

Centrale TSI 2010 - Mathématiques 2

Partie I -

- I. A. 1) - si D est stable par f , $f(a) \in D$ et comme a dirige D , $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$; comme $a \neq 0$, a est vecteur propre de f .
 - Si a est vecteur propre de f , $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(a) = \lambda a$; comme tout vecteur x de D est de la forme μa , $f(x) = f(\mu a) = \mu f(a) = \mu \lambda a \in D$.
 Donc : $\boxed{D \text{ stable par } f \Leftrightarrow a \text{ est vecteur propre de } f}$.
- 2) Soit $f \in L(E)$; comme $\dim E = 3$, le polynôme caractéristique de f est de degré 3 et admet donc au moins une racine réelle λ , valeur propre de f . Si a est vecteur propre de f associé à λ , $D = \text{Vect}\{a\}$ est alors une droite stable par f .
- 3) Si par exemple $n = 2$ et si f est une rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$, son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$, qui n'admet aucune racine réelle. Donc f n'admet aucune valeur propre et vecteur propre, donc aucune droite stable.
 Le résultat précédent est donc faux pour $n = 2$.
- B. 1) Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de P , qu'on complète en $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de E . Alors la matrice A de f dans ε est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de \tilde{f} dans $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. L'on en déduit que $\chi_f(X) = \chi_{\tilde{f}}(X)(e - X)$ où χ_f désigne, comme dans toute la suite du problème, le polynôme caractéristique de f . Donc, le polynôme caractéristique de \tilde{f} divise celui de f .
- 2) Si \tilde{f} possède une droite stable, il possède donc une valeur propre λ et son polynôme caractéristique de degré 2 est scindé : l'endomorphisme \tilde{f} possède deux valeurs propres λ et μ . En outre il possède au moins une droite stable qui est une droite stable de f . Notons $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ . En reprenant la question précédente,
 - si l'une des valeurs propres de f est distincte de λ , f possède deux valeurs propres distinctes, donc au moins deux droites stables engendrées par des vecteurs propres respectifs de ces deux valeurs propres.
 - si les 3 valeurs propres de f sont égales et si $\dim E_\lambda(f) \geq 1$, f possède une infinité de droites stables engendrées par un vecteur non nul de $E_\lambda(f)$.
 - si les 3 valeurs propres de f sont égales et si $\dim E_\lambda(f) = 1$, f ne possède qu'une seule droite stable, les vecteurs propres de f appartenant tous à $E_\lambda(f)$.
- C. 1) L'on a $\chi_g = \chi_M = \chi_{g'}$. Comme $\chi_g \in \mathbb{R}_2[X]$ et n'admet pas de racines réelles, il possède 2 racines complexes non réelles conjuguées α et $\bar{\alpha}$. Les deux valeurs propres sont distinctes donc, g' est diagonalisable. Notons $\varepsilon_1 = (a, b)$ un vecteur propre de g' associé à α . L'on a alors :

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne en conjuguant la relation que } M \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \bar{\alpha} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}. \text{ D'où : } \bar{\varepsilon}_1 \text{ (non nul) est vecteur propre de } g' \text{ associé à la valeur propre } \bar{\alpha}. \text{ On a montré :}$$

$$\boxed{\exists \varepsilon_1 = (a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, g'(\varepsilon_1) = \alpha \varepsilon_1 \text{ et } g'(\bar{\varepsilon}_1) = \bar{\alpha} \bar{\varepsilon}_1}$$

- 2) $\det_{(\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_1)}(\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. D'où $(\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)$ est une famille libre de \mathbb{C}^2 , donc une base de \mathbb{C}^2 .

$$\text{Posons } u = \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1 \text{ et } v = \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1. \text{ On a alors : } \varepsilon_1 = \frac{u+v}{2} \text{ et } \bar{\varepsilon}_1 = \frac{u-v}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } g'(u) &= g'(\varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_1) \\
&= g'(\varepsilon_1) + g'(\bar{\varepsilon}_1) \\
&= \alpha \varepsilon_1 + \bar{\alpha} \bar{\varepsilon}_1 \\
&= \alpha \frac{u+v}{2} + \bar{\alpha} \frac{u-v}{2} \\
&= \operatorname{Re}(\alpha)u + i \operatorname{Im}(\alpha)v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{De même : } g'(v) &= g'(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1) \\
&= g'(\varepsilon_1) - g'(\bar{\varepsilon}_1) \\
&= \alpha \varepsilon_1 - \bar{\alpha} \bar{\varepsilon}_1 \\
&= \alpha \frac{u+v}{2} - \bar{\alpha} \frac{u-v}{2} \\
&= i \operatorname{Im}(\alpha)u + \operatorname{Re}(\alpha)v
\end{aligned}$$

La matrice de g' dans cette base est : $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\alpha) & i \operatorname{Im}(\alpha) \\ i \operatorname{Im}(\alpha) & \operatorname{Re}(\alpha) \end{pmatrix}$

3) Sous les notations précédentes, posons $u_1 = u$ et $v_1 = iv$.

