^{d-1+\varepsilon}\left[\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right]
\end{aligned}$$

A l'aide de la question **V.6.e.iii**, on en déduit

$$\left|S_B^1(\alpha)\right|^{2^{d-1}} \leqslant 24E_\varepsilon(2B+1)^{2^{d-1}+\varepsilon}(\ln(B)+1)\left[\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right]$$

D'après les croissances comparées, $\ln(B)+1 \underset{B\to+\infty}{=} o((2B+1)^\varepsilon)$ donc la fonction $B \mapsto \dfrac{\ln(B)+1}{(2B+1)^\varepsilon}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. Par conséquent, elle est bornée sur $[1,+\infty[$, ce qui entraine l'existence d'une constante $F_\varepsilon$ (ne dépendant que de $\varepsilon$) telle que

$$\forall B \geqslant 1, \quad \ln(B)+1 \leqslant F_\varepsilon(2B+1)^\varepsilon.$$

En posant $G_\varepsilon = 16E_\varepsilon F_\varepsilon$ (constante ne dépendant que de $\varepsilon$ et $d$), on en déduit la majoration

$$\begin{aligned}
\left|S_B^1(\alpha)\right|^{2^{d-1}} &\leqslant 24E_\varepsilon F_\varepsilon(2B+1)^{2^{d-1}+2\varepsilon}\left[\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right] \\
&\Leftrightarrow \left|S_B^1(\alpha)\right| \leqslant (24E_\varepsilon F_\varepsilon)^{1/2^{d-1}}(2B+1)^{1+\varepsilon/2^{d-2}}\left[\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right]^{1/2^{d-1}}
\end{aligned}$$

En remplaçant $\varepsilon$ par $2^{d-2}\varepsilon$ et en posant $G_\varepsilon = (24E_\varepsilon F_\varepsilon)^{1/2^{d-1}}$ (constante ne dépendant que de $\varepsilon$ et $d$), on obtient le résultat escompté.

10. (a) On remarque que $[0,1[ = \bigsqcup_{i=0}^{N-1}\left[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}\right[$ donc $[0,1[$ est la réunion disjointe de $N$ intervalles $\left[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}\right[$. Pour chaque $\{s\alpha\}$, $0 \leqslant s \leqslant N$, il existe un unique $i_s \in [\![0,N-1]\!]$ tel que $\{s\alpha\} \in \left[\frac{i_z}{N},\frac{i_s+1}{N}\right[$. Si cette application $s \mapsto i_s$ est injective, alors elle fournit une injection de $[\![0,N]\!]$, qui est de cardinal $N+1$, dans $[\![0,N-1]\!]$, qui est de cardinal $N$, ce qui fournit une contradition. Par conséquent, elle est injective, i.e. il existe deux éléments $j,k$ distincts de $[\![0,N]\!]$ tels que $i_j = i_k \Leftrightarrow \{j\alpha\}$ et $\{k\alpha\}$ appartiennent au même intervalle $\left[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}\right[$ $(i=i_j=i_k)$. Quitte à échanger $j$ en $k$, on peut toujours supposer $j<k$.

(b) Soient $N \in \mathbb{N}^\times$, $j$ et $k$ deux éléments de $[\![0,N]\!]$ tels que $j<k$ et $\{j\alpha\},\{k\alpha\}$ appartiennent au même intervalle $\left[\frac{i}{N},\frac{i+1}{N}\right[$.

$$\begin{cases} \frac{i}{N} \leqslant \{j\alpha\} < \frac{i+1}{N} \\ \frac{i}{N} \leqslant \{k\alpha\} < \frac{i+1}{N} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{N} < \{k\alpha\}-\{j\alpha\} < \frac{1}{N} \Leftrightarrow |\{k\alpha\}-\{j\alpha\}| < \frac{1}{N} \Leftrightarrow |(k-j)\alpha - (\lfloor k\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor)| < \frac{1}{N}$$

En posant $q' = k-j \in [\![1,N]\!]$ et $a' = \lfloor k\alpha\rfloor - \lfloor j\alpha\rfloor \in \mathbb{Z}$, on a

$$|q'\alpha - a'| < \frac{1}{N} \Leftrightarrow \left|\alpha - \frac{a'}{q'}\right| < \frac{1}{q'N}.$$

On note $d = \text{pgcd}(a',q')$ alors il existe deux entiers $a$ et $q$ tels que $a' = ad$, $q' = qd$ avec $\text{pgcd}(a,q) = 1$. En particulier, on a $1 \leqslant q \leqslant q' \leqslant N$ et $\dfrac{a'}{q'} = \dfrac{a}{q}$ donc

