

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1995

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 3 pages.

Soit f la fonction définie sur la droite réelle privée des points d'abscisse 1 et 2 par les

relations :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2n|1-x|} & \text{si } x \text{ est un réel différent de } 0, 1 \text{ et } 2, \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

L'objet de ce problème est d'étudier les variations et le graphe de la fonction f (première partie), de rechercher le développement en série entière de f dans un voisinage de 0 (seconde partie) puis d'appliquer certains résultats obtenus pour calculer l'inverse d'une matrice.

Première partie

Graphe de la fonction f

- 1°) Étudier les variations de la fonction f . Est-elle continue en 0 ? Est-ce que la fonction f peut être prolongée par continuité en 1 ? Établir que la fonction f admet un minimum sur la demi-droite $]2, \infty[$. Soit x_0 l'abscisse de ce minimum ; déterminer ce réel x_0 et la valeur prise en ce point x_0 par la fonction f , avec une précision d'au moins 10^{-2} ; justifier la précision, éventuellement supérieure, des résultats donnés en indiquant la méthode et les moyens de calcul utilisés.
- 2°) Étudier la convexité de la fonction f . Démontrer que le graphe de la fonction f admet deux points d'inflexion dont les abscisses sont des réels x_1 et x_2 supérieurs à 1. Calculer ces réels x_1 et x_2 ainsi que les valeurs prises par la fonction f en ces points avec une précision d'au moins 10^{-2} ; justifier la précision, éventuellement supérieure, des résultats donnés en indiquant la méthode et les moyens de calcul utilisés.
- 3°) Tracer le graphe de la fonction f en prenant 1cm comme unité. Préciser le graphe de la fonction f au voisinage du point d'abscisse 1 ainsi que les branches infinies.

Seconde partie

Développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de l'origine

1°) a. Démontrer que la fonction f admet des développements limités à tout ordre n, n ≥ 1, dans un voisinage de l'origine. Un tel développement limité à l'ordre n s'écrit :

$$f(x) = \sum_{p=0}^n a_p x^p + o(x^n) .$$

Déterminer les deux premiers coefficients a₀ et a₁.

b. Démontrer que la fonction dérivée f' admet des développements limités à tout ordre n, n ≥ 1, dans un voisinage de l'origine. Quel est le développement limité de la dérivée f' à l'ordre n-1 ?

c. Établir que pour tout entier n, n ≥ 2, les coefficients a_p vérifient la relation :

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-k+1} .$$

En déduire les valeurs des coefficients a₂, a₃, a₄.

2°) Démontrer que la fonction f vérifie dans un voisinage de 0 l'équation différentielle

$$x(1-x)y' - (1-x)y = y^2 .$$

En déduire que, pour tout entier n, n ≥ 4, les coefficients a_p vérifient la relation :

$$(2) \quad (n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} + \sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p} .$$

3°) a. Déduire des résultats précédents que la suite des coefficients a_n vérifie, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'encadrement : $\frac{1}{3n^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général a_n xⁿ, n ≥ 0.

Soit S(x) la somme de la série entière a_n xⁿ, n ≥ 0, lorsqu'elle est convergente :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

c. Quelle est la valeur dans un voisinage de l'origine de l'expression $S(x) \frac{\ln|1-x|}{x}$?

En déduire une relation simple, pour tout réel x de l'intervalle]-R, R[, entre S(x) et f(x).

d. Établir, pour tout entier n, n ≥ 1, et tout réel x de l'intervalle]0, 1[, les inégalités :

$$\sum_{p=1}^n a_p x^p \leq \sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p = \frac{x}{1-x} + 1.$$

En déduire que la série de terme général $a_n, n \geq 1$, est convergente.

- e. Démontrer que la fonction S est encore définie pour $x = R$ et $x = -R$. Déterminer les valeurs des deux sommes S_1 et S_2 des séries de termes généraux $a_n, n \geq 1$, et $(-1)^n a_n, n \geq 1$:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ; S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n .$$

- 4°) Démontrer que la série de terme général $u_n, n \geq 4$, défini par la relation $u_n = \sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p}$,

est convergente. Donner un majorant de sa somme $\sum_{n=4}^{\infty} u_n$. En déduire que la suite de terme général $n a_n, n \geq 1$, est convergente ; déterminer sa limite.

- 5°) Application au calcul de l'inverse d'une matrice.

Soit A la matrice carrée d'ordre n dont les éléments a_{ij} sont définis par les relations :

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq n , \\ 0 & \text{si } i < j . \end{cases}$$

L'indice i désigne le numéro de la ligne, l'indice j celui de la colonne. C'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/n & 1/n-1 & 1/n-2 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Soit J la matrice carrée d'ordre n dont les éléments c_{ij} sont définis par les relations :

$$c_{ij} = \delta_{i,j+1} .$$

Le symbole $\delta_{i,j}$ désigne le réel 1 si les indices i et j sont égaux, 0 s'ils sont différents.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calculer les puissances successives de la matrice J . Démontrer que la matrice A est une fonction polynomiale de J . Déterminer la matrice inverse de la matrice A .