

Concours commun X-PC-ENS Option PC Mathématiques
Matrices infiniment divisibles

Notation préliminaire : δ_{ij} est le symbole de Kronecker

1. Première partie : La fonction Γ

1.a. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\varphi_s : x \mapsto e^{-x} x^{s-1}$ est continue et positive, comme produit de fonctions usuelles étudiées. Au voisinage de 0, $\varphi_s(x) \sim \frac{1}{x^{1-s}}$. Donc, pour tout $a > 0$, φ_s est intégrable sur $]0, a]$ car positive et équivalente à une fonction de Riemann intégrable $\frac{1}{x^\alpha}$ en 0 avec $\alpha = 1 - s < 1$ car $s > 0$.
D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \varphi_s(x) = 0$, grâce au théorème de croissances comparées des fonctions usuelles : $\forall \beta \in \mathbb{R} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta e^{-x} = 0$. Donc, d'après la règle de convergence de Riemann, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, φ_s est intégrable sur $[b, +\infty[$. Pour conclure :

$$x \mapsto e^{-x} x^{s-1} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.$$

1.b. Montrons par récurrence que pour tout entier m strictement positif, $\Gamma(m) = (m-1)!$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient : $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$. Si on suppose que $\Gamma(m) = (m-1)!$, alors $\Gamma(m+1) = m \cdot (m-1)! = m!$ Ce qui établit le résultat.

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \Gamma(m) = (m-1)!$$

1.c. Pour établir la continuité de Γ sur $]0, +\infty[$, nous allons établir grâce au théorème de continuité sous $\int$ que $\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}, 0 < a \leq 1 < A, \Gamma$ est continue sur $[a, A]$.

$$\text{Soit } \begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^+ \times [a, A] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto \varphi(t, x) = e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

$\forall x \in [a, A], t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue par morceaux comme produit de fonctions usuelles continues, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme déjà vu.

$x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $[a, A]$ au titre d'exponentielle.

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [a, A], 0 \leq \varphi(t, x) = e^{-t} t^{x-1} \leq \underbrace{e^{-t} t^{A-1}}_{\text{pour } t \in [1, +\infty[} + \underbrace{e^{-t} t^{a-1}}_{\text{pour } t \in]0, 1]} = \psi(t) \text{ et } \psi \text{ est}$$

continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ comme déjà vu.

La majoration s'obtient grâce à la croissance de $t \mapsto t^{A-1}$ et la décroissance de $t \mapsto t^{a-1}$.

Donc $\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^{*2}, 0 < a \leq 1 < A, \Gamma$ est continue sur $[a, A]$. Et par l'extension au

programme du théorème de continuité sous signe $\int$:

$$\Gamma \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*$$

2.a. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons $u \in [0, 1]$. Alors $0 \leq 1 - u \leq 1$ puis $\frac{1}{1-u} \geq 1$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\forall t \in [0, 1], \int_0^1 \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) du \geq 0$ et en conséquence, $-\ln(1-t) - t \geq 0$ et cette inégalité appliquée en $t = \frac{x}{m}$ pour tout $x \in [0, m]$, on obtient :

$\ln\left(1 - \frac{x}{m}\right) \leq -\frac{x}{m}$, puis : $\ln\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq -x$. La croissance de la fonction exponentielle assure finalement que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, m] : \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$, inégalité qui se prolonge facilement en $x = m$:

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, m] : \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$$

2.b. Pour $s > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, intégrons par parties :

$$I_m = \int_0^m \underbrace{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m}_u \underbrace{x^{s-1}}_{dv} dx = \underbrace{\left[\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \frac{x^s}{s}\right]_0^m}_{=0} - \int_0^m \left(-\frac{1}{m}\right) \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \frac{x^s}{s} dx$$

$$I_m = \frac{1}{s} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \cdot \frac{x^s}{s} dx \text{ et en posant } x = \frac{m}{m-1} \cdot y, \text{ on obtient :}$$

$$I_m = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{s+1} \frac{1}{s} \int_0^{m-1} \left(1 - \frac{y}{m-1}\right)^{m-1} \cdot y^s dy \quad (1)$$

Montrons alors par récurrence sur $k, 1 \leq k \leq m-1$ que :

$$I_m = \frac{m^s}{(m-k)^{s+k}} \prod_{j=0}^{k-1} \binom{m-j}{s+j} \cdot \int_0^{m-k} x^{s+k-1} \left(1 - \frac{x}{m-k}\right)^{m-k} dx \quad (2)$$

La relation est vérifiée pour $k=1$ d'après la relation (1) précédente.