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q'N} \leqslant \frac{1}{qN} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{qN}$$

11. (a) Puisque $\|x\| = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 \leqslant \{x\} \leqslant \frac{1}{2} \\ 1-\{x\} & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1 \end{cases}$ et que $\{x\} = x$ lorsque $x \in [0,1[$, on a $\|x\| = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$

$$\alpha \in \mathfrak{M}_\Delta(B,1,1) \Leftrightarrow \alpha \in [0,1[ \text{ et } \|1-\alpha\| = \|\alpha - 1\| < B^{\Delta-d} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } 1-\alpha < B^{\Delta-d} \\ 1-\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \text{ et } \alpha < B^{\Delta-d} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \text{ et } \alpha > 1 - B^{\Delta-d} \\ \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } \alpha < B^{\Delta-d} \end{cases} \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\Delta(B,1,1) = \left(\left]0, \frac{1}{2}\right] \cap [0, B^{\Delta-d}[\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right[ \cap \,]1 - B^{\Delta-d}, 1[\right)$$

Puisque l'intersection d'intervalles est une union d'intervalles, on a bien écrit $\mathfrak{M}_\Delta(B,1,1)$ comme union finie d'intervalles (on pourrait aussi distinguer les cas $B^{\Delta-q} > \frac{1}{2}$ et $B^{\Delta-d} \leqslant \frac{1}{2}$)

(b) Puisque le complémentaire d'une union disjointe d'intervalles est une union disjointe d'intervalles, il suffit de montrer que $\mathfrak{M}_\Delta(B)$ est une union finie d'intervalles disjoints. Pour ceci, il suffit de montrer que $\mathfrak{M}_\Delta(B,q,a)$ est une union finie d'intervalles. On convient que $[a,b] = \emptyset$ si $b < a$. Puisque $\alpha$ et $\frac{a}{q}$ appartiennent respectivement à $[0,1[$ et $[0,1]$, le réel $\alpha - \frac{a}{q}$ appartient à $[-1,1]$ donc

$$\left\|\alpha - \frac{a}{q}\right\| = \left\|-\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)\right\| = \left|\left|\left|\alpha - \frac{a}{q}\right|\right|\right|$$

$$\alpha \in \mathfrak{M}_\Delta(B,q,a) \Leftrightarrow \alpha \in [0,1[ \text{ et } \left|\left|\left|\alpha - \frac{a}{q}\right|\right|\right| < q^{-1}B^{\Delta-d}$$

Rappelons que $|x-y| < r \Leftrightarrow x \in ]y-r, y+r[$ et $|x-y| > r \Leftrightarrow x \in ]-\infty, y-r[ \cup ]-y+r, +\infty[$

- **Premier cas** $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ : On a alors $\left|\left|\left|\alpha - \frac{a}{q}\right|\right|\right| = \left|\alpha - \frac{a}{q}\right|$ donc

$$\alpha \in \left]\frac{a}{q} - \frac{1}{2}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\right[ \cap [0,1[ \text{ et } \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < q^{-1}B^{\Delta-d} \Leftrightarrow \alpha \in \left]\frac{a}{q} - \frac{1}{2}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\right[ \cap [0,1[ \cap \left]\frac{a}{q} - q^{-1}B^{\Delta-d}, \frac{a}{q} + q^{-1}B^{\Delta-d}\right[$$

- **Second cas** $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ : On a alors $\left|\left|\left|\alpha - \frac{a}{q}\right|\right|\right| = 1 - \left|\alpha - \frac{a}{q}\right|$ donc

$$(\alpha \in \left]\frac{a}{q} - \frac{1}{2}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\right[ \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \text{ et } 1 - \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < q^{-1}B^{\Delta-d} \Leftrightarrow \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| > 1 - q^{-1}B^{\Delta-d})$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \in \left]\frac{a}{q} - \frac{1}{2}, \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\right[ \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \cap \left]-\infty, \frac{a}{q} - (1 - q^{-1}B^{\Delta-d}), \frac{a}{q} + (1 - q^{-1}B^{\Delta-d}), +\infty\right[)$$

Puisque l'intersection d'intervalles est une union d'intervalles, on a bien écrit $\mathfrak{M}_\Delta(B,q,a)$ comme union finie d'intervalles. Par conséquent, $\mathfrak{M}_\Delta(B)$, qui est une union finie de $\mathfrak{M}_\Delta(B,q,a)$, est également une union finie d'intervalles.

