

E3A 2005, filière PSI, mathématiques B

EXERCICE 1

• **Partie A**

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

On en déduit que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente puis, par l'équivalence suites-séries, que la suite (u_n) est convergente.

2. a) $\lim_0 h_x = -\infty$ et $\lim_{+\infty} h_x = 0$. D'autre part, $h'_x(t)$ est du signe de $1 - x \ln t$, donc h_x est strictement croissante sur $]0, e^{1/x}]$ et strictement décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$.

b) h_1 est décroissante sur $[e, +\infty[$, et *a fortiori* sur $[3, +\infty[$. Les inégalités demandées en résultent.

c) La suite de terme général $(-1)^n \frac{\ln n}{n} = (-1)^n h_1(n)$ est de signe alterné, tend vers 0 et décroît en valeur absolue à partir du rang 3. Par le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\sum(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente.

Cette série n'est pas absolument convergente puisque $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$.

• **Partie B**

1. a) Pour $n \geq 4$, $a_n - a_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2} + \frac{(\ln(n-1))^2}{2} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt \leq 0$.

b) Pour $n \geq 3$, $a_n \geq \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t} dt - \frac{(\ln n)^2}{2} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2} \geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$.

Ainsi, la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée ; elle est donc convergente.

2. $S_{2n} + t_{2n} = \sum_{p=1}^{2n} ((-1)^p + 1) \frac{\ln p}{p} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + t_n$, d'où l'égalité demandée.

Ensuite, $S_{2n} = \left(a_n + \frac{(\ln n)^2}{2}\right) - \left(a_{2n} + \frac{(\ln(2n))^2}{2}\right) + (u_n + \ln n) \ln 2 = a_n - a_{2n} - \frac{(\ln 2)^2}{2} + u_n \ln 2$.

3. (a_n) converge et (u_n) converge vers γ , donc l'égalité du 2. montre que (S_{2n}) converge vers $\gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Comme S est en particulier la limite de (S_{2n}) , on en déduit que $S = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

• **Partie C**

1. a) i) $v'_n(x) = -\frac{\ln n}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = h_x(n+1) - h_x(n)$.

ii) Pour $x \geq 1$, h_x décroît sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et *a fortiori* sur $[e, +\infty[$ (cf A.2.a)) donc pour $x \geq 1$ et $n \geq 3$, $v'_n(x) \leq 0$, donc v_n décroît sur $[1, +\infty[$, donc $0 \leq v_n(x) \leq v_n(1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, qui est le terme général d'une série convergente indépendante de x . La série de fonctions $\sum v_n$ est donc normalement convergente sur $[1, +\infty[$.

b) i) $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ étant continue, il s'agit de prouver la continuité sur $[1, +\infty[$ de la fonction $z_n : x \mapsto \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt$.

$z_n(1) = \ln(n+1) - \ln n$ et pour $x > 1$, $z_n(x) = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$.

Cette dernière expression montre d'une part que z_n est continue sur $]1, +\infty[$ (théorèmes généraux) et d'autre part elle s'interprète comme un taux d'accroissement, par conséquent :

$z_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)\right]_{x=1} = \left[-\frac{\ln n}{n^{x-1}} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{x-1}}\right]_{x=1} = -\ln n + \ln(n+1) = z_n(1)$.

z_n est donc aussi continue en 1.

Remarque : on peut aussi utiliser le théorème sur la continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

ii) La décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ donne $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$, d'où le résultat.

iii) D'après b)i), chaque fonction w_n est continue et d'après a)ii) et b)ii), $\sum w_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$. Par théorème, on en déduit que W est bien définie et continue sur $[1, +\infty[$.

c) i) Il suffit de sommer de $n = 1$ à $+\infty$ les égalités qui définissent $w_n(x)$, puis de calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}$.

ii) Comme W est continue en 1, il vient $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x} \right) = W(1)$.

Mais $W(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n \right) = \gamma$ (revenir aux sommes partielles).

2. a) C'est une conséquence immédiate du théorème des séries alternées.

b) φ_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'_n(x) = \frac{(-1)^n \ln n}{n^x} = (-1)^n h_x(n)$.

. Pour $x > 0$, la suite $(\varphi'_n(x))$ est de signe alterné, converge vers 0 et $(|\varphi'_n(x)|)$ décroît à partir du rang $N_x = \lceil e^{1/x} \rceil$ donc, par le théorème des séries alternées, la série $\sum \varphi'_n(x)$ est convergente ; autrement dit, la série $\sum \varphi'_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

. Pour $x \geq a > 0$, $N_x \leq N_a$, donc la suite $(|\varphi'_n(x)|)_{n \geq N_a}$ est décroissante donc, toujours d'après le théorème des séries alternées :

$$\forall n \geq N_a, \forall x \in [a, +\infty[, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi'_k(x) \right| \leq |\varphi'_{n+1}(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Ce majorant est indépendant de x et tend vers 0, donc la suite des restes de la série de fonctions $\sum \varphi'_n$ converge uniformément vers 0 sur $[a, +\infty[$, donc $\sum \varphi'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

c) La question b) permet d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme à la série $\sum \varphi_n$.

