

E3A 2020 - MP
Corrigé
 pour l'UPS, François Calio, MP Marceau Chartres

Exercice 1

1. On considère la famille $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} = (pq^k)_{k \in \mathbb{N}}$. C'est une famille de réels positifs sommable de somme 1 (on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \in]0, 1[$).

Ainsi elle définit une loi de probabilité dont elle est la famille des probabilités élémentaires.

2. On pose $X' = X + 1$. On a X' variable aléatoire, $X'(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, (X' = k) = (X = k - 1)$ donc $\mathbb{P}(X' = k) = pq^{k-1}$: X' suit donc une loi géométrique de paramètre p . Ainsi X' possède une espérance et donc, par linéarité de l'espérance, X possède une espérance et $\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1$ i.e. $\mathbb{E}(X) = \frac{q}{p}$.

3. La famille $((X = k))_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, donc $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = X))$.

Ainsi par σ -additivité, $\sum_k \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))$ converge et $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))$. Or X et Y sont indépendantes donc $\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k)) = \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) = p^2 q^{2k}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 (q^2)^k = p^2 \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p(1 - q)}{(1 + q)(1 - q)}$ donc $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{1 + q}$.

La famille $((X = Y), (X < Y), (X > Y))$ forme un système complet d'événements.

Or par symétrie, $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(X = Y))$, i.e. $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{q}{1 + q}$.

On pouvait aussi calculer la probabilité : $\mathbb{P}(Y > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} pq^j = q^{k+1}$ pour en déduire la probabilité $\mathbb{P}(X < Y)$ via la formule

$$\mathbb{P}(X < Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y > k) \dots$$

4. $S = X + Y$ avec X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc S est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, $(S = k) = \bigcup_{j=0}^k ((X = j) \cap (Y = k - j))$ union disjointe.

Donc $\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}((X = j) \cap (Y = k - j))$. Or X et Y sont indépendantes, donc :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = j) \mathbb{P}(Y = k - j) = \sum_{j=0}^k pq^j pq^{k-j} = (k + 1)p^2 q^k.$$

Ainsi $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = k) = (k + 1)p^2 q^k$

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = P_n(x) > 0$ comme produit de réels strictement positifs.

Or : si $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n \times \text{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right)$ avec $u_n > 0$ et $\text{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$: la suite

$(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. En reprenant les mêmes notations, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 1 > 0$. On peut donc poser $v_n = \ln(u_n)$ et on a :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\text{ch}\frac{x}{k}\right).$$

Or, lorsque k tend vers l'infini, on a : $\ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes. Ainsi la série $\sum_k \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{k}\right)$ converge et donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge i.e. la suite $(\ln(P_n(x)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Soit $S(x)$ sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \exp(v_n)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\exp(S(x))$ i.e. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$. En notant $\varphi(x)$ sa limite, on a φ définie sur $J = \mathbb{R}$ et de plus, φ strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. .

3.1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est paire, par conservation de la parité par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est paire}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car produit de fonctions positives et croissantes), par conservation de la monotonie par passage à la limite simple, $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+}$.

Par parité, on a alors $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^-}$

3.2. Par parité, pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer la continuité de φ sur tout segment de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$.

Soit $a > 0$. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $[0, a]$ par : $h_n(x) = \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{n}\right)$. On a $\|h_n\|_{\infty}^{[0,a]} = \ln\left(\operatorname{ch}\frac{a}{n}\right)$ où la notation $\|f\|_{\infty}^{[0,a]}$ désigne la borne supérieure de $|f(x)|$ lorsque x décrit $[0, a]$ et qui existe pour h_n par continuité de h_n sur le segment $[0, a]$.

Or la série $\sum \ln\left(\operatorname{ch}\frac{a}{n}\right)$ est convergente (et de somme $S(a)$ avec les notations de la question 2)).

Ainsi la série de fonction $\sum h_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$ donc elle converge uniformément sur $[0, a]$. Comme pour tout n , h_n est continue sur $[0, a]$, on en déduit que la somme uniforme S est aussi continue sur $[0, a]$. Enfin, par composition, comme $\varphi = \exp \circ S$, φ est continue sur $[0, a]$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$ et φ est paire, donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

4. .