(u_1, v_1) est encore une base de \mathbb{C}^2 .

D'où $g'(u_1) = g'(u) = \operatorname{Re}(\alpha)u + i \operatorname{Im}(\alpha)v = \operatorname{Re}(\alpha)u_1 + \operatorname{Im}(\alpha)v_1$.

De même $g'(v_1) = ig'(v) = i^2 \operatorname{Im}(\alpha)u_1 + \operatorname{Re}(\alpha)v_1$

Posons $X = \operatorname{Re}(\alpha)$ et $Y = \operatorname{Im}(\alpha)$. Alors la matrice de g' dans la base (u_1, v_1) est

$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ où $Y \neq 0$ car $\alpha \notin \mathbb{R}$. Si Q est la matrice de passage de la base canonique

de \mathbb{C}^2 à (u_1, v_1) , alors $M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}$. On a montré :

$\exists Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible, $\exists (X, Y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, tels que $M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}$

D. 1) Soit ε_1 base de D , droite stable de f et $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ base de son plan stable P , alors puisque D n'est pas incluse dans P , $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, donc une base de E .

On a alors $M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de $f|_P$ dans $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

D'après la question I.C.3), il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ et $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que $M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}$. Notons (ν_2, ν_3) la base de P dont les composantes dans $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ sont les colonnes de Q . Alors :

$(\varepsilon_1, \nu_2, \nu_3)$ est une base de E dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y \\ 0 & Y & X \end{pmatrix}$,
avec $(\lambda, X, Y) \in \mathbb{R}^3$ et $Y \neq 0$.

2) Soit $u = (x, y, z) \in P$, qu'on suppose stable par f ; posons $f(u) = u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in$

$P : ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$. On a alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a alors $(n'|u) = (a \ b \ c) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$ car $u_1 \in P$. D'où n' est orthogonal à tout élément de P .

- Supposons P stable par f ; alors n' est orthogonal à P donc colinéaire à n qui engendre la droite P^\perp ; d'où $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $n' = \lambda n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ou encore ${}^t M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow f^*(n) = \lambda n$ où f^* est l'endomorphisme de matrice ${}^t M$ dans \mathcal{B}_c .

- Supposons n vecteur propre de $f^* : \exists \lambda \in \mathbb{R}, f^*(n) = \lambda n \Leftrightarrow {}^t M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a alors pour tout $u = (x, y, z) \in P$,

$(f(u)|n) = {}^t \left(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (x \ y \ z) {}^t M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda(ax + by + cz) = 0$ car $u \in P$;
donc $f(u) \in P$ et P est stable par u .

On a montré :

$$\boxed{P \text{ stable par } f \Leftrightarrow n \text{ vecteur propre de } f^*}$$

- 3) - Supposons que f admette une unique droite stable D ; alors χ_f n'admet qu'une seule racine réelle λ (sinon f admet au moins deux droites stables) et celle-ci ne peut être d'ordre 2 (sinon il existe une autre racine réelle).

On a alors $D = E_\lambda(f) \Rightarrow \dim E_\lambda(f) = 1$.

Comme les polynômes caractéristiques de M et ${}^t M$ sont identiques, $\text{Sp} f^* = \{\lambda\}$ (notations précédentes). Soit n vecteur propre de f^* associé à λ , alors $P = \{n\}^\perp$ est stable par f .

Par ailleurs $\text{rg}({}^t M - \lambda I_3) = \text{rg}(M - \lambda I_3) = 2$, puisque $\dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) = \dim E_\lambda(f) = 1$. D'où $\dim E_\lambda(f^*) = \dim \ker(f^* - \lambda \text{Id}_E) = 1$ et f^* n'admet qu'une droite fixe unique, ce qui montre que f admet un plan fixe unique.

- supposons que f admette un plan stable unique; alors f^* admet une droite stable unique associée à une valeur propre λ de f^* ; alors $\text{Sp} f^* = \{\lambda\}$ (sinon f^* admet au moins deux droites stables) et celle-ci ne peut être d'ordre 2 (sinon il existe une autre racine réelle et 2 droites stables de f^*).