Comme précédemment, effectuons une intégration par parties puis le changement de variable

$$x = \frac{m-k}{m-k-1} \cdot y, \text{ on obtient alors, mutatis mutandis,}$$

$$I_m = \frac{m^s}{(m-k)^{s+k}} \prod_{j=0}^{k-1} \binom{m-j}{s+j} \cdot \frac{1}{s+k} \cdot \left(\frac{m-k}{m-k-1}\right)^{s+k} \int_0^{m-k-1} y^{s+k} \left(1 - \frac{y}{m-k-1}\right)^{m-k-1} dy$$

et en rassemblant :

$$I_m = \frac{m^s}{(m-k-1)^{s+k+1}} \prod_{j=0}^k \int_0^{m-k-1} y^{s+k} \left(1 - \frac{y}{m-k-1}\right)^{m-k-1} dy$$

La formule (2) est établie et donne pour $k = m-1$:

$$I_m = m^s \prod_{j=0}^{m-2} \binom{m-j}{s+j} \cdot \int_0^1 x^{s+m-2} (1-x) dx$$

$$I_m = \frac{m^s \cdot m!}{\prod_{j=0}^{m-2} (s+j)} \cdot \int_0^1 x^{s+m-2} - x^{s+m-1} dx, \text{ et après intégration :}$$

$$I_m(s) = \frac{m^s \cdot m!}{\prod_{j=0}^{m-1} (s+j)}$$

$$\mathbf{2.c.} \text{ Soit } \begin{cases} \chi_m = \chi_{[0,m]} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, m] \\ 1 & \text{si } x \in [0, m] \end{cases} \end{cases} \text{ la fonction caractéristique de } [0, m].$$

Posons $f_m(x) = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \cdot x^{s-1} \cdot \chi_m(x)$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Comme la suite de fonctions $(\chi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction constante égale à 1, La question **2.a.** assure la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonction $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ vers $x \mapsto e^{-x} \cdot x^{s-1}$. La majoration obtenue en **2.a.** assure que

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq f_m(x) \leq e^{-x} \cdot x^{s-1}$, cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ depuis la question **1.a**.

On peut donc conclure, avec le théorème de convergence dominée, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_m(x) dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{s-1} dx = \Gamma(s)$$

Or $\int_0^\infty f_m(x) dx = \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \cdot x^{s-1} dx = \frac{m^s \cdot m!}{\prod_{j=0}^m (s+j)}$ suite à la question **2.b**. donc

$$\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^s \cdot m!}{\prod_{j=0}^m (s+j)}$$

3. Supposons que $a \geq 0, d \geq 0$ et $ad - b^2 \geq 0$.

• Si $a = 0$, alors $ad - b^2 = -b^2$ et donc $b = 0$. Alors ${}^tXAX = dy^2 \geq 0$

• Si $a > 0$, alors ${}^tXAX = a \left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{y^2}{a^2}(ad - b^2) \right) \geq 0$

$$\text{Donc si } a \geq 0, d \geq 0 \text{ et } ad - b^2 \geq 0 \text{ alors } \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0$$

Réciproquement, si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0$, alors

$${}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{a} \geq 0 \text{ et } {}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{d} \geq 0$$

puis ${}^t \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = a(ad - b^2) \geq 0$ et ${}^t \begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix} = d(ad - b^2) \geq 0$.

• Donc si $a > 0$ ou si $d > 0$ alors $ad - b^2 \geq 0$

• Sinon $a = 0$ et $d = 0$ et alors ${}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix} = -2b^2 \geq 0$ d'où $b = 0$ et $ad - b^2 \geq 0$

$$\text{Donc si } \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX \geq 0, \text{ alors } a \geq 0, d \geq 0 \text{ et } ad - b^2 \geq 0$$

4. A est symétrique et réelle, donc ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Si $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont les valeurs propres de A , il existe une matrice P orthogonale telle que $D = {}^tPAP = P^{-1}AP$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (\lambda_i \delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Appelons $(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ considérons le vecteur $X_i = P \cdot \vec{e}_i$. Alors

$$\underbrace{{}^tX_iAX_i}_{\geq 0} = {}^t(P\vec{e}_i)A(P\vec{e}_i) = {}^t(\vec{e}_i)({}^tPAP)\vec{e}_i = {}^t(\vec{e}_i)D\vec{e}_i = \lambda_i.$$