4.1. Soit f la fonction $f = \frac{1}{\operatorname{ch}}$. f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. De plus, f est positive et paire. Pour montrer l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de la majorer sur $\mathbb{R}^+$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 < f(x) \leq 2e^{-x}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+, \operatorname{ch}(x) \geq \frac{1}{2}e^x$, et la fonction $x \rightarrow 2e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et par parité sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi $\boxed{\frac{1}{\operatorname{ch}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\theta : u \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(u) \in \mathbb{R}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}_+^*} \theta' \times f \circ \theta$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Or on

vient d'établir que $\int_{\mathbb{R}} f$ est une intégrale convergente, et on a donc l'autre aussi et : $\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2 + 1} du$.

Ainsi $\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\operatorname{ch}} = \pi}$

4.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(x) \geq P_1(x) = \operatorname{ch}(x) > 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{1}{\varphi(x)} \leq \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Or on vient de voir que $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, comme $\frac{1}{\varphi}$ est

continue positive, $\boxed{\frac{1}{\varphi} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

Exercice 3

Questions de cours

1. Avec $a \neq 0$. Si s_1 et s_2 sont les racines de $aX^2 + bX + c$, on a : $aX^2 + bX + c = a(X - s_1)(X - s_2)$ donc

$$\sigma_1 = s_1 + s_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } \sigma_2 = s_1 s_2 = \frac{c}{a}$$

2. On note $\mathcal{C}$ l'équation caractéristique

- Si r_1 et r_2 sont deux solutions réelles distinctes de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n}$
- Si r est solutions double de $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n}$
- Si $\mathcal{C}$ possède deux racines r_1 et r_2 non réelles conjuguées. On note ces racines $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]0, \pi[$. Alors $\boxed{\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))r^n}$

1. La suite $\left(\frac{1}{\text{ch } n}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\text{ch } n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\text{ch } (-n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathcal{C}$

2. • $\mathcal{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
 • Soit $(x, x') \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = \alpha x + \beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y' .
 On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{-n} = \alpha x_{-n} + \beta x'_{-n}$.
 Comme les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 Comme les suites $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$.
 Ainsi $y \in \mathcal{C}$. Et donc $\mathcal{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace de } E}$

3. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq A$.

De même, la suite $(x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{-n}| \leq B$.

On pose alors $C = \max(A, B)$, et on a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq C$: la suite x est bornée.

Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathcal{C} \text{ est bornée}}$

4. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}$. Soit $y = T(x) = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$. Ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ donc la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la somme des suites $(x_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui sont extraites de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc qui convergent. Ainsi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et donc, comme la convergence d'une suite ne dépend pas des premiers termes, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- De même $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Ainsi $y \in \mathcal{C}$.

On en déduit que T est une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.

Montrons la linéarité. Soit $(x, x') \in \mathcal{C}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = T(x)$, $y' = T(x')$, $z = \alpha x + \beta x'$, et $w = T(z)$ et $v = \alpha y + \beta y'$. On doit établir : $T(\alpha x + \beta x') = \alpha T(x) + \beta T(x')$ i.e. $v = w$. On note $x_n, x'_n, y_n, y'_n, z_n, w_n, v_n$ les termes généraux des suites x, x', y, y', z, w, v . On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$v_n = \alpha y_n + \beta y'_n = \alpha(x_{n-1} + x_{n+1}) + \beta(x'_{n-1} + x'_{n+1}) = (\alpha x_{n-1} + \beta x'_{n-1}) + (\alpha x_{n+1} + \beta x'_{n+1})$. Or dans ces derniers termes on reconnaît $z_{n-1} + z_{n+1} = w_n$. Donc $v = w$.

Ainsi T est bien une application linéaire de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ i.e. $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}}$

5. • Méthode 1. On a clairement $S \circ S = \text{id}_E = \text{id}_{\mathcal{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathcal{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathcal{C}$ et donc son axe, $\ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}})$, et sa direction, $\ker(S + \text{id}_{\mathcal{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathcal{C}$.
 Or on a tout aussi clairement $F = \{x \in \mathcal{C}; \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\} = \{x \in \mathcal{C}; S(x) = x\} = \ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \ker(S + \text{id}_{\mathcal{C}})$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathcal{C}}$
- Méthode 2. On a $F = \ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}})$ et $G = \ker(S + \text{id}_{\mathcal{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, propres pour l'endomorphisme S , associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe

i.e. $F + G = F \oplus G$.