On a alors $\dim E_\lambda(f^*) = 1$.

Comme les polynômes caractéristiques de M et ${}^t M$ sont identiques, $\text{Sp} f = \{\lambda\}$.

Par ailleurs $\text{rg}({}^t M - \lambda I_3) = \text{rg}(M - \lambda I_3) = 2$, puisque $\dim \ker(f^* - \lambda \text{Id}_E) = \dim E_\lambda(f^*) = 1$. D'où $\dim E_\lambda(f) = \dim \ker(f - \lambda \text{Id}_E) = 1$ et f n'admet qu'une droite fixe unique $E_\lambda(f)$.

- on a vu que dans chaque cas $\dim E_\lambda(f) = 1$ et que χ_f admet une seule racine réelle, soit simple, soit triple.

- supposons que $\dim E_\lambda(f) = 1$ et que χ_f admet une seule racine réelle, soit simple, soit triple. Alors $\dim E_\lambda(f) = 1$ est une droite stable de f et une droite stable étant incluse dans un sous-espace propre de f , elle ne peut être que $E_\lambda(f)$. Donc f possède une droite stable unique.

J'ai montré l'équivalence proposée.

Partie II -

$$\text{II. A. 1) } \chi_M = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ a & b & c - X \end{vmatrix} = a + bX + cX^2 - X^3.$$

- 2) Notons $E_\alpha(M)$ le sous-espace propre de M associé à α . Ce sous espace a pour équation :
- $$\begin{cases} -\alpha x + y = 0 \\ -\alpha y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha x \\ z = \alpha^2 x \end{cases} . \text{ Donc :}$$

$$E_\alpha(M) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \dim E_\alpha(M) = 1$$

- 3) Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable est que : χ_M soit scindé et que $\forall \alpha \in \text{Sp}(M)$, l'ordre de multiplicité de α soit égal à $\dim E_\alpha(M)$. Comme chaque sous-espace propre est de dimension 1, chaque valeur propre doit être d'ordre de multiplicité égal à 1. Donc :

M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \chi_M$ admet 3 racines réelles 2 à 2 distinctes.

- 4) f admet une droite stable et une seule si et seulement si χ_M admet une seule racine réelle soit simple, soit triple et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Cette dernière condition étant toujours réalisée,

f possède une droite stable et une seule si et seulement si χ_M admet une seule racine réelle, soit simple, soit triple.

- B. 1) $\chi_f = t^3 - X^3$ et $\text{Sp}(f) = \{t\}$ Donc f possède une seule racine réelle, triple. D'après la question précédente, f possède une unique droite stable D_t et d'après la question I.D.3., un unique plan stable P_t .

La droite stable est égale à $E_f(t) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \right\}$.

Pour trouver le plan stable, il suffit de rechercher n , engendrant le sous-espace propre de f^* de matrice ${}^tM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans \mathcal{B}_c , associé à t .

Il a pour équation : $\begin{cases} -tx + t^3z = 0 \\ x - ty = 0 \\ y - tz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t^2z \\ y = tz \end{cases} . \text{ Donc } E_t(f^*) = \text{Vect} \{n\} \text{ avec}$

$$n = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la question I.D.2., le plan stable de f a pour équation $t^2x + ty + z = 0$.

- 2) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(x, y, z) \in D_t$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda, y = \lambda t$ et $z = \lambda t^2$. D'où $y^2 \lambda^2 t^2 = xz$. On a montré $\underline{\Delta} \subset \Sigma$.

Σ est une quadrique. L'équation de Σ est du type $F(x, y, z) = 0$ où $F : (x, y, z) \rightarrow y^2 - xz$ et F est homogène de degré 2. Donc $\underline{\Sigma}$ est un cône de sommet O .

Soit $M(x, y, z) \in \Sigma$, vérifiant donc $y^2 = xz$.

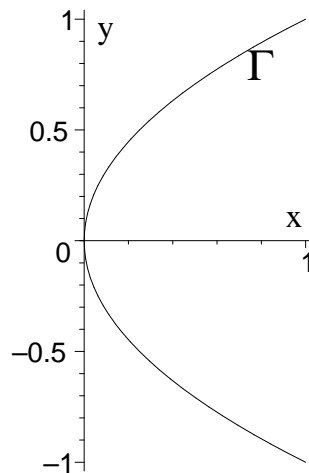
- Si $x \neq 0$, en posant $t = \frac{y}{x}$, l'on obtient $y = tx$, d'où $t^2x^2 = xz \Leftrightarrow z = xt^2$ puisque $x \neq 0$. Donc $M \in \Delta$.