Réciproquement la famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$, image de la base $(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ par une matrice orthogonale est une base de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout vecteur $X = \sum_{k=1}^n x_k X_k$:

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n x_i {}^t(P\vec{e}_i) \cdot A \cdot \sum_{j=1}^n x_j (P\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n x_i {}^t(\vec{e}_i) \cdot {}^tPAP \cdot \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j {}^t(\vec{e}_i) \cdot D \cdot \vec{e}_j.$$

et comme ${}^t(\vec{e}_i) \cdot D \cdot \vec{e}_j = \lambda_i \delta_{ij}$, on obtient :

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

$$\text{A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.}$$

5. Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (\lambda_i \delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $D = {}^tD$ et $DA = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_i \delta_{ik} a_{kj} = \lambda_i a_{ij}$ et $AD = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \lambda_k \delta_{kj} = \lambda_j a_{ij}$.

Donc $DAD = {}^tDAD = (\lambda_i \lambda_j a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et donc $B = {}^tDAD$. Calculons ensuite :

$\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXBX = {}^tX {}^tDADX = {}^t(DX)A(DX) \geq 0$ car A est positive.

$$\boxed{B \text{ est positive.}}$$

Corollaire 1 utile pour la suite : Si A est positive, alors $\forall \mu \in \mathbb{R}^+, \mu A$ est positive. Il suffit de choisir $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \sqrt{\mu}$. Le résultat s'obtient facilement aussi par une démonstration directe :

$${}^tXAX = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{ij} \geq 0 \implies {}^tX\mu AX = \mu({}^tXAX) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \mu a_{ij} \geq 0$$

6. Si $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, exprimons la famille $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ sur cette

base : $u_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j$ et appelons M la matrice (λ_{ij}) . Calculons alors $\langle u_i, u_j \rangle$.

$$\langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} e_k, \sum_{\ell=1}^n \lambda_{j\ell} e_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_{ik} \lambda_{j\ell} \underbrace{\langle e_k, e_\ell \rangle}_{=\delta_{k\ell}} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} \lambda_{jk} = (M^t M)_{ij}$$

Donc ${}^tXAX = {}^tX M^t M X = {}^t(MX)(MX) = \|{}^tMX\|^2 \geq 0$.

$$\boxed{A = (\langle u_i, u_j \rangle) \text{ est positive.}}$$

7. Reprenons $(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice positive et $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (\lambda_i \delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$.

${}^t\vec{e}_k A \vec{e}_k = a_{kk}$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{kk} \geq 0$. Calculons :

$${}^tX(A * B)X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{ij} \lambda_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2 a_{ii} \lambda_i \geq 0, \text{ donc}$$

$$\boxed{A * B \text{ est positive}}$$

8.a. Reprenons la matrice orthogonale P de la diagonalisation de la question **4.**, et donc $D = {}^tPAP = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$. Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

considérons les vecteurs $Z_p = \sqrt{\lambda_p} \vec{e}_p$, alors $Z_p {}^tZ_p = (\lambda_p \delta_{ip} \delta_{jp})$. Donc $D = \sum_{p=1}^n Z_p {}^tZ_p$ puis

$$A = \sum_{p=1}^n P Z_p {}^tZ_p {}^tP = \sum_{p=1}^n P Z_p {}^t(P Z_p) \text{ et en posant } Y_p = P Z_p : \boxed{A = \sum_{p=1}^n Y_p {}^tY_p}$$

Montrons d'abord 2 résultats intermédiaires simples qui ne sont pas demandés.

Lemme 1 Si A et B sont 2 matrices positives, alors $A + B$ est positive :

$${}^tX(A + B)X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i, j} x_i x_j a_{ij} + \sum_{i, j} x_i x_j b_{ij} = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0.$$

Le résultat pour une somme de n matrices positives en découle par une récurrence simple.

Lemme 2 Si $A = Y^t Y$ avec $Y = \sum_{k=1}^n y_k \vec{e}_k$ alors $A = (y_i y_j)$ et A est positive.