12. (a) On procède par l'absurde en supposant que $q \leqslant B^\Delta$. On effectue la division euclidienne de $a$ par $q$, il existe donc $s \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant r < q$ et $a = qs + r$.

$$q^{-1}B^{\Delta-d} > \left|\alpha - \frac{a}{q}\right| = \left|\alpha - \frac{sq+r}{q}\right| = \left|\left(\alpha - \frac{r}{q}\right) - \underbrace{s}_{\in\mathbb{Z}}\right| \geqslant \left\|\alpha - \frac{r}{q}\right\| \Rightarrow \left\|\alpha - \frac{r}{q}\right\| < q^{-1}B^{\Delta-d}$$

avec $0 \leqslant r < q \leqslant B^\Delta$ donc $\alpha \in \mathfrak{M}_\Delta(B,q,r) \subset \mathfrak{M}_\Delta(B)$ ce qui contredit le fait que $\alpha \in \mathfrak{m}_\Delta(B) = [0,1] \backslash \mathfrak{M}_\Delta(B)$ ce qui montre que $q > B^\Delta$.

(b) On considère $N = \lfloor B^{d-\Delta} \rfloor + 1$, on a bien $N > B^{d-\Delta} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{N} < B^{\Delta-d}$ donc il existe $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant q \leqslant N = \lfloor B^{d-\Delta} \rfloor + 1$ tels que $\text{pgcd}(a,q) = 1$ et

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{Nq} < \frac{B^{\Delta-d}}{q}$$

D'après la question **V.12.a**, on en déduit que $q > B^\Delta \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{B^\Delta}$. D'autre part, on a aussi $\left|\alpha - \dfrac{a}{q}\right| < \dfrac{1}{Nq} \leqslant \dfrac{1}{q^2}$ donc d'après la question **V.9**, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $C$ (ne dépendant que de $\varepsilon$ et $d$) tel que

$$\begin{aligned}
\left|S_B^1(\alpha)\right| &\leqslant CB^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{q}+\frac{q}{B^d}\right)^{1/2^{d-1}} \\
&\leqslant CB^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{B^\Delta}+\frac{1}{B^\Delta}+\frac{B^{d-\Delta}+1}{B^d}\right)^{1/2^{d-1}} \qquad (B \geqslant B^\Delta \text{ car } B \geqslant 1 \text{ et } \Delta \in [0,1[) \\
&\leqslant CB^{1+\varepsilon}\left(\frac{2}{B^\Delta}+\frac{1}{B^\Delta}+\frac{1}{B^d}\right)^{1/2^{d-1}} \leqslant CB^{1+\varepsilon}\left(\frac{3}{B^\Delta}+\frac{1}{B^\Delta}\right)^{1/2^{d-1}} \qquad (B^d \geqslant B \geqslant B^\Delta) \\
&\leqslant CB^{1+\varepsilon}\left(\frac{4}{B^\Delta}\right)^{1/2^{d-1}} = \underbrace{[C4^{1/2^{d-1}}]}_{=C'} B^{1+\varepsilon-\Delta/2^{d-1}}
\end{aligned}$$

et $C'$ ne dépend que de $\varepsilon$ et $d$.

13. Commençons par remarquer que pour tout $B \geqslant 1$ et tout $\alpha \in \mathfrak{m}_\Delta(B)$, on a

$$\begin{aligned}
S_B^m(\alpha) &= \sum_{(x_1,..,x_m)\in(\mathbb{N}\cap[0,B])^m} \mathbf{e}(\left(\alpha\sum_{i=1}^m x_i^d\right) = \sum_{x_1\in\mathbb{N}\cap[0,B]} \cdots \sum_{x_m\in\mathbb{N}\cap[0,B]} \mathbf{e}(\alpha x_1^d)\cdots\mathbf{e}(\alpha x_m^d) = \prod_{i=1}^m \sum_{x_i\in\mathbb{N}\cap[0,B]} \mathbf{e}(\alpha x_i^d) \\
&= \prod_{i=1}^m S_B^1(\alpha) = (S_B^1(\alpha))^m
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, en utilisant la question **V.12.b** avec $\dfrac{\varepsilon}{m} > 0$ au lieu de $\varepsilon$, on obtient l'existence d'un réel $C$ ne dépendant que de $\varepsilon$ et $d$ tel que

$$\forall B \geqslant 1, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{m}_\Delta(B), \quad |S_B^m(\alpha)| = \left|S_B^1(\alpha)\right|^m \leqslant C^m\left(B^{1+\varepsilon/m-\Delta/2^{d-1}}\right)^m = C^m B^{m+\varepsilon-m\Delta/2^{d-1}}$$