- si $x = 0$, alors $y = 0$ et $M \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et si $z \neq 0$, $M \notin \Delta$.

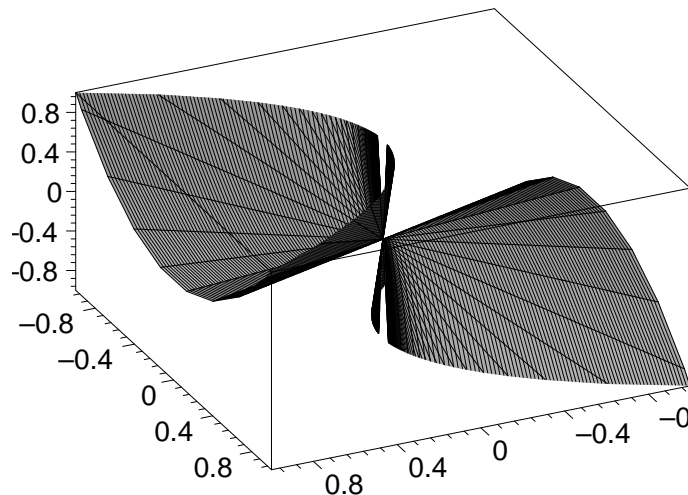
$$\text{Donc } \Sigma \setminus \Delta = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3) Soit $\Gamma = \Sigma \cap P$ où P est la plan d'équation $z = 1$. Γ est une parabole d'équation $y^2 = x$ et $z = 1$.

Représentation de Γ :



Représentation de Σ :



C. 1) (S_1) est un encore un cône de sommet O . Son équation est du type $f(x, y, z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. f est C^1 sur \mathbb{R}^3 et les points singuliers de (S_1) sont donnés

$$(x, y, z) \rightarrow y^2 - 4xz$$

par $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(M_0) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow -4z = 0, 2y = 0, -4x = 0$. D'où O est singulier et en un point de $(S_1) \setminus \{O\}$ le plan tangent a pour équation :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)(M_0) \mid \overrightarrow{M_0M} \right) &= 0 \Leftrightarrow -4z_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 4x_0(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow -4z_0x + 2y_0y - 4x_0z = -4x_0z_0 + 2y_0^2 - 4x_0z_0 \\ &\Leftrightarrow -2z_0x + y_0y - 2x_0z = 0 \end{aligned}$$

Le plan tangent en $M_0 \in (S_1) \setminus \{O\}$ a donc pour équation cartésienne :
 $-2z_0x + y_0y - 2x_0z = 0$: il passe par O .

- 2) Posons $t = -\frac{y_0}{2x_0}$. Comme $y_0^2 = 4x_0z_0$, $z_0 = \frac{y_0^2}{4x_0} = x_0t^2$ D'où le plan tangent en M_0 à (S_1) a aussi pour équation : $-2x_0t^2x - 2x_0ty - 2x_0z = 0 \Leftrightarrow t^2x + ty + z = 0$. On retrouve bien l'équation cartésienne de P_t . J'ai montré qu'il existe bien un réel t tel que le plan tangent en M_0 à (S_1) soit P_t .

- D. 1) Tout point de S_f est régulier et le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à S_f a pour équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- 2) Le plan tangent coïncide avec l'un des plans P_t si et seulement si leurs équations sont proportionnelles, c'est-à-dire s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -t^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -t \\ x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 \\ x_0 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + y_0 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right.$$

- 3) On a alors en dérivant les deux équations par rapport à y , comme f est de classe C^2 sur U , $\forall (x, y) \in U$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2u'(y)u''(y) \\ x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + yu''(y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2xu'(y)u''(y) \\ x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + yu''(y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$-yu''(y) = -2xu'(y)u''(y) \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$u''(y)(y - 2xu'(y)) = 0$$

- 4) $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{2x} \Leftrightarrow \exists \alpha \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x, y) = \frac{y^2}{4x} + \alpha(x)$.

- 5) Les surfaces correspondant à cette condition doivent vérifier $\forall (x, y) \in U$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 \\ x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y^2}{4x^2} + \alpha'(x) = -\frac{y^2}{4x^2}$ d'où $\alpha'(x) = 0$ et $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \alpha(x) = k$.

$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = -\frac{y^2}{4x} + \frac{y^2}{2x} - \left(\frac{y^2}{4x} + k\right) = 0$, ce qui donne $k = 0$. D'où

les fonctions f vérifiant $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{2x}$ et les conditions pour qu'en tout point le plan

tangent soit un des plans de la famille $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont les fonctions : $f : U \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow \frac{y^2}{4x}$.

