

Inégalité de Prékopa et Leindler.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité à démontrer est évidente.

Sinon, on a d'abord

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda} \Leftrightarrow \ln(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda \ln(a) + (1 - \lambda) \ln(b).$$

Cependant la fonction $\ln$ a pour dérivée $x > 0 \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, fonction décroissante, et donc $\ln$ est une fonction concave. On a donc $\ln(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda \ln(a) + (1 - \lambda) \ln(b)$, ce qui démontre l'inégalité proposée.

Pour la deuxième inégalité, on procède de même. Il suffit de démontrer que la fonction $f_u : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^u \in \mathbb{R}$ est convexe. Or f_u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, f_u''(x) = u(u-1)x^{u-2} > 0.$$

L'inégalité proposée s'en déduit alors immédiatement.

2. Fixons $b \geq 0$ et étudions la fonction $f : a \in \mathbb{R}_+ \mapsto (a+b)^\lambda - (a^\lambda + b^\lambda) \in \mathbb{R}$. f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall a > 0, f'(a) = \lambda((a+b)^{\lambda-1} - a^{\lambda-1}).$$

Puisque $\lambda - 1 < 0$, la fonction $x > 0 \mapsto x^{\lambda-1} \in \mathbb{R}$ est décroissante et donc pour tout $a > 0$, $f'(a) \leq 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $f(0) = 0$, on a bien

$$(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda.$$

3. Soit $\varphi : u \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{F} \int_{-\infty}^u f(x) dx = \frac{1}{F} \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \frac{1}{F} \int_0^u f(x) dx$.

f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi' = \frac{1}{F} f > 0$.

φ est donc une application strictement croissante avec de plus

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \varphi(u) = \frac{1}{F} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) dx + \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_0^u f(x) dx \right) = \frac{1}{F} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) dx - \int_{-\infty}^0 f(x) dx \right) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) = \frac{1}{F} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) dx + \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u f(x) dx \right) = \frac{1}{F} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \right) = 1.$$

φ établit donc une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$.

Il suffit alors de poser $u = \varphi^{-1} :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$. En effet, $\frac{1}{F} \int_{-\infty}^{u(t)} f(x) dx = \varphi(u(t)) = t$ pour tout $t \in]0, 1[$.

La preuve de l'existence de la fonction v est absolument identique (en raisonnant à partir de $\psi : v \mapsto \frac{1}{G} \int_{-\infty}^v g(x) dx$).

4. La dérivée $\varphi' = \frac{1}{F} f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $u = \varphi^{-1}$ est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall t \in]0, 1[, u'(t) = \frac{1}{\varphi'(u(t))} = \frac{F}{f(u(t))} > 0.$$

On procède identiquement pour calculer v' . On obtient alors

$$\forall t \in]0, 1[, v'(t) = \frac{1}{\psi'(v(t))} = \frac{G}{g(v(t))} > 0.$$

5. Les fonctions u et v sont donc strictement croissantes sur $]0, 1[$.

De plus, puisque $\lim_{-\infty} \varphi = 0$, $\lim_{+\infty} \varphi = 1$ et que $u = \varphi^{-1}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow 1} u(t) = +\infty.$$

De manière identique, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow 1} v(t) = +\infty.$$

Puisque $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$, w est d'abord une fonction strictement croissante de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow 1} w(t) = +\infty$$

ce qui montre que w est une bijection strictement croissante de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

On a également $w' = \lambda u' + (1 - \lambda)v' > 0$ donc w définit un changement de variable admissible de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

On peut alors écrire, en utilisant ce changement de variables et l'hypothèse sur f, g, h ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw = \int_0^1 h(w(t))w'(t)dt \geq \int_0^1 f(u(t))^\lambda g(v(t))^{1-\lambda} w'(t)dt.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de la question 1, on a pour tout $t \in]0, 1[$,

$$w'(t) = \lambda u'(t) + (1 - \lambda)v'(t) \geq u'(t)^\lambda v'(t)^{1-\lambda} = \frac{F^\lambda}{f(u(t))^\lambda} \frac{G^{1-\lambda}}{g(v(t))^{1-\lambda}}$$

d'après l'expression de u' et v' obtenue à la question précédente.

En réinjectant cette inégalité dans l'intégrale, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw \geq \int_0^1 F^\lambda G^{1-\lambda} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \right)^{1-\lambda},$$

ce qui démontre l'inégalité "P-L".

6. On a d'abord, puisque $t \mapsto e^{-t}$ est un fonction strictement décroissante,

$$\Psi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda} \Leftrightarrow (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 \leq \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2.$$

L'inégalité proposée résulte alors de la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ (car cette fonction est deux fois dérivable et de dérivée seconde égale à $2 > 0$).