14. (a) On remarque que

$$\mathfrak{M}_\Delta(B,q,a) \subset \{\alpha\in\mathbb{R} \quad / \quad \left|\alpha-\frac{a}{q}\right| < q^{-1}B^{\Delta-d}\} = \left]\frac{a}{q}-q^{-1}B^{\Delta-d}, \frac{a}{q}+q^{-1}B^{\Delta-d}\right[$$

qui est un intervalle de longueur $2q^{-1}B^{\Delta-d}$. Par conséquent, on a l'inclusion ensembliste

$$\mathfrak{M}_\Delta(B) \subset \bigcup_{\{(a,q)\in\mathbb{N}^2\,/\,1\leqslant a\leqslant q\leqslant B^\Delta \text{ et } \operatorname{pgcd}(a,q)=1\}} \left]\frac{a}{q}-q^{-1}B^{\Delta-d}, \frac{a}{q}+q^{-1}B^{\Delta-d}\right[$$

Etant donné qu'une union finie d'intervalles $\bigcup_{i=1}^m I_i$ (pas nécessairement disjointe) est toujours contenu dans un intervalle de longueur au plus $\sum_{i=1}^m \text{longueur}(I_i)$, on en déduit que $\mathfrak{M}_\Delta(B)$ est contenu dans un intervalle de longueur au plus

$$\begin{aligned}
\sum_{\{(a,q)\in\mathbb{N}^2\,/\,1\leqslant a\leqslant q\leqslant B^\Delta \text{ et } \operatorname{pgcd}(a,q)=1\}} 2q^{-1}B^{\Delta-d} &\leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant q\leqslant B^\Delta} 2q^{-1}B^{\Delta-d} = \sum_{1\leqslant q\leqslant B^\Delta}\sum_{a=1}^q \underbrace{2q^{-1}B^{\Delta-d}}_{\text{indépendant de } a} \\
&= \sum_{1\leqslant q\leqslant B^\Delta} 2B^{\Delta-d} = 2B^{\Delta-d}\lfloor B^\Delta\rfloor \leqslant 2B^{\Delta-d}B^\Delta = 2B^{2\Delta-d}
\end{aligned}$$

Soit $I$ un tel intervalle, on obtient que

$$\int_{\mathfrak{M}_\Delta(B)} 1\,dx \leqslant \int_I 1\,dx = \text{longueur}(I) \leqslant 2B^{2\Delta-d}.$$

(b) En utilisant la question **V.13** et en tenant compte du fait que $\mathfrak{m}_\Delta(B) \subset [0,1]$, on obtient

$$\exists C_{\varepsilon,d} \in \mathbb{R}_+, \qquad \int_{\mathfrak{m}_1(B)} |S_B^m(\alpha)|\,d\alpha \leqslant \int_{\mathfrak{m}_1(B)} CB^{m-m\Delta/2^{d-1}+\varepsilon}\,d\alpha \leqslant \int_{[0,1]} CB^{m-m\Delta/2^{d-1}+\varepsilon}\,dx = CB^{m-m\Delta/2^{d-1}+\varepsilon}$$

(c) En remarquant deux inclusions de $\mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B)$ et en utilisant les question **V.14.a** et **V.14.b**, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B) &\subset [0,1] - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B) = \mathfrak{m}_{\Delta_1}(B) \\
&\Rightarrow \exists C_{\varepsilon,d} \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \alpha \in \mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B), \quad |S_B^m(\alpha)| \leqslant CB^{m-m\Delta_1/2^{d-1}+\varepsilon} \\
\mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B) &\subset \mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} \Rightarrow \\
\int\limits_{\mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B)} |S_B^m(\alpha)|\, d\alpha &\leqslant \int\limits_{\mathfrak{M}_{\Delta_2(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_1}(B)} CB^{m-m\Delta_1/2^{d-1}+\varepsilon} d\alpha \leqslant CB^{m-m\Delta_1/2^{d-1}+\varepsilon} \int\limits_{\mathfrak{M}_{\Delta_2(B)}} d\alpha \\
&\leqslant (CB^{m-m\Delta_1/2^{d-1}+\varepsilon})(2B^{2\Delta_2-d}) = (2C)B^{m-d-(m/2^{d-1}-2)\Delta_1+2(\Delta_2-\Delta_1)+\varepsilon}
\end{aligned}$$