Le calcul découle directement de la définition du produit matriciel et pour la positivité de A :

$${}^tX(Y^t Y)X = \underbrace{({}^tXY)}_{\in \mathbb{R}} ({}^tXY) = ({}^tXY)^2 \geq 0$$

8.b. Soit donc maintenant A et B deux matrices positives.

D'après **8.a.** il existe n vecteurs $(Y_p)_{1 \leq p \leq n}$ tels que $A = \sum_{p=1}^n Y_p {}^t Y_p$ et $A * B = \sum_{p=1}^n Y_p {}^t Y_p * B$

Or pour tout p , $Y_p {}^t Y_p = (y_{p_i} y_{p_j})$ donc $Y_p {}^t Y_p * B = (y_{p_i} y_{p_j} b_{ij})$ est positive d'après **5**.

$A * B$ s'exprime comme une somme de n matrices positives $(Y_p {}^t Y_p * B)_{1 \leq p \leq n}$ et donc est positive à son tour d'après le *lemme 1*. Finalement :

Si A et B sont positives alors $A * B$ est positive.

9.a. D'après **3**. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ est positive si et seulement si $a \geq 0$, $d \geq 0$ et $ad \geq b^2$. Si $r > 0$, la croissance de $x \mapsto x^r$ sur $\mathbb{R}^+$ conduit à $a^r \geq 0$, $d^r \geq 0$ et $a^r d^r = (ad)^r \geq b^{2r} = (b^2)^r$ car $b \geq 0$ et la réciproque de **3**. permet de conclure :

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est positive à coefficients positifs, alors A est infiniment divisible.

9.b. D'après la question **4**. A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Or $\det(A - \lambda I_3) = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3)$. Les valeurs propres de A sont donc positives ou nulles et A est positive.

De même, $\det(A^{*r} - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - (1 + 2^r)\lambda + 2^r - 2)$ et les valeurs propres de A^{*r} sont positives si et seulement si les racines du trinôme $\lambda^2 - (1 + 2^r)\lambda + 2^r - 2$ le sont, soit avec somme et produit : $\lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2^r \geq 0$ et $\lambda_2 \lambda_3 = 2^r - 2 \geq 0 \iff r \geq 1$. Finalement

A^{*r} est positive $\iff r \geq 1$

10. Soit $\Lambda_r = {}^t(\lambda_1^r, \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^r)$. D'après le *lemme 2* précédent, $C = \Lambda_r {}^t \Lambda_r = (\lambda_i^r \lambda_j^r)$ est positive. A étant infiniment divisible, $A^{*r} = (a_{ij}^r)$ est positive et donc d'après la question

8.b. $(C * A^{*r})$ est positive. Comme $B^{*r} = C * A^{*r} = (\lambda_i^r \lambda_j^r a_{ij}^r)$:

$B = (\lambda_i \lambda_j a_{ij})$ est infiniment divisible

11. Comme A est positive à coefficients positifs, $A^{*\frac{1}{m}}$ aussi. Donc d'après la remarque de l'énoncé en tête de la troisième partie, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $A^{*\frac{r}{m}} = (A^{*\frac{1}{m}})^{*r}$ est positive. Donc pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$, A^{*r} est positive.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Utilisons la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r$. L'écriture de la limite pour « $\varepsilon = \frac{r}{2}$ » nous assure que tous les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang. on peut donc considérer que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n > 0$. la continuité de la fonction exponentielle assure que $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{ij}^{r_n} = a_{ij}^r$.

Comme $r_n \in \mathbb{Q}_+^*$, A^{*r_n} est positive, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^t X A^{*r_n} X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{ij}^{r_n} \geq 0$ et les

théorème d'addition des limites et de passage à la limite dans une inégalité assurent que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{ij}^{r_n} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{ij}^r = {}^t X A^{*r} X \geq 0$.

A est infiniment divisible.

12.a. $\{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de n réels strictement positifs et $C = (c_{ij})$ est la matrice définie par $c_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$. Si u_i est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $u_i(t) = e^{-\lambda_i t} \in \mathcal{H}$, alors :

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_i t} \cdot e^{-\lambda_j t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} dt = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$$

et d'après le résultat de la question **6**.