La surface correspondant à cette condition a pour équation :

$$z = \frac{y^2}{4x} \text{ et } x > 0 \Leftrightarrow \boxed{4xz = y^2 \text{ et } x > 0}.$$

On retrouve la partie de (S_1) correspondant à $x > 0$.

Partie III -

$$\text{III. A. } \chi_{g_r} = \left| \begin{pmatrix} 2 - X & 0 & 0 \\ r^2 & -X & -r \\ r & r & -X \end{pmatrix} \right| \\ = (2 - X)(X^2 + r^2)$$

D'où, comme $r \neq 0$, $\text{Sp}(g_r) = \{2\}$.

Notons $E_2(g_r)$ le sous-espace propre de g_r associé à la valeur propre 2 ; il a pour équation :

$$E_2(g_r) : \begin{cases} r^2x - 2y - rz = 0 \\ rx + ry - 2z = 0 \end{cases} \text{ D'où } E_2(g_r) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} r^2 + 4 \\ r^2 \\ r(r^2 + 2) \end{pmatrix} \right\}.$$

B. 1. Notons Σ l'ensemble des points appartenant à l'une des droites Δ_r et $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \lambda(r^2 + 4) \\ y = \lambda r^2 \\ z = \lambda r(r^2 + 2) \end{cases} \text{ . D'où :}$$

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \lambda(r^2 + 4) \\ y = \lambda r^2 \\ z = \lambda r(r^2 + 2) \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} \begin{cases} x = \frac{r^2 + 4}{r(2 + r^2)} \\ y = \frac{r}{2 + r^2} \\ z = 1 \end{cases} \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\text{Une représentation paramétrique de } \Gamma \text{ est } \begin{cases} x = \frac{r^2 + 4}{r(2 + r^2)} \\ y = \frac{r}{2 + r^2} \\ z = 1 \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$$

2. Un point M de Γ de paramètre r vérifie :

$$\begin{aligned}
y(x+y)^2 - x + y &= \frac{r}{2+r^2} \left(\frac{r^2+4}{r(2+r^2)} + \frac{r}{2+r^2} \right)^2 - \frac{r^2+4}{r(2+r^2)} + \frac{r}{2+r^2} \\
&= \frac{r}{2+r^2} \left(\frac{2r^2+4}{r(2+r^2)} \right)^2 - \frac{r^2+4}{r(2+r^2)} + \frac{r}{2+r^2} \\
&= \frac{4}{r(2+r^2)} - \frac{r^2+4}{r(2+r^2)} + \frac{r}{2+r^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Gamma \subset \Gamma'}$.

Inversement, soit $M(x, y, 1) \in \Gamma'$.

- si $y = 0, x = 0$, dans ce cas $M \notin \Gamma$ car $r \neq 0$.

- si $y \neq 0$, posons $X = x + y$; comme $M \in \Gamma'$, $yX^2 = X - 2y$ et X est solution de $yX^2 - X + 2y = 0$ de discriminant $1 - 8y^2$ qui est donc positif.

L'équation $y = \frac{r}{r^2+2} \Leftrightarrow yr^2 - r + 2y = 0$ d'inconnue r admet une solution si et seulement si $1 - 8y^2 \geq 0$, ce qui est le cas puisque $M \in \Gamma'$. Soit r une solution de l'équation. On a alors :

$$1 - 8y^2 = 1 - 8 \frac{r^2}{(r^2+2)^2} = \frac{(r^2-2)^2}{(r^2+2)^2} \text{ et donc}$$

$$X = \frac{1 + \frac{r^2-2}{r^2+2}}{\frac{2r}{r^2+2}} = r \text{ ou } X = \frac{1 - \frac{r^2-2}{r^2+2}}{\frac{2r}{r^2+2}} = \frac{2}{r}.$$

Dans le premier cas, posons $s = \frac{2}{r}$, alors $X = \frac{2}{s}$ et $y = \frac{\frac{2}{s}}{\frac{4}{s^2}+2} = \frac{s}{s^2+2}$ et dans les

deux cas, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $X = \frac{2}{r}$ et $y = \frac{r}{r^2+2}$, d'où :

$$x = \frac{2}{r} - \frac{r}{r^2+2} = \frac{r^2+4}{r(r^2+2)}. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\Gamma' = \Gamma \cup \{(0, 0, 1)\}}.$$