15. **Premier cas** $d = 1$ : alors $m > 1.2^{1-1} = 1 \Leftrightarrow m \geqslant 2$ et, d'après la question **V.14.a**, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon$ tel que $\int\limits_{\mathfrak{m}_1(B)} |S_B^m(\alpha)|\, d\alpha \leqslant CB^\varepsilon$. En choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{2} \leqslant (m-1) - \frac{1}{2} \Rightarrow \int\limits_{\mathfrak{m}_1(B)} |S_B^m(\alpha)|\, d\alpha \leqslant CB^{1/2} \leqslant CB^{m-1+1/2}$$

ce qui donne le résultat attendu avec $\delta = \dfrac{1}{2}$.

**Second cas** $d \geqslant 2$ : alors $\dfrac{m}{2^{d-1}} > d \geqslant 2$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant 1$. On choisit la suite $(\Delta_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie par

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \Delta_k = \Delta + \frac{k}{n}(1-\Delta), \quad \Delta_0 = \Delta, \quad \Delta_n = 1, \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad \Delta_k \geqslant \Delta$$

En appliquant la question **V.14.c** aux réels $\Delta_k$ et $\Delta_{k+1}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$,on obtient l'existence de $C_{\varepsilon,d}$ (donc indépendant de $k$) tel que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathfrak{M}_{\Delta_{k+1}(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_k}(B)} |S_B^m(\alpha)|\, d\alpha &\leqslant CB^{m-d-(m/2^{d-1}-2)\Delta_k+2(\Delta_{k+1}-\Delta_k)+\varepsilon} = CB^{m-d-(m/2^{d-1}-2)\Delta_k+2(1-\Delta)/n+\varepsilon} \\
&\leqslant CB^{m-d-(m/2^{d-1}-2)\Delta+2(1-\Delta)/n+\varepsilon} \quad \left(\frac{m}{2^{d-1}} > d \geqslant 2 \Rightarrow \frac{m}{2^{d-1}} - 2 > 0\right)
\end{aligned}$$

Etant donné que $\dfrac{m}{2^{d-1}} > d \geqslant 2$, on a $\dfrac{m}{2^{d-1}} - 2 > 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left( -\left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta + \frac{2(1-\Delta)}{n} + \varepsilon \right) = \varepsilon - \left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta < 0 \Leftrightarrow \varepsilon < \left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta$$

Si l'on considère n'importe quel $\varepsilon < \left(\dfrac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta$ (que l'on ne fixe toujours pas) alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left( -\left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta + \frac{2(1-\Delta)}{n} + \varepsilon \right) < 0$$

donc il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $-\left(\dfrac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta + \dfrac{2(1-\Delta)}{n_0(\varepsilon)} + \varepsilon < 0$. On note alors

$$n = n_0(\varepsilon), \quad \delta_1 = -\left[ -\left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta + \frac{2(1-\Delta)}{n_0(\varepsilon)} + \varepsilon \right] > 0$$

et, par construction de $\varepsilon$, $n$ et $\delta_1$, (remarquons que $\varepsilon$ n'étant pas encore fixé, $n$ et $\delta_1$ ne le sont toujours pas !) on a

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int\limits_{\mathfrak{M}_{\Delta_{k+1}(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_k}(B)} |S_B^m(\alpha)|\, d\alpha \leqslant CB^{m-d-\delta_1}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\coprod_{k=0}^{n-1} \left(\mathfrak{M}_{\Delta_{k+1}(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_k}(B)\right) &= \mathfrak{M}_{\Delta_n(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_0}(B) = \mathfrak{M}_1(B) - \mathfrak{M}_{\Delta_0}(B) \\
\mathfrak{m}_\Delta(B) &= [0,1] - \mathfrak{M}_\Delta(B) = ([0,1] - \mathfrak{M}_1(B)) \cup (\mathfrak{M}_1(B) - \mathfrak{M}_{\Delta_0}(B)) \\
&= \mathfrak{m}_1(B) \cup (\mathfrak{M}_1(B) - \mathfrak{M}_{\Delta_0}(B)) = \mathfrak{m}_1(B) \cup \left( \coprod_{k=0}^{n-1} \left(\mathfrak{M}_{\Delta_{k+1}(B)} - \mathfrak{M}_{\Delta_k}(B)\right) \right)
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathfrak{m}_\Delta(B)} |S_B^m(\alpha)|\,d\alpha &= \int\limits_{\mathfrak{m}_1(B)} |S_B^m(\alpha)|\,d\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\mathfrak{M}_{\Delta_{k+1}(B)}} |S_B^m(\alpha)|\,d\alpha \\ &\leqslant CB^{m-m/2^{d-1}+\varepsilon} + \sum_{k=0}^{n-1} CB^{m-d-\delta_1} = CB^{m-m/2^{d-1}+\varepsilon} + nCB^{m-d-\delta_1}\end{aligned}$$