De plus, si $x \in \mathcal{C}$, $x' = \frac{1}{2}(x + S(x))$ et $x'' = \frac{1}{2}(x - S(x))$, on montre aisément $x = x' + x''$, $x' \in F$ et $x'' \in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} = F + G$.

Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :

$\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .

7.1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$. Soit $x \in \ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n-1} + x_{n+1} = \lambda x_n$. En particulier :

$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - \lambda x_{n+1} + x_n = 0$ et, en posant $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, x'_{n+2} - \lambda x'_{n+1} + x'_n = 0$. On considère donc l'équation caractéristique $\mathcal{C}$ de ces suites récurrentes linéaires doubles : $X^2 - \lambda X + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \lambda^2 - 4$ donc est non nul car λ est différent de 2 et de -2

- Si $\Delta > 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont réelles, distinctes et de produit 1. Donc l'une d'entre elles est de module strictement supérieur à 1 et l'autre est son inverse. On note r la racine de module strictement supérieur à 1.

D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles, On a l'existence de 4 réels A, B, C, D tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = Ar^n + \frac{B}{r^n}$ et $x'_n = Cr^n + \frac{D}{r^n}$. Or les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc $A = 0 = C$. De plus $x_0 = x'_0$ donc $B = D$. Enfin $x'_1 + x_1 = \lambda x_0$ donc $(\lambda - 2r)B = 0$. Or les racines de $\mathcal{C}$ sont $\frac{\lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donc $|\lambda - 2r| = \sqrt{\Delta} \neq 0$. Ainsi $B = D = 0$ et donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$

S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

- Si $\Delta < 0$. Alors les racines de $\mathcal{C}$ sont complexes non réelles et conjuguées distinctes et de produit 1. Donc elles sont de module 1 et on peut les écrire sous la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$.

D'après l'expression des suites récurrentes linéaires doubles réelles, On a l'existence de 4 réels A, B, α, β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A(\cos(n\theta + \alpha))$ et $x'_n = B(\cos(n\theta + \beta))$. Or les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent alors que les suites $(\cos(n\theta + \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta + \beta))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent¹ car θ n'est pas un multiple de 2π donc $A = 0 = B$. Donc x est la suite nulle. Donc $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{C}}\}$

S'agissant d'un sous-espace, on en déduit que $\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}$

Ainsi si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, $\boxed{\ker(T - \lambda \text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

7.2. On applique le résultat précédent avec $\lambda = 0$. On a $\ker(T) = \{0_{\mathcal{C}}\}$, donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $\boxed{T \text{ est injectif}}$

7.3. • Si $\lambda = 2$. Soit $x \in \ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : 1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = A + Bn$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a $B = 0$ et donc x est une suite constante. Réciproquement, les suites constantes sont clairement dans $\ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{C}})$.

Ainsi $\boxed{\ker(T - 2\text{id}_{\mathcal{C}}) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$

- Si $\lambda = -2$. Soit $x \in \ker(T + 2\text{id}_{\mathcal{C}})$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Donc en généralisant le résultat du cours, comme l'équation caractéristique possède une solution double : -1, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = (A + Bn)(-1)^n$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on a $B = 0$ et, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a $A = 0$ donc x est la suite nulle.

Ainsi $\boxed{\ker(T + 2\text{id}_{\mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{C}}\}}$

7.4. Avec les 3 questions précédentes, on a établi que $\boxed{T \text{ ne possède qu'une valeur propre : } 2}$

8. .

8.1. Soit $x \in \mathcal{C}$. D'après la question 2, on sait que x est bornée, donc il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq A$.

Ainsi, si on pose $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{2A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge i.e. $\boxed{N(x) \text{ est bien définie}}$.