7. Supposons d'abord $|y| \leq M$.

Si $|z| \leq \hat{M}$, il n'y a rien à démontrer puisque $\Psi(x) \leq 1$.

Sinon $|z| > \hat{M}$ et alors, d'après la décroissance stricte de $t \mapsto e^{-t}$,

$$\Psi(x) \leq \Psi_M(z) \Leftrightarrow \Theta^2 x^2 \geq (|z| - M)^2 \Leftrightarrow \Theta|x| \geq |z| - M \Leftrightarrow \Theta|x| + M \geq |z|.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire et la définition de $\Theta \leq 1$,

$$|z| \leq \Theta(|x| + |y|) \leq \Theta(|x| + M) \leq \Theta|x| + M.$$

L'inégalité proposée est donc démontrée.

En échangeant les rôles de x et y ainsi que ceux de λ et de $1 - \lambda$, on en déduit que $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$ pour $|x| \leq M$.

8. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.

D'après la question 2, on a d'abord

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} = (f(x) + \epsilon\Psi(x))^\lambda (g(y) + \epsilon\Psi(y))^{1-\lambda} \leq (f(x)^\lambda + \epsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda)(g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda} \Psi(y)^{1-\lambda})$$

En développant et puisque $\epsilon^\lambda \leq \epsilon^\Lambda$, $\epsilon^{1-\lambda} \leq \epsilon^\Lambda$ (car $\epsilon \in]0, 1[$), on obtient donc

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^\Lambda (\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^\lambda f(x)^{1-\lambda}) + \epsilon\Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

D'après la question 6, on a ensuite $\Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda} \leq \Psi(z)$ et par hypothèse sur f, g, h $f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leq h(z)$. On a donc

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \epsilon^\Lambda (\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^\lambda f(x)^{1-\lambda}) + \epsilon\Psi(z).$$

De plus, si $|y| > M$, on a évidemment $\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leq \|g\|_\infty^{1-\lambda} (\Psi_M(z))^\Lambda$

Si maintenant $|y| \leq M$, on a d'après la question précédente $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$ et donc

$$\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leq \|g\|_\infty^{1-\lambda} (\Psi_M(z))^{1-\lambda} \leq \|g\|_\infty^{1-\lambda} (\Psi_M(z))^\Lambda$$

puisque $\Psi_M(z) \in [0, 1]$.

De la même manière, on montre que $\Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda \leq \|f\|_\infty^\Lambda (\Psi_M(z))^\Lambda$.

L'inégalité voulue est donc bien démontrée.

9. On applique la question 5 avec les fonctions f_ϵ, g_ϵ et $h_\epsilon = h + \epsilon^\Lambda (\|f\|_\infty^\Lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}) \Psi_M^\Lambda + \epsilon\Psi$.

Puisque f_ϵ et g_ϵ sont strictement positives et Ψ, Ψ_M^Λ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (car négligeables devant $x \mapsto x^{-2}$ en l'infini), on a ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)dx \right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x)dx \right)^{1-\lambda}. \quad (1)$$

De plus, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\epsilon}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\epsilon}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{\epsilon}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx + \epsilon^{\Lambda}(\|f\|_{\infty}^{\Lambda} + \|g\|_{\infty}^{1-\Lambda}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_M(x)^{\Lambda}dx$$

et, puisque $\Lambda > 0$, on a aussi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\epsilon}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

En passant à la limite dans (1), on obtient bien l'inégalité "P-L".

10. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.

Si x et y appartiennent à l'intervalle $[-n-1, n+1]$, l'inégalité est bien vérifiée (puisque $\chi_n(x) \leq 1$ et $\chi_n(y) \leq 1$ et qu'alors $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1$).

Sinon, on a en particulier $\chi_n(x) = 0$ ou $\chi_n(y) = 0$ et l'inégalité est immédiatement vérifiée.

11. Posons $f_n = f\chi_n$, $g_n = g\chi_n$ et $h_{n+1} = g\chi_{n+1}$. Ces fonctions sont nulles en dehors de l'intervalle $[-n-2, n+2]$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0, 1[$.

On a d'abord $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda}g(y)^{1-\lambda}$ et $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \chi_n(x)^{\lambda}\chi_n(y)^{1-\lambda}$ d'après la question précédente.

En multipliant ces inégalités entre nombres positifs, on a donc

$$h_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f_n(x)^{\lambda}g_n(y)^{1-\lambda}.$$

On applique maintenant la question 9 qui nous fournit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(x)dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \right)^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx \right)^{1-\lambda}. \quad (2)$$

Cherchons à appliquer le théorème de convergence dominée.