On choisit alors $\varepsilon > 0$ vérifiant en outre

$$-m/2^{d-1} + \varepsilon < -d \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{m}{2^{d-1}} - d$$

Par conséquent, en fixant $\varepsilon \in \left]0, \min\left(\frac{m}{2^{d-1}} - d, \left(\frac{m}{2^{d-1}} - 2\right)\Delta\right)\right[$, on on fixe $n_0(\varepsilon)$, donc $n$, ainsi que $\delta_1$. On pose alors $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{m}{2^{d-1}} - d - \varepsilon\right) > 0$ alors

$$\delta \leqslant \delta_1 \Leftrightarrow -\delta_1 \leqslant -\delta \text{ et } \delta \leqslant \frac{m}{2^{d-1}} - d - \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{m}{2^{d-1}} + \varepsilon \leqslant -d - \delta$$

ce qui nous donne

$$\int\limits_{\mathfrak{m}_\Delta(B)} |S_B^m(\alpha)|\,d\alpha \leqslant CB^{m-d-\delta} + nCB^{m-d-\delta} = ((n+1)C)\,B^{m-d-\delta}$$

Le résultat est donc établit puisque $(n+1)C$ ne dépendant que de $\varepsilon$ et de $d$ (car $n$ dépendant que de $\varepsilon$ et de $d$).

16. Supposons que $G(d) = +\infty$ alors il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_d^m(t_n) = 0$. En choisissant $B = (t_n)^{1/d}$, la question **IV.3** montre que

$$\begin{aligned}N_d^m(t_n) &= N_d^m(t_n,(t_n)^{1/d}) = \int_0^1 S^m_{(t_n)^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t_n)\,d\alpha \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad \int_0^1 S^m_{(t_n)^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t_n)\,d\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad \int\limits_{\mathfrak{M}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha + \int\limits_{\mathfrak{m}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad \int\limits_{\mathfrak{M}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha = -\int\limits_{\mathfrak{m}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse faite à cette question ainsi que la question **V.15.**, on obtient l'existence de réels $c, C, \delta$ strictement positifs ne dépendant que de $\varepsilon$ et $d$ (donc indépendants de $n$) tels que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad c(t_n)^{m/d-1} &\leqslant \left|\int\limits_{\mathfrak{M}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha\right| = \left|\int\limits_{\mathfrak{m}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha\right| \leqslant C\left((t_n)^{1/d}\right)^{m-d-\delta} \\ \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \quad c(t_n)^{m/d-1} &\leqslant C(t_n)^{m/d-1-\delta/d} \Leftrightarrow c \leqslant C(t_n)^{-\delta/d}\end{aligned}$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ et compte-tenu que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et $\dfrac{\delta}{d} > 0$, on obtient $c \leqslant 0$ ce qui est absurde donc $G(d) < +\infty$. D'après la question **III.2**, on obtient que $\forall d \in \mathbb{N}^\times, \quad g(d) < +\infty$, modulo l'existence de la minoration sur les arcs majeurs

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{M}_\Delta\left(t^{1/d}\right)} S^m_{t^{1/d}}(\alpha)\mathbf{e}(-\alpha t)\,d\alpha\right| \geqslant ct^{m/d-1}.$$

que l'on peut démontrer mais cela n'est pas proposé par l'énoncé. Ce résultat nécessite quelques formules sur les intégrales et les séries mais le sujet est déjà fort long et le lecteur souhaitant connaitre la preuve pourra utiliser avec profit l'exposé de Marc Laborde au Séminaire Delange-Pisot-Poitou en 1977 disponible à la page

http://archive.numdam.org/ARCHIVE/SDPP/SDPP_1976-1977__18_2/SDPP_1976-1977__18_2_A3_0/SDPP_1976-1977__18_2_

(pages 4 à 7) ou bien le texte

http://www.fimfa.ens.fr/exposes/2005/expose%20perrolaz.pdf