C est positive

12.b. $r > 0$ et $a > 0$. Donc en effectuant le changement de variable $u = ta$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ta} t^{r-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{a}\right)^{r-1} \frac{du}{a} = \frac{1}{a^r} \Gamma(r), \text{ donc}$$

$$\frac{1}{a^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-ta} t^{r-1} dt$$

12.c. Pour tous couple de réels (a, b) , $(a-b)^2 \geq 0$, soit $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|u(t)v(t)| \leq \frac{1}{2}(u(t)^2 + v(t)^2)$

$$\text{donc } \forall t \in \mathbb{R}^+, |u(t)v(t)| t^{r-1} \leq \frac{1}{2}(u(t)^2 t^{r-1} + v(t)^2 t^{r-1})$$

Comme $(u, v) \in \mathcal{H}_r^2$, le théorème de comparaison assure que $t \mapsto u(t)v(t)t^{r-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ est définie sur $\mathcal{H}_r$. La linéarité de l'intégrale donne la bilinéarité de l'application et la croissance de l'intégrale assure la positivité de la forme

bilinéaire. Pour finir, si $\int_0^{+\infty} u(t)^2 t^{r-1} dt = 0$, comme $t \mapsto u(t)^2 t^{r-1}$ est positive et continue,

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t) = 0$, et le prolongement par continuité en 0 conduit à $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $u(t) = 0$. La forme est définie.

$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ munit $\mathcal{H}_r$ d'un produit scalaire.

12.d. Comme $\lambda_i > 0$, pour $\alpha = 2\lambda_i$, l'application $u_i : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}} e^{-\lambda_i t} \in \mathcal{H}_r$ d'après la question **12.b.** Et toujours d'après la question **12.b.** on a :

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_i + \lambda_j)t} t^{r-1} dt = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^r}, \text{ et la question 6. permet de conclure :}$$

La matrice C est infiniment divisible.

13.a. D'après la question **2.c.** en posant $I_m(s) = \frac{m^s \cdot m!}{\prod_{j=0}^m (s+j)}$, on a $\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_m(s)$

Les théorèmes sur produit et quotient de limites donnent : $k_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_m(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{I_m(\lambda_i + 1) \cdot I_m(\lambda_j + 1)}$
Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{I_m(\lambda_i + \lambda_j + 1)}{I_m(\lambda_i + 1) \cdot I_m(\lambda_j + 1)} &= \frac{m! \cdot m^{\lambda_i + \lambda_j + 1}}{\prod_{k=0}^m (\lambda_i + \lambda_j + 1 + k)} \cdot \frac{\prod_{k=0}^m (\lambda_i + 1 + k)}{m! \cdot m^{\lambda_i + 1}} \cdot \frac{\prod_{k=0}^m (\lambda_j + 1 + k)}{m! \cdot m^{\lambda_j + 1}} \\ &= \frac{1}{m \cdot m!} \prod_{k=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + k)(\lambda_j + k)}{\lambda_i + \lambda_j + k}. \text{ Finalement,} \end{aligned}$$

$$k_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m \cdot m!} \prod_{k=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + k)(\lambda_j + k)}{\lambda_i + \lambda_j + k}$$

13.b. Soit $p \geq 1$ un entier, et r un réel strictement positif. Considérons comme en **12.c.** l'espace vectoriel $\mathcal{H}_r$ et l'application

$$\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle_p : \mathcal{H}_r \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle_p = \int_0^{+\infty} u(t)v(t)e^{-pt}t^{r-1}dt \end{cases}$$

En procédant comme en **12.c.**, on montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}_r$, mutatis mutandis. On reprend les applications définies en **12.d.** $u_i : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\Gamma(r)}} e^{-\lambda_i t}$, alors

$$\langle u_i, u_j \rangle_p = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_i + \lambda_j + p)t} t^{r-1} dt = \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} \text{ d'après 12.b.}$$

Et encore une fois le résultat de **6.** permet de conclure que pour tout réel $r > 0$ la matrice $\left(\frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive donc, par définition, la matrice $\left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j + p} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible. En considérant la famille de réels strictement positifs $(\lambda_i + p)$ et le résultat de la question **10.**, on obtient que

$$\boxed{\text{la matrice } B_p = \left(\frac{(\lambda_i + p)(\lambda_j + p)}{\lambda_i + \lambda_j + p} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est infiniment divisible.}}$$