On a d'abord $\chi_n(x) \rightarrow 1$ pour tout x réel. Ainsi $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $g_n(x) \rightarrow g(x)$, $h_{n+1}(x) \rightarrow h(x)$ quelque soit x réel.

D'autre part, puisque $0 \leq \chi_n \leq 1$, on a $|f_n| \leq |f|$, $|g_n| \leq |g|$ et $|h_{n+1}| \leq |h|$.

Puisque $|f|$, $|g|$ et $|h|$ sont des fonctions intégrables, les hypothèses d'application du théorème sont vérifiées donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

En passant à la limite dans l'inégalité (2), on obtient bien l'inégalité "P-L".

Partie II. Fonctions log-concaves.

12. L'application $b : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle S(x); y \rangle$ est bilinéaire donc continue. Par composition d'applications continues, $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp(-\langle S(x); x \rangle)$ est bien continue.

D'autre part, on a pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, puisque $t \mapsto e^{-t}$ est strictement décroissante,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda}f(y)^{1-\lambda} \Leftrightarrow q(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y)$$

où l'on a posé q la forme quadratique associée à b .

Or puisque b est symétrique

$$q(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda(1-\lambda)b(x, y) + (1-\lambda)^2 q(y)$$

et b étant de plus positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$b(x, y) \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \leq \frac{1}{2}(q(x) + q(y))$$

puisque pour tous a, b réels $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. On en déduit finalement (car $\lambda(1-\lambda) \geq 0$)

$$q(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (\lambda^2 + \lambda(1-\lambda))q(x) + ((1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda))q(y) = \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y).$$

La fonction f est bien log-concave.

Partie III. Quelques applications géométriques.

13. Fixons pour le moment x_0, y_0 deux réels et posons $z_0 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0$.

Les fonctions $f_0 : x \mapsto f(x_0, x)$, $g_0 : y \mapsto g(y_0, y)$, $h_0 : z \mapsto h(z_0, z)$ sont continues, positives, intégrables (car nulles sur $\mathbb{R}/[-M, M]$).

La question 11 nous montre alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x) dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) dx \right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x) dx \right)^{1-\lambda}$$

puisque d'après l'hypothèse sur f, g, h

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, h_0(\lambda x + (1 - \lambda)y_0) \geq f_0(x)^\lambda g_0(y)^{1-\lambda}.$$

Posons alors $F(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, x) dx$, $G(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_0, x) dx$ et $H(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z_0, x) dx$.

Les fonctions F, G et H sont évidemment positives et intégrables (elles sont aussi nulles sur $\mathbb{R}/[-M, M]$). Elles sont de plus continues par théorème général sur les intégrales à paramètres.

En effet,

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^2, |f(x_0, x)| \leq \begin{cases} \max_{[-M, M]^2} |f| & \text{si } (x_0, x) \in [-M, M]^2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, x) \in \mathbb{R}$ est continue. Ainsi F est continue et par un raisonnement analogue, G et H le sont également.

On vient donc démontrer que F, G et H sont des fonctions justiciables de la question 11. On en déduit donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx \right)^{1-\lambda}$$

ce qui, au vu de la définition des intégrales doubles, fournit l'inégalité proposée.

14. L'ensemble $C(\mathcal{A})$ est non vide ($0 \in C(\mathcal{A})$) et de plus, quelque soit $f \in C(\mathcal{A})$,

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int \int_A f(x, y) dx dy \leq \int \int_A dx dy < +\infty$$

puisque $\mathcal{A}$ est bornée. La borne supérieure du texte est donc bien définie.

De plus, puisque $\mathcal{A}$ est un ouvert non vide, il existe $X_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que si $\|X - X_0\| \leq \varepsilon$ alors $X \in \mathcal{A}$.

Soit alors la fonction

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|X - X_0\| \geq \varepsilon, \\ \varepsilon - \|X - X_0\| & \text{si } \|X - X_0\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

f est une fonction continue (comme composée de fonctions continues) à valeurs dans $[0, 1]$. On a donc $f \in C(\mathcal{A})$ et

$$V(\mathcal{A}) \geq \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy > 0$$

car f est positive et n'est pas identiquement nulle.

15. D'après la question précédente, on a d'abord

$$V(D(O, R)) \leq \int \int_{D(O, R)} dx dy = \pi R^2. \quad (3)$$

Soit de plus $\varepsilon \in]0, R[$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vaut 1 sur $[-(R - \varepsilon), R - \varepsilon]$, 0 sur $] -\infty, -(R - \varepsilon)] \cup [R - \varepsilon, +\infty[$ et qui est affine sur $[R - \varepsilon, R]$ et $[-R, -(R - \varepsilon)]$.