8.2. • N est bien une application de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{R}^+$

1. Fallait-il démontrer ce résultat classique ici ?

- Séparation. Soit $x \in \mathcal{C}$ telle que $N(x) = 0$. On note $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$. On a $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ alors que $\sum u_n$ est une série convergente de réels positifs. Donc comme la somme est nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0$ i.e. x est la suite nulle.
- Homogénéité. Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $y = \lambda x$, $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n}$ en notant les termes généraux de x et de y sous la forme x_n et y_n . On a :
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{|\lambda x_n| + |\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| u_n$. Ainsi par linéarité du passage à la somme pour les séries convergentes, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ i.e. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- Inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathcal{C}^2$. Soit $z = x + y$. On note x_n, y_n, z_n les termes généraux de ces suites. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|z_n| + |z_{-n}|}{2^n} \leq \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} + \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n}$.
Donc en passant à la somme, on obtient $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Ainsi N est une norme sur $\mathcal{C}$

- 8.3.** Soit $x \in \mathcal{C}$ et $x' = S(x)$. On note $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|x'_n| + |x'_{-n}|}{2^n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ donc $N(x') = N(x)$.

Ainsi S conserve la norme N i.e. S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$.

En prenant $k = 1$, on a établi : $\forall x \in \mathcal{C}, N(S(x)) \leq kN(x)$. Ainsi par caractérisation de la continuité des applications linéaires, S est un endomorphisme continu de $(\mathcal{C}, N)$.

- 8.4.** $\text{id}_{\mathcal{C}}$ est également une application continue de $(\mathcal{C}, N)$ vers lui-même, donc $R = S - \text{id}_{\mathcal{C}}$ est continue sur $(\mathcal{C}, N)$. Donc $F = \ker(S - \text{id}_{\mathcal{C}}) = R^{-1}(\{0_{\mathcal{C}}\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc F est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$.

De même G est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}, N)$ car $G = (S + \text{id}_{\mathcal{C}})^{-1}(\{0_{\mathcal{C}}\})$.

- 8.5.** On considère la suite $(x^{(P)})_{P \in \mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathcal{C}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n^{(P)} = 2^n$ si $n \in [1, P]$,

$x_n^{(P)} = 0$ sinon. Les suites $x^{(P)}$ sont bien dans $\mathcal{C}$ et on a $N(x^{(P)}) = \sum_{n=1}^P 1 = P$ et $\|x^{(P)}\|_{\infty} = 2^P$. Comme

la suite $\left(\frac{2^P}{P}\right)_{P \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{\|x^{(P)}\|_{\infty}}{N(x^{(P)})}\right)_{P \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, on ne peut pas trouver de constante $K > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{C} \setminus \{0_{\mathcal{C}}\}, \|x\|_{\infty} \leq KN(x)$.

Ainsi les deux normes N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes

Exercice 4

- 1.** La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de problème.

Pour la non dégénérescence : Soit $P \in E$ tel que $\langle P | P \rangle = 0$. On a $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$. P^2 est une fonction continue positive sur $[0, 1]$ dont l'intégrale sur cet intervalle est nulle, ainsi P^2 est la fonction nulle sur $[0, 1]$. Ainsi P s'annule une infinité de fois sur $[0, 1]$, donc, comme il s'agit d'un polynôme, $P = 0_E$. Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

- 2.** Si F est un sev de E de dimension p , $F^{\perp}$ est un sous espace de E supplémentaire à F .

Donc $\dim(F^{\perp}) + \dim(F) = \dim(E)$ i.e. $\dim(F^{\perp}) = n + 1 - p$

- 3.** Si $n = 2$. Comme $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension $p = 2$, $\mathbb{R}_1[X]^{\perp}$ est de dimension 1. On cherche donc les polynômes $Q = aX^2 + bX + c$ orthogonaux à tous les polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$. Il faut et il suffit que de tels polynômes soient

orthogonaux à 1 et à X . Ainsi :

$$Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_1[X]^\perp \iff \begin{cases} \langle aX^2 + bX + c | 1 \rangle = 0 \\ \langle aX^2 + bX + c | X \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6c \\ b = -6c \end{cases}$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}_1[X]^\perp$ est de dimension 1, $\boxed{(6X^2 - 6X + 1) \text{ constitue une base de } \mathbb{R}_1[X]^\perp}$.

4. .

4.1. $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \setminus \{O_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ donc $\deg(L) \leq n$.

Par l'absurde, si $\deg(L) < n$. Alors $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc, comme ces sous-espaces sont supplémentaires, L est nul ce qui est impossible car on a pris L non nul. Ainsi $\boxed{L \text{ est de degré } n}$

4.2. .