Continuons, par définition d'infiniment divisible, pour tout réel $r > 0$ et tout entier $p > 0$ les matrices B_p^{*r} sont positives. En notant $\otimes$ le produit de plusieurs matrices au sens la loi $*$, et d'après la question **7.**, on peut affirmer que la matrice

$$\bigotimes_{p=1}^{m+1} B_p^{*r} = \left(\prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)^r (\lambda_j + p)^r}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est positive.}$$

et en multipliant par les scalaires $\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{(m.m!)^r}}$, la question **5.** assure que la matrice

$$\Delta_r(m) = \left(\frac{1}{(m.m!)^r} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)^r (\lambda_j + p)^r}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est positive.}$$

Donc $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X \Delta_r(m) X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{1}{(m.m!)^r} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)^r (\lambda_j + p)^r}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} \geq 0$

Comme l'application $x \mapsto x^r$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, les théorèmes d'addition des limites et de passage à la limite dans une inégalité donnent avec le résultat de **13.a.** :

$$\forall r > 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{1}{(m.m!)^r} \prod_{p=1}^{m+1} \frac{(\lambda_i + p)^r (\lambda_j + p)^r}{(\lambda_i + \lambda_j + p)^r} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j k_{ij}^r \geq 0$$

$$\boxed{\text{La matrice } K = (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est infiniment divisible.}}$$

14. Établissons d'abord le petit lemme suivant :

lemme 3 Si f est une application dérivable sur $[0, +\infty[$ vérifiant $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \geq 0$, alors $f'(0) \geq 0$.

Comme $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \geq 0$, on a $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{f(x)}{x} \geq 0$ et par passage à la limite à droite en 0 on peut conclure que $f'(0) \geq 0$.

Considérons $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ et la fonction

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ r \longmapsto f(r) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)^r \end{cases}$$

f est combinaison linéaire d'exponentielles donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. D'autre part

$$f(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0 \text{ et } f'(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (-\ln(\lambda_i + \lambda_j))$$

Puis comme la matrice $\left(\frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible, f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $f(0) = 0, \forall r \in \mathbb{R}^+, f(r) \geq 0$. On peut donc affirmer avec le *lemme 3* que

$$f'(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (-\ln(\lambda_i + \lambda_j)) \geq 0. \text{ finalement :}$$

$$\boxed{A = (-\ln(\lambda_i + \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est conditionnellement positive.}}$$

15. Montrons l'implication demandée.

D'abord (ii) $\implies$ (i). Soit $C = B + \varepsilon I_n + \lambda J$ et X tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Alors

$${}^t X C X = {}^t X B X + \varepsilon {}^t X I_n X + \lambda {}^t X J X$$

$$\text{Or } {}^t X J X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0 \text{ et } {}^t X I_n X = \|X\|^2$$

donc

$${}^t X C X = {}^t X B X + \varepsilon \|X\|^2$$

et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall X; x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, {}^t X B X + \varepsilon \|X\|^2 \geq 0$

car C est positive. Par passage à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on a

$$\boxed{{}^t X B X \geq 0 \text{ et (ii)} \implies \text{(i).}}$$

16.a. On procède comme en **14.** en posant $f(r) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j a_{ij}^r$, mutatis mutandis.

lemme 4 J est positive.

On applique le *lemme 2* vu à la question **8.** avec le vecteur $Y = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ car $A = Y^t Y$.

16.b. On suppose que B est conditionnellement positive. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0$ tel que la matrice $C = B + \varepsilon I_n + \lambda J = (c_{ij})$ est positive. Le *corollaire 1* énoncé en question **5.** assure que pour tout réel $r \geq 0$ la matrice rC est positive. Ensuite la question **8.b.** donne, à l'aide d'une récurrence simple, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(rC)^{*n}$ est aussi positive et finalement

$$\frac{1}{n!} (rC)^{*n} = \left(\frac{r^n c_{ij}^n}{n!} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est encore positive d'après le corollaire 1.}$$

On a établi le *lemme 1* pour affirmer qu'une somme de matrices positives est encore positive et donc ici, comme J est positive :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{ la matrice } J + \left(\sum_{n=1}^p \frac{r^n c_{ij}^n}{n!} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est positive.}$$

$$\text{Donc pour tout vecteur } X, \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \left(1 + \sum_{n=1}^p \frac{r^n c_{ij}^n}{n!} \right) \geq 0$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite pour $p \rightarrow +\infty$ pour conclure :

$$\boxed{\forall r > 0, \forall X \in \mathbb{R}^n : \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{r c_{ij}} \geq 0 \text{ donc } (e^{r c_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est positive.}}$$

Pour établir que $(e^{rb_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un vecteur X_0 tel que ${}^tX_0(e^{rb_{ij}})X_0 < 0$. Posons alors $\alpha = {}^tX_0(e^{rb_{ij}})X_0 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{rb_{ij}}$

et $\beta = \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{rb_{ii}}$. Il est clair que $X_0 = {}^t(x_1, \dots, x_n) \neq \vec{0}$ et qu'en conséquence $\beta > 0$.