3. Les formules de changement de base donnent $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$; d'où l'équation devient : $\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \times 2X^2 = -\sqrt{2}Y \Leftrightarrow 2X^2(X+Y) = -2Y$ ou encore $Y = -\frac{X^3}{X^2+1}$. On a montré que :

$$\boxed{\text{Dans la nouvelle base, } \Gamma' \text{ a pour équation } Y = -\frac{X^3}{X^2+1}}$$

Partie IV -

IV. A. 1) $A_V \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yu + zu^2 \\ z + xu + yu^2 \\ y + zu + xu^2 \end{pmatrix} = (x + yu + zu^2) \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix}$. D'où, comme $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } A_V \text{ associé à la valeur propre } x + yu + zu^2}$$

- 2) En choisissant pour u successivement les trois racines cubiques de 1, $1, j$ et j^2 , l'on obtient 3 vecteurs propres de A_V . Leur déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \neq 0$ (déterminant de Van der Monde associé aux 3 valeurs distinctes $1, j$ et j^2). Ces trois vecteurs forment donc une base de \mathbb{C}^3 , formée de vecteurs propres de A_V . Donc :

$$\text{En posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix},$$

$$\text{l'on a } P^{-1}A_V P = \begin{pmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ 0 & x+yj+zj^2 & 0 \\ 0 & 0 & x+yj^2+zj \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Sp}(A_V) = \{x+y+z, x+yj+zj^2, x+yj^2+zj\}$$

- 3) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc : $A_v = xI_3 + yJ + zJ^2$ et si u est une valeur propre de J

associée au vecteur propre U , $A_V U = xU + yuU + zu^2U = (x + yu + zu^2)U$. Donc les valeurs propres de A_V sont de la forme $x + yu + zu^2$ où $u \in \text{Sp}(J)$.

- 4) Les valeurs propres complexes de f_V sont $x + y + z$, $x + jy + j^2z$ et $x + j^2y + jz$. Les deux dernières sont conjuguées et réelles si et seulement si $x + jy + j^2z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x - z) + j(y - z) \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $y = z$.

Si $y = z = 0$, f_V admet une valeur propre réelle triple : x et le sous-espace propre associé est E de dimension 3 ; donc f_V n'admet pas une droite stable unique.

Si $y = z \neq 0$, f_V admet une valeur propre réelle simple $x + 2y$ et une valeur propre réelle double $x - y$; donc f_V n'admet pas une droite stable unique.

Si $y \neq z$, f_V admet une valeur propre réelle unique simple et son sous-espace propre associé est évidemment de dimension 1 ; donc f_V admet une droite stable unique.

Conclusion : f_V possède une et une seule droite stable, ainsi qu'un plan stable unique si et seulement si $y \neq z$.

- 5) $\det A_V = (x + y + z)(x + jy + j^2z)(x + j^2y + jz)$ (produit des valeurs propres)
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy(j^2 + j) + xz(j + j^2) + yz(j^2 + j))$
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$. D'où :

$$\det A_V = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

- B. $\forall V = (x, y, z), V' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(V + \lambda V') &= g(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (x + \lambda x')I_3 + (y + \lambda y')J + (z + \lambda z')J^2 \\ &= xI_3 + yJ + zJ^2 + \lambda(x'I_3 + y'J + z'J^2) \\ &= g(V) + \lambda g(V') \end{aligned}$$

D'où g est linéaire.

$\ker(g) = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(V) = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$ car (I_3, J, J^2) est libre. Donc g est injective.

g est surjective par définition ; donc g est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre \mathbb{R}^3 et $\{A_V, V \in \mathbb{R}^3\}$.

- C. 1) Notons C_λ la courbe intersection de Π_λ et \mathcal{S} .

C_λ a pour équation :

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ \lambda \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \lambda \\ \lambda(3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2) = 2 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, l'équation n'a pas de solution ; sinon, elle équivaut à :

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2 + \lambda^3}{3\lambda} \end{cases}$$

Si $\frac{2 + \lambda^3}{3\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda \in] -\sqrt[3]{2}, 0[$, la seconde équation n'a pas de solution ; dans le cas contraire, c'est celle d'une sphère de centre O , qui coupe Π_λ si et seulement si

$d(O, \Pi_\lambda) \leq \sqrt{\frac{2 + \lambda^3}{3\lambda}}$, ce qui équivaut à :

$$\frac{\lambda^2}{3} - \frac{2 + \lambda^3}{3\lambda} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3\lambda} \leq 0.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \text{si } \lambda \leq 0, C_\lambda = \emptyset \\ \text{si } \lambda > 0, C_\lambda \text{ est le cercle de centre la projection orthogonale de } O \text{ sur } \Pi_\lambda \\ \text{et de rayon } \sqrt{\frac{2}{3\lambda}} \text{ du plan } \Pi_\lambda \end{cases}$$

On en déduit que \mathcal{S} est un ensemble de révolution d'axe Δ la droite passant par O et orthogonale à Π_λ ; Δ a pour équation $x = y = z$.

$$\begin{aligned} 2) \quad A_V \times A_{V'} &= (xI_3 + yJ + zJ^2)(x'I_3 + y'J + z'J^2) \\ &= (xx' + yz' + zx')I_3 + (xy' + yx' + zz')J + (xz' + yy' + zx')J^2 \\ &= A_{V''} \end{aligned}$$

Donc $A_{V''} = A_V \times A_{V'}$.