4.2.1. On écrit $L = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et on a $a_n \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \rightarrow L(t)t^x$ est donc la fonction

$$t \rightarrow \sum_{k=0}^n a_k t^{k+x} \text{ qui est continue sur }]0, 1] \text{ et intégrable si } x > -1.$$

$$\text{De plus } \varphi(x) = \int_0^1 L(t)t^x dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 a_k t^{k+x} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+x+1}.$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est une fonction rationnelle}}$. On identifiera dans la suite la fonction rationnelle et la fraction rationnelle

4.2.2. Les pôles de φ sont parmi les $-(k+1)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et ils sont au plus d'ordre 1 car $\left(\prod_{k=0}^n (X+k+1) \right) \varphi$ est polynomiale.

L étant orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, les éléments de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont au moins des zéros de φ d'ordre au moins 1.

En écrivant φ sous forme irréductible $\varphi = \frac{P}{Q}$ alors on a $\deg(P) \geq n$ et $\deg(Q) \leq n+1$. Donc φ est de degré supérieur ou égal à -1 avec égalité si et seulement si P est de degré n et Q de degré $n+1$

Or φ est la somme de fractions de la forme $\frac{a_k}{X+k+1}$ qui sont de degré -1 ou $-\infty$, correspondent à des poles différents et dans laquelle au moins un des termes est non nul $\frac{a_n}{X+n+1}$, donc la somme est de degré -1 . Ainsi P est degré n et Q de degré $n+1$

et donc $\boxed{\text{les poles de } \varphi \text{ sont les } -(k+1) \text{ pour } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et ils sont d'ordre } 1}$ et

$\boxed{\text{les zéros de } \varphi \text{ sont les } k \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ et ils sont d'ordre } 1}$

4.2.3. Plus précisément, on écrit P sous la forme $P = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} (X-k)$ et $Q = \beta \prod_{k=0}^n (X+k+1)$ avec λ et β non

nuls. Ainsi il existe $\alpha \neq 0$ tel que $\varphi = \alpha \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (X-k)}{\prod_{k=0}^n (X+k+1)}$

4.3. On décompose en éléments simples la fraction $\frac{\prod_{k=0}^{n-1} (X-k)}{\prod_{k=0}^n (X+k+1)}$. On a : $\frac{\prod_{k=0}^{n-1} (X-k)}{\prod_{k=0}^n (X+k+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{X+k+1}$

avec $b_k = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (-k-1-j)}{\prod_{j=0}^{k-1} (-k+j) \prod_{j=k+1}^n (-k+j)}$ en convenant que le produit sur une partie vide vaut 1.

Ainsi $b_k = (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k! k! (n-k)!}$.

Donc par unicité de la décomposition en éléments simples de φ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \alpha b_k = \alpha (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k! k! (n-k)!}.$$

Donc le polynôme L vaut : $L = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (n+k)!}{k! k! (n-k)!} X^k$. Ainsi, comme on sait que $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ est de

dimension 1, on a :
$$\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (n+k)!}{(k!)^2 (n-k)!} X^k \right)$$

Exercice 5

1. Par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a
$$\int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in [0, 1[$, on pose $k = \lfloor nt \rfloor$ la partie entière de nt . On a $k \leq nt < k+1$ donc $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$ et donc $f_n(t) = w_{k+1}$.

Ceci étant vrai pour tout t , on a donc :
$$\forall t \in [0, 1[, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$$

3. Soit $t \in [0, 1]$.

- Si $t = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_n$ qui tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini.
- Si $t \in]0, 1[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_{\lfloor nt \rfloor + 1}$ donc par composition des limites, $f_n(t)$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$
- Si $t = 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = w_1$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $\delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- 4.
- Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0, 1]$.
 - La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $\delta : t \mapsto \begin{cases} \ell & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ qui est une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$
 - On pose φ la fonction constante sur $[0, 1]$ égale à $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} w_n$, qui existe car la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente donc bornée. Cette fonction φ est continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$ et de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq \varphi(t)$

Ainsi, on a bien vérifiée ici les hypothèses du théorème de convergence dominée et on a : $\left(\int_{[0,1]} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

et sa limite vaut $\int_{[0,1]} \delta$. On en déduit le résultat :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \ell$$
, résultat connu sous le nom de lemme de Cesaro