Posons alors $\varepsilon = \frac{1}{r} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)$. Comme $\alpha < 0$ et $\beta > 0$, on a que $\varepsilon > 0$ et $e^{\varepsilon r} - 1 = -\frac{\alpha}{2\beta}$.

D'après l'implication admise en question **15.**, il existe $\lambda > 0$ tel que la matrice $C = B + \varepsilon I_n + \lambda J = (c_{ij})$ est positive.

Nous allons montrer que ${}^tX_0(e^{rc_{ij}})X_0 < 0$, ce qui contredit le résultat établi précédemment dans la question.

Comme $C = B + \varepsilon I_n + \lambda J$, $rc_{ij} = rb_{ij} + r\varepsilon\delta_{ij} + \lambda r$; en passant à l'exponentielle, on obtient : $e^{rc_{ij}} = e^{rb_{ij}} \cdot e^{r\varepsilon\delta_{ij}} \cdot e^{\lambda r}$ puis $e^{-\lambda r} e^{rc_{ij}} = e^{rb_{ij}} \cdot e^{r\varepsilon\delta_{ij}}$, donc :

$$\begin{aligned} {}^tX_0(e^{-\lambda r} e^{rc_{ij}})X_0 &= {}^tX_0(e^{rb_{ij}} \cdot e^{r\varepsilon\delta_{ij}})X_0 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \cdot e^{rb_{ij}} \cdot e^{r\varepsilon\delta_{ij}} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \cdot e^{rb_{ij}} \cdot \underbrace{(e^{r\varepsilon\delta_{ij}} - 1)}_{=0 \text{ si } i \neq j} + \underbrace{\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \cdot e^{rb_{ij}}}_{=\alpha} \\ &= (e^{\varepsilon r} - 1) \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{rb_{ii}} + \alpha = \frac{\alpha}{2} < 0 \end{aligned}$$

Donc ${}^tX_0(e^{-\lambda r} e^{rc_{ij}})X_0 < 0$ et en multipliant par $e^{\lambda r}$, on a la contradiction attendue :

${}^tX_0(e^{rc_{ij}})X_0 < 0$ et finalement

$$\boxed{(e^{rb_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est positive.}}$$

17.a. Montrons que la matrice $Z = (-|z_i - z_j|^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ est conditionnellement positive. Le résultat sera alors établi d'après la question précédente. En effet la question **16.b.** assure que $(e^{-r|z_i - z_j|^2})_{1 \leq i, j \leq n} = \left((e^{-|z_i - z_j|^2})^r\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive, c'est-à-dire que

$(e^{-|z_i - z_j|^2})_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible.

De façon évidente, la somme de deux matrices conditionnellement positives l'est encore. Séparons partie réelle et partie imaginaire avec $-|z_i - z_j|^2 = -(u_i - u_j)^2 - (v_i - v_j)^2$ et montrons que la matrice $U = (-(u_i - u_j)^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ est conditionnellement positive. Le résultat en découlera avec $Z = U + V$ si $V = (-(v_i - v_j)^2)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Pour tout vecteur $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 0$, calculons tXUX .

$$\begin{aligned} {}^tXUX &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (u_i - u_j)^2 \\ &= -2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (u_i - u_j)^2 \quad \text{en éliminant les termes nuls pour } i = j \\ &= -2 \left(\underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j u_j^2}_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i u_i^2 \left(\sum_{j=i+1}^n x_j \right)} - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j u_i u_j + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j u_i^2}_{\sum_{j=2}^n x_j u_j^2 \left(\sum_{i=1}^{j-1} x_i \right)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^tXUX &= -2 \left(\overbrace{\left(x_1 u_1^2 \left(\sum_{j=2}^n x_j \right) + \sum_{i=2}^{n-1} x_i u_i^2 \left(\sum_{j=i+1}^n x_j \right) \right)}^{\text{en permutant les rôles de } i \text{ et } j} + \sum_{i=2}^{n-1} x_i u_i^2 \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j \right) + x_n u_n^2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j \right) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j u_i u_j \end{aligned}$$