En posant $f(X) = \varphi(\|X\|)$, on définit donc un élément de $C(\mathcal{A})$ valant 1 sur $D(O, R - \varepsilon)$ et donc

$$V(D(O, R)) \geq \int \int_{D(O, R - \varepsilon)} dx dy = \pi(R - \varepsilon)^2. \quad (4)$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient, d'après (3) et (4), $V(D(O, R)) = \pi R^2$.

On procède de même pour calculer $V([a, b[\times]c, d])$. On a d'abord

$$V([a, b[\times]c, d]) \leq \int \int_{[a, b[\times]c, d]} dx dy = (b - a)(d - c). \quad (5)$$

Soit $\varepsilon \in]0, \min(b - a, d - c)[$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vaut 1 sur $[a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2]$, 0 sur $] -\infty, a[\cup]b, +\infty[$ et qui est affine sur $[a, a + \varepsilon/2]$ et $[b - \varepsilon/2, b]$.

Soit également $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vaut 1 sur $[c + \varepsilon/2, d - \varepsilon/2]$, 0 sur $] - \infty, c[\cup]d, +\infty[$ et qui est affine sur $[c, c + \varepsilon/2]$ et $[d - \varepsilon/2, d]$.

En posant $f(x, y) = \phi(x)\varphi(y)$, on définit donc un élément de $C(\mathcal{A})$ valant 1 sur $[a + \varepsilon/2, b - \varepsilon/2] \times [c + \varepsilon/2, d - \varepsilon/2]$ et donc

$$V([a, b[\times]c, d]) \geq \int \int_{[a+\varepsilon/2, b-\varepsilon/2] \times [c+\varepsilon/2, d-\varepsilon/2]} dxdy = (b - a - \varepsilon)(d - c - \varepsilon). \quad (6)$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient, d'après (5) et (6), $V([a, b[\times]c, d]) = (b - a)(d - c)$.

Dans les deux cas on trouve l'aire des parties proposées.

16. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des ouverts bornés.

- Il existe $R > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{A}$, $\|X\| \leq R$ et pour tout $Y \in \mathcal{B}$, $\|Y\| \leq R$.

Si $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$ alors il existe $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$ tels que $Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y$ et l'inégalité triangulaire nous fournit alors $\|Z\| \leq R$. $\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$ est donc borné.

- Soit $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$; il existe $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$ tels que $Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y$.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant ouverts, il existe $r > 0$ tel que $D(X, r) \subset \mathcal{A}$ et $D(Y, r) \subset \mathcal{B}$. On a de plus $D(Z, r) = \lambda D(X, r) + (1 - \lambda)D(Y, r) \subset \lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$ et donc $\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$ est ouvert.

Soit $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$.

La fonction h définie par la formule de l'énoncé est une fonction continue à valeurs dans $[0, 1]$. De plus, h est nulle en dehors de $\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$. En effet, si $h(Z) > 0$ alors il existe X, Y tels que $Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y$ et $f(X) > 0, g(Y) > 0$ ce qui implique $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}$ puis $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}$.

En d'autres termes, on a donc $h \in C(\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B})$. De plus, f, g, h sont justiciables de la question 13 car

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, h(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}$$

et ainsi

$$V(\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}) \geq \int \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) dxdy \geq \left(\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dxdy \right)^\lambda \left(\int \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dxdy \right)^{1-\lambda}.$$

En passant au supremum sur $f \in C(\mathcal{A})$ puis sur $g \in C(\mathcal{B})$ dans cette inégalité, on en déduit bien

$$V(\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}) \geq V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda}.$$

17. Soit $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$. On note toujours $h \in C(\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B})$ la fonction du texte.

On a d'abord

$$\gamma(\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}) \geq \int \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) u(x, y) dxdy$$

puis, puisque $h(\lambda X + (1 - \lambda)Y) u(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \geq (f(X)u(X))^\lambda (g(Y)u(Y))^{1-\lambda}$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$, la question 13 nous fournit

$$\gamma(\lambda\mathcal{A} + (1 - \lambda)\mathcal{B}) \geq \left(\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) u(x, y) dxdy \right)^\lambda \left(\int \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) u(x, y) dxdy \right)^{1-\lambda}.$$

En passant au supremum sur $f \in C(\mathcal{A})$ puis sur $g \in C(\mathcal{B})$ dans cette inégalité, on obtient l'inégalité voulue.