- Soient V et $V' \in \mathcal{S}$; alors $A_{V*V'} = A_V \times A_{V'} \Rightarrow \det(A_{V*V'}) = \det(A_V) \times \det(A_{V'}) = 1$ puisque $V, V' \in \mathcal{S}$; donc $V * V' \in \mathcal{S}$ et \mathcal{S} est stable pour $*$.

- Montrons $*$ commutative dans \mathcal{S} .

Soient $V, V' \in \mathcal{S}$; $A_V \times A_{V'} = (xI_3 + yJ + zJ^2)(x'I_3 + y'J + z'J^2)$. Or les puissances de J commutent entre elles, d'où $A_V \times A_{V'} = A_{V'} \times A_V \Rightarrow A_{V*V'} = A_{V'*V}$, ce qui montre grâce à l'isomorphisme g , $V * V' = V' * V$ et $*$ est commutative dans \mathcal{S} .

- Soient V, V' et $V'' \in \mathcal{S}$; le produit matriciel est associatif et $A_V \times (A_{V'} \times A_{V''}) = (A_V \times A_{V'}) \times A_{V''} \Rightarrow A_{V*(V'*V'')} = A_{(V*V')*V''}$; grâce à l'isomorphisme g , on en déduit, $V * (V' * V'') = (V * V') * V''$ et $*$ est associative dans \mathcal{S} .

- $\det(I_3) = 1$, donc $(1, 0, 0) \in \mathcal{S}$. Soit $V \in \mathcal{S}$; $A_V \times A_{(1,0,0)} = A_{(1,0,0)} \times A_V = A_V \times I_3 = A_V \Rightarrow A_{V*(1,0,0)} = A_{(1,0,0)*V} = A_V$; donc $V * (1, 0, 0) = (1, 0, 0) * V = V$; on a montré que $(1, 0, 0)$ est élément neutre pour $*$ dans \mathcal{S} .

- Soit $V = (x, y, z) \in \mathcal{S}$; cherchons $V' = (x', y', z') \in \mathcal{S}$ tel que $V * V' = V' * V = (1, 0, 0)$, ce qui équivaut grâce à g à $A_V \times A_{V'} = A_{V'} \times A_V = I_3$. Il suffit de résoudre $A_V \times A_{V'} = I_3$ puisque $*$ est commutative, c'est à dire :

$$\begin{cases} xx' + zy' + yz' = 1 \\ yx' + xy' + zz' = 0 \\ zx' + yy' + xz' = 0 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x', y', z') ; \text{ c'est un système de Cramer puisque son}$$

déterminant est 1 ; on a alors $V' \in \mathbb{R}^3$ tel que $A_V \times A_{V'} = I_3$; en calculant le déterminant

des deux membres, on obtient $\det(A_{V'}) = 1$, ce qui montre que $V' \in \mathcal{S}$; on a montré que tout élément de \mathcal{S} possède un symétrique pour la loi $*$.

Donc $(\mathcal{S}, *)$ est un groupe commutatif.

3) Montrons d'abord $\forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, $F(t, u) \in \mathcal{S}$.

Posons pour $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, $F(t, u)$, $(x, y, z) = F(t, u)$ et $V = (x, y, z)$. On a alors :
 $x + y + z = e^{-2t}$ car $1 + j + j^2 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{1}{9} [e^{-4t} + 2e^{-t}(u + \bar{u}) + e^{2t}(u + \bar{u})^2 + e^{-4t} + 2e^{-t}(j^2u + j\bar{u}) + \\ &e^{2t}(j^2u + j\bar{u})^2 + e^{-4t} + 2e^{-t}(ju + j^2\bar{u}) + e^{2t}(ju + j^2\bar{u})^2] \\ &= \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{2}{9}e^{-t}(1 + j + j^2)(u + \bar{u}) + \frac{e^{2t}}{9}(1 + j + j^2)(u^2 + \bar{u}^2) + \\ &\frac{2}{9}e^{2t}u\bar{u}(1 + 1 + 1) \\ &= \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{2}{9}e^{-t}(1 + j + j^2)(u + \bar{u}) + \frac{e^{2t}}{9}(1 + j + j^2)(u^2 + \bar{u}^2) + \\ &\frac{2}{9}e^{2t}u\bar{u}(1 + 1 + 1) \\ &= \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \det A_V &= (x + y + z) \left(\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{(x + y + z)^2}{2} \right) \\ &= e^{-2t} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{2t} \right) - \frac{e^{-4t}}{2} \right) \\ &= e^{-2t}e^{2t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a montré que $\forall (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, $F(t, u) \in \mathcal{S}$.