et grâce à la relation $x_1 + \dots + x_n = 0$, cela devient en rassemblant $\sum_{j=i+1}^n x_j + \sum_{j=1}^{i-1} x_j = -x_i$:

$$\begin{aligned} {}^tXUX &= -2 \left(-x_1^2 u_1^2 - \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 u_i^2 - x_n^2 u_n^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j u_i u_j \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j u_i u_j \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i u_i \right)^2 \geq 0. \text{ Finalement } U \text{ est conditionnellement positive donc :} \end{aligned}$$

$$\boxed{(e^{-|z_i - z_j|^2})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ est infiniment divisible}}$$

17.b. Montrons que, pour tout réel $t > 0$, la matrice $\left(\frac{1}{t + |z_i - z_j|^2}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive.

D'après la question précédente, $(e^{-|z_i - z_j|^2})_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible. En choisissant $\lambda_i = e^{-t/2}$, $(e^{-t} \cdot e^{-|z_i - z_j|^2})_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible d'après la question 10. Donc pour tout réel $r > 0$, pour tout vecteur $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et pour tout réel $t > 0$,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{-(t + |z_i - z_j|^2)r} \geq 0. \quad (A)$$

L'application $r \rightarrow x_i x_j e^{-(t + |z_i - z_j|^2)r}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ depuis la question 12.b. où r joue le rôle de t (paramètre d'intégration), où la constante $r = 1$ et $\alpha = t + |z_i - z_j|^2$.

L'application $r \rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j e^{-(t + |z_i - z_j|^2)r}$ est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ comme somme

de fonctions intégrables et la croissance de l'intégrale nous assure, en intégrant l'inégalité (A) précédente, avec le résultat de la question 12.b. que

$$\forall X = {}^t(x_1, \dots, x_n), \forall t > 0, \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{t + |z_i - z_j|^2} \geq 0$$

et la matrice $\left(\frac{1}{t + |z_i - z_j|^2}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive.

Lemme 5 Montrons simplement que si $A = (a_{ij})$ est une matrice positive, alors $A - J$ (et plus généralement $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $A + \gamma J$) est conditionnellement positive.

Ce résultat découle directement de ${}^t X J X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 0$ si $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

En utilisant la question précédente, on peut affirmer que pour tout réel u non nul, la matrice $\left(\frac{u^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive, et par conséquent avec le lemme 5, la matrice

$\left(\frac{u^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2} - 1\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est conditionnellement positive. Donc, pour tout vecteur X

tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$: $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{-|z_i - z_j|^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2} \geq 0$.

Si $i \neq j$, alors $u \rightarrow \frac{-|z_i - z_j|^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car équivalent à l'infini à

$-\frac{|z_i - z_j|^2}{u^2}$, et, si $i = j$, le terme correspondant est nul. Donc par croissance de l'intégrale :

pour tout vecteur X tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$: $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \int_0^{+\infty} \frac{-|z_i - z_j|^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2} du \geq 0$. En

posant maintenant $t = u^2$ dans chacune des intégrales non nulles, il vient :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{-|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt}_{=a_{ij}} \geq 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

La matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est donc conditionnellement positive.

17.c. Calculons $a_{ij} = -\int_0^{+\infty} t^{-1/2} \frac{|z_i - z_j|^2}{t + |z_i - z_j|^2} dt$ lorsque $i \neq j$. En posant $t = u^2$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -2 \int_0^{+\infty} \frac{|z_i - z_j|^2}{u^2 + |z_i - z_j|^2} du \\ &= -2 |z_i - z_j|^2 \left(\frac{1}{|z_i - z_j|} \left[\text{Arc tan } \frac{u}{|z_i - z_j|} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= -2 |z_i - z_j| \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= -\pi |z_i - z_j| \end{aligned}$$

En remarquant que si A est conditionnellement positive, alors pour tout réel $k \geq 0$, kA l'est aussi. On en déduit d'après la question précédente que la matrice $(-|z_i - z_j|)_{1 \leq i, j \leq n}$ est conditionnellement positive.

La question 16.b. nous assure que la matrice $(e^{-r|z_i - z_j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive, et comme $e^{-r|z_i - z_j|} = (e^{-|z_i - z_j|})^r$, on peut conclure

$(e^{-|z_i - z_j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ est infiniment divisible