On en déduit que φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}.$$

En particulier, $\varphi'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = S$.

3. a) En séparant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair, on peut écrire :

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)^x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^x} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^x} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} - 2^{1-x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\varphi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

b) $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-(\ln 2)(x-1)} = (\ln 2)(x-1) - \frac{(\ln 2)^2}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$.

D'autre part, d'après 1.c)ii), $F(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o_{x \rightarrow 1^+}(1)$.

Par multiplication on obtient $\varphi(x) = \ln 2 + \left(\gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} \right)(x-1) + o_{x \rightarrow 1^+}((x-1))$.

c) Comme φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 1 au point 1 donne $\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + o_{x \rightarrow 1}((x-1))$.

Par unicité du développement limité, on en déduit que $\varphi(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (ce qui n'était pas demandé)

et que $\varphi'(1) = S = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

EXERCICE 2

1. $P_k(x_i) = \delta_{k,i}$ (symbole de Kronecker).

2. Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de réels tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$. L'évaluation en x_i donne $\lambda_i = 0$.

$(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc une famille libre de cardinal $n + 1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg P_k = k$), qui est un espace vectoriel de dimension $n + 1$; c'est par conséquent une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. a) Selon 2., Q s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$. L'évaluation en x_i donne $Q(x_i) = \alpha_i$.

b) L'application du résultat précédent à X^m donne $X^m = \sum_{k=0}^n x_k^m P_k$. L'évaluation en 0 donne $s_m = 0$.

4. a) Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_1(x_i) = Q(x_i) - \sum_{k=0}^n Q(x_k) P_k(x_i) = Q(x_i) - \sum_{k=0}^n Q(x_k) \delta_{k,i} = Q(x_i) - Q(x_i) = 0$.

Les x_i étant deux à deux distincts, Q_1 possède au moins $n + 1$ racines réelles distinctes.

b) i) Appliquons le a) avec $Q = X^{n+1}$; comme le degré de $\sum_{k=0}^n Q(x_k) P_k$ est au plus n , Q_1 est un polynôme unitaire

de degré $n + 1$ admettant chaque x_k pour racine, donc $Q_1 = \prod_{k=0}^n (X - x_k)$.

On a ainsi $X^{n+1} - \sum_{k=0}^n x_k^{n+1} P_k = \prod_{k=0}^n (X - x_k)$. L'évaluation en 0 donne $s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^n x_k$.

ii) Prenons maintenant $Q = X^{n+2}$. Q_1 est un polynôme unitaire de degré $n + 2$ dont le coefficient de X^{n+1} est nul et admettant chaque x_k pour racine. Sachant que le coefficient de X^n dans $\prod_{k=0}^n (X - x_k)$ est $-\sum_{k=0}^n x_k$, on en

déduit que $Q_1 = \left(X + \sum_{k=0}^n x_k \right) \prod_{k=0}^n (X - x_k)$.

Ainsi, $X^{n+2} - \sum_{k=0}^n x_k^{n+2} P_k = \left(X + \sum_{k=0}^n x_k \right) \prod_{k=0}^n (X - x_k)$, puis $s_{n+2} = (-1)^n \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \left(\prod_{k=0}^n x_k \right)$ en évaluant en 0.

5. a) $|y_k| = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n |x_k - x_j| = \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) \times \prod_{j=k+1}^n (x_j - x_k)$.

. Par récurrence descendante on voit que pour $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $x_k - x_j \geq k - j$, donc $\prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j) \geq \prod_{j=0}^{k-1} (k - j) = k!$

. Par récurrence on voit que pour $j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, $x_j - x_k \geq j - k$, donc $\prod_{j=k+1}^n (x_j - x_k) \geq \prod_{j=k+1}^n (j - k) = (n - k)!$

Au total on obtient bien $|y_k| \geq k! (n - k)!$

b) $\frac{1}{y_k}$ est le coefficient de X^n dans P_k . Il suffit donc d'identifier les coefficients de X^n des deux membres dans l'égalité du 3.a) pour obtenir l'égalité demandée.

c) D'après les deux questions précédentes :

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{Q(x_k)}{y_k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{|Q(x_k)|}{|y_k|} \leq M \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (n - k)!} = \frac{M}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{M 2^n}{n!}, \text{ d'où le résultat.}$$