Montrons que $\forall V = (x, y, z) \in \mathcal{S}$, $\exists (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$ tel que $F(t, u) = V$.

Soit $V = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ Posons $t = -\frac{1}{2} \ln(x + y + z)$ (en effet, on a vu que pour tout point V de \mathcal{S} , $x + y + z > 0$). Cela équivaut à $x + y + z = e^{-2t}$.

Comme $\det A_V = (x + y + z)(x + jy + j^2z)(x + j^2y + jz) = 1$, on a alors $(x + jy + j^2z)(x + j^2y + jz) = e^{2t}$. Or $(x + jy + j^2z)$ et $(x + j^2y + jz) = 1$ sont 2 complexes conjugués, leur module commun est donc e^t et l'on peut poser : $x + jy + j^2z = e^t u$ et $x + j^2y + jz = e^t \bar{u}$. D'où le système :

$$\begin{cases} x + y + z = e^{-2t} & /1 & /1 & /1 \\ x + jy + j^2z = e^t u & /1 & /j^2 & /j \\ x + j^2y + jz = e^t \bar{u} & /1 & /j & /j^2 \end{cases}, \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(u + \bar{u})) \\ y = \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(j^2u + j\bar{u})) \\ z = \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(ju + j^2\bar{u})) \end{cases}$$

J'ai montré que : $\forall V = (x, y, z) \in \mathcal{S}$, $\exists (t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$ tel que $F(t, u) = V$ et F est surjective.

Montrons que F est injective.

Soient (t, u) et (t', u') $\in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$ tels que $F(t, u) = F(t', u')$. Posons cette valeur commune égale à (x, y, z) .

On a alors :

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(u + \bar{u})) + \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(j^2u + j\bar{u})) + \frac{1}{3}(e^{-2t} + e^t(ju + j^2\bar{u})) \\ &= e^{-2t} \end{aligned}$$

et de même $x + y + z = e^{-2t'}$; d'où $t = t'$.

Puis :

$$x + jy + j^2z = \frac{1}{3} (e^{-2t}(1 + j + j^2) + e^t(u + \bar{u}) + je^t(j^2u + j\bar{u}) + j^2e^t(ju + j^2\bar{u})) = e^t u$$

et de même :

$$x + jy + j^2z = e^t u'. \text{ D'où } u = u'. \text{ J'ai montré que } \underline{F \text{ est injective.}}$$

F est une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ sur \mathcal{S}

4) L'on a vu que si $V = (x, y, z) \in \mathcal{S}$, $t = -\frac{1}{2} \ln(x + y + z)$ et que $u = \frac{x + jy + j^2z}{e^t}$.

Posons pour $(t, u), (t', u') \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$, $F(t, u) = V = (x, y, z)$, $F(t', u') = V' = (x', y', z')$ et $V'' = (x'', y'', z'') = V' * V''$.

On a alors :

$$\begin{aligned} x'' + y'' + z'' &= xx' + yz' + zy' + xy' + yx' + zz' + xz' + yy' + zx' \\ &= (x + y + z)(x' + y' + z') \\ &= e^{-2t} \times e^{-2t'} \\ &= e^{-2(t+t')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'' + jy'' + j^2z'' &= xx' + yz' + zy' + j(xy' + yx' + zz') + j^2(xz' + yy' + zx') \\ &= (x + jy + j^2z)(x' + jy' + j^2z') \\ &= e^{t+t'} \times uu' \quad (|uu'| = 1) \end{aligned}$$

Donc $F(t, u) * F(t', u') = F(t + t', uu')$.

L'on en déduit que F est un isomorphisme du groupe produit $(\mathbb{R} \times \mathbb{U}, \mathbb{T})$ (en posant $(t, u)\mathbb{T}(t', u') = (t + t', uu')$) sur le groupe $(\mathcal{S}, *)$.

△△△

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI

Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc

Tel. 0296639414

Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr