

# Épreuve de Mathématiques A

## Problème d'Algèbre linéaire

### Partie I

1. Commençons par déterminer le polynôme caractéristique de  $A$ , dont les racines sont exactement les valeurs propres :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

par développements deuxième ligne puis première colonne. Ainsi :  $\text{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$ .  
Comme elle est carrée d'ordre 3 et qu'elle admet trois valeurs propres réelles distinctes,  
la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

On calcule de même :

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 3 \\ -3 & \lambda - 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

donc  $\text{Sp}(B) = \{1, 4\}$  et la multiplicité  $m(1)$  de 1 est égale à 2.

Puisque son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , la matrice  $B$  est diagonalisable si et seulement si  $m(1) = \dim E_B(1)$  et  $m(4) = \dim E_B(4)$ .

On sait que  $1 \leq \dim E_B(4) \leq m(4)$  donc  $m(4) = \dim E_B(4)$  car  $m(4) = 1$ .

Par ailleurs,

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est clairement une matrice de rang 2, donc par le théorème du rang :

$$\dim E_B(1) = 3 - 1 = 2 = m(1).$$

En conclusion :

la matrice  $B$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

2. Sans difficulté, on obtient :

$$\boxed{A^2 = B.}$$

3. Déterminons les sous-espaces propres de  $A$ , qui sont des droites, puisque ses valeurs propres sont simples.

On a :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc l'espace propre pour la valeur propre  $-1$  est :

$$E_A(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x - z = 0 = z + y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} , z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On calcule de même :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

donc l'espace propre pour la valeur propre  $1$  est :

$$E_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x - z = 0 = y - z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} , z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Enfin :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc l'espace propre pour la valeur propre  $2$  est :

$$E_A(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x - y = 0 = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En conclusion, on peut prendre par exemple :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Il résulte des deux questions précédentes que :

$$B = A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}.$$

Puisqu'elle est semblable à la matrice diagonale réelle  $D^2$ ,

la matrice  $B$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

## Partie II

1. (a) Comme composée de deux éléments de  $\text{SO}(\mathbb{R}^3)$ ,  $f^2$  est une isométrie positive.  
 Le vecteur  $\vec{e}_3$  est invariant par  $f$ , donc par  $f^2$ .  
 Pour  $i \in \{1, 2\}$ , le vecteur  $\vec{e}_i$  est orthogonal à l'axe, donc :

$$f(\vec{e}_i) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_i + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_i$$

soit  $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$  et  $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1$ , puis  $f^2(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i$ .

On peut conclure que

l'application  $f^2$  est la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\text{Vect}(\vec{e}_3)$ .

Peut-être plus simplement fallait-il dire que la composée de deux rotations de même axe est encore une rotation de même axe, et que les angles s'ajoutent ? On reconnaît à nouveau un demi-tour. Quoi qu'il en soit, le principe des calculs sera utile pour la question 2.

- (b) D'après les calculs précédents :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Le polynôme caractéristique de  $C$  est

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i).$$

Il n'est pas scindé dans  $\mathbb{R}[X]$  donc

la matrice  $C$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

Puisqu'elle admet trois valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{C}$ ,

la matrice  $C$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

Puisque  $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est diagonale réelle,

la matrice  $C^2$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  (donc dans  $\mathbb{C}$ ).

2. (a) On peut prendre :

$$\vec{w} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 1, -4)$$

ou son opposé.

Le vecteur

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$$

est clairement unitaire et orthogonal à  $\vec{w}$ .

Il suffit de compléter avec  $\vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{u}$  soit :

$$\vec{v} = \frac{1}{3}(2, 2, 1).$$

(b) Par un raisonnement analogue à celui de la question 1., la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est :

$$M_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$  :

$$P = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice orthogonale a pour inverse sa transposée, et  $M_{\mathcal{B}} = PM_{\mathcal{B}'}P^{-1}$ . Après calculs :

$$M_{\mathcal{B}} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 1 + 12\sqrt{2} & -4 + 3\sqrt{2} \\ 1 - 12\sqrt{2} & 1 & -4 - 3\sqrt{2} \\ -4 - 3\sqrt{2} & -4 + 3\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M_{\mathcal{B}}$  est semblable à  $M_{\mathcal{B}'} = C$  donc d'après la question 1 :

la matrice  $M_{\mathcal{B}}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ .

De même  $M_{\mathcal{B}}^2$  est semblable à  $C^2$  donc

la matrice  $M_{\mathcal{B}}^2$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

### Partie III

1. Si  $x \in \text{Im}(g)$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = g(y)$ . Comme  $f \circ g = 0$ , on en déduit :

$$f(x) = f \circ g(y) = 0$$

c'est-à-dire  $x \in \text{Ker}(f)$ .

On a donc établi :

$$f \circ g = 0 \Rightarrow \text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f).$$

2. (a) On calcule :

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta \text{Id}_E$$

et de manière symétrique :

$$(f - \beta \text{Id}_E) \circ (f - \alpha \text{Id}_E) = f^2 - (\beta + \alpha)f + \beta\alpha \text{Id}_E$$

donc

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad (f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = (f - \beta \text{Id}_E) \circ (f - \alpha \text{Id}_E).$$

(b) Il en résulte que les endomorphismes  $g_i = f - \lambda_i \text{Id}_E$  ( $1 \leq i \leq p$ ) commutent deux à deux, donc si  $v$  est un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda_j$  :

$$(f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \text{Id}_E)(v) = g_1 \circ \cdots \circ g_{j-1} \circ g_{j+1} \circ \cdots \circ g_p \circ g_j(v) = 0$$

car  $g_j(v_j) = 0$ .

Pour tout vecteur propre  $v$  de  $f$ , on a :  $(f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \text{Id}_E)(v) = 0$ .

- (c) Puisque  $f$  est diagonalisable, il existe une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  (où  $n = \dim E$ ) constituée de vecteurs propres de  $f$ . Il existe donc des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ . Par linéarité de l'endomorphisme  $g = (f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_p \text{Id}_E)$ , on a  $g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(v_i)$ . Mais la question précédente a établi que  $g(v_i) = 0$  donc  $g(x) = 0$ .

$$\boxed{\forall x \in E, \quad (f - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \dots \circ (f - \lambda_p \text{Id}_E)(x) = 0.}$$

3. (a) On calcule :

$$a(f - \alpha \text{Id}_E) + b(f - \beta \text{Id}_E) = (a + b)f - (\alpha a + \beta b) \text{Id}_E$$

donc il suffit de trouver  $a$  et  $b$  réels tels que  $a + b = 0$  et  $\alpha a + \beta b = -1$ . Comme  $\alpha - \beta \neq 0$  par hypothèse, on prend :

$$\boxed{a = \frac{1}{\beta - \alpha} \text{ et } b = \frac{1}{\alpha - \beta}.}$$

- (b) Il en résulte que tout  $x \in E$  peut s'écrire  $x = y + z$  avec  $y = a(f - \alpha \text{Id}_E)(x) \in \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E)$  et  $z = b(f - \beta \text{Id}_E)(x) \in \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E)$  donc

$$E \subset \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E).$$

L'inclusion contraire étant évidente, on peut conclure que :

$$\boxed{E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E).}$$

- (c) En appliquant le résultat de la question 1 dans laquelle  $f$  est remplacé par  $f - \alpha \text{Id}_E$  et  $g$  par  $f - \beta \text{Id}_E$ , on obtient :

$$\boxed{\text{Im}(f - \beta \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E).}$$

D'après la question 2.(a), on a aussi  $(f - \beta \text{Id}_E) \circ (f - \alpha \text{Id}_E) = 0$  donc de même :

$$\boxed{\text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E).}$$

- (d) Il résulte des deux questions précédentes que :

$$E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E) \subset E$$

donc

$$\boxed{E = \text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E).}$$

- (e) Il reste à établir que  $\text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E)$  sont en somme directe. Soit  $x \in \text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E)$ . Alors  $f(x) = \alpha x$  et  $f(x) = \beta x$  donc  $(\alpha - \beta)x = 0$  puis  $x = 0$  car  $\alpha \neq \beta$ .

$$\boxed{E = \text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E).}$$

- (f) On en déduit que la concaténation d'une base  $\mathcal{B}_1$  de  $\text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E)$  et d'une base  $\mathcal{B}_2$  de  $\text{Ker}(f - \beta \text{Id}_E)$  forme une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Mais les vecteurs de  $\mathcal{B}_1$  (respectivement  $\mathcal{B}_2$ ) sont vecteurs propres de  $f$  pour la valeur propre  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Ainsi il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ , donc

l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

En toute rigueur, le raisonnement précédent suppose l'existence des bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ , ce qui n'est pas le cas si l'un des deux sous-espaces est réduit au vecteur nul.

Mais si par exemple  $\text{Ker}(f - \alpha \text{Id}_E) = \{0\}$ , l'endomorphisme  $f - \alpha \text{Id}_E$  est injectif, donc inversible, car  $E$  est de dimension finie. Il résulte alors de  $(\star)$  que  $f - \beta \text{Id}_E = 0$ , et  $f$  est bien diagonalisable, puisqu'il s'agit d'une homothétie.

4. (a) Il s'agit de montrer que si  $x \in F_k$ , alors  $f(x) \in F_k$ . Or, si  $x \in F_k$ , alors  $f^2(x) = \lambda_k x$  donc

$$f^2(f(x)) = f(f^2(x)) = f(\lambda_k x) = \lambda_k f(x)$$

ce qui établit le résultat.

Pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $F_k$  est stable par  $f$ .

- (b) On a :

$$(f_k + \mu_k \text{Id}_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k \text{Id}_{F_k}) = f_k^2 - \lambda_k \text{Id}_{F_k}$$

et si  $x \in F_k$ , alors  $f_k^2(x) = f^2(x) = \lambda_k x$  donc  $(f_k + \mu_k \text{Id}_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k \text{Id}_{F_k})(x) = 0$ .

Ceci prouve que

$$\boxed{(f_k + \mu_k \text{Id}_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k \text{Id}_{F_k}) = 0}$$

où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de  $F_k$ .

- (c) L'endomorphisme  $f_k$  de  $F_k$  vérifie donc une relation du type  $(\star)$  avec  $\alpha = -\mu_k$  et  $\beta = \mu_k$  distincts car  $\lambda_k$  n'est pas nul par hypothèse. Par application de la question 3.(f), on en déduit que

l'endomorphisme  $f_k$  est diagonalisable.

- (d) Toujours par application de la question 3., cette fois en utilisant le (e), on peut écrire que  $F_k = F_k^+ \oplus F_k^-$ .

Mais par hypothèse  $f^2$  est diagonalisable, donc  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

On en déduit bien que

$$\boxed{E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \dots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-}$$

La concaténation des bases de ces différents sous-espaces (lorsqu'ils ne sont pas réduits au vecteur nul) forme une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale, donc

l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

## Exercice de Probabilités

1. Si le nombre de boules est inférieur ou égal au nombre de cases, deux configurations extrêmes sont possibles : une seule case est non vide, et elle contient les  $n$  boules, ou les  $n$  boules sont tombées dans des cases différentes, donc il y a  $n$  cases non vides, et il ne peut y en avoir davantage. Toutes les configurations intermédiaires sont possibles.

$$\boxed{\text{Si } n \leq N, \text{ alors } T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.}$$

Si le nombre de boules est strictement supérieur au nombre de cases, les deux configurations extrêmes sont : une seule case contient toutes les boules, ou toutes les cases contiennent au moins une boule (ce qui est possible puisque  $n > N$ ).

$$\boxed{\text{Si } n > N, \text{ alors } T_n(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket.}$$

2. Cas  $n = 1$ .

Ici,  $N \geq n$  et  $T_1(\Omega) = \{1\}$ . Il est certain qu'il y aura exactement une case contenant l'unique boule, donc  $\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$  On en déduit que  $\mathbb{E}[T_1] = 1 \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$ .

$$\boxed{T_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } \mathbb{P}(T_1 = 1) = 1; \mathbb{E}[T_1] = 1.}$$

Cas  $n = 2$ .

Si  $N = 1$ , alors les deux boules tombent dans l'unique urne, donc  $T_2(\Omega) = \{1\}$ ,  $\mathbb{P}(T_2 = 1) = 1$  et  $\mathbb{E}[T_2] = 1$ .

Si  $N \geq 2$ , alors  $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$ . La variable aléatoire  $U = T_2 - 1$  suit donc une loi de Bernoulli de paramètre  $p = \mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1)$ . Mais  $\{T_2 = 1\}$  est réalisé si l'un des événements (incompatibles)  $C_{1,i} \cap C_{2,i}$  est réalisé ( $1 \leq i \leq N$ ), où  $C_{1,i}$  (respectivement  $C_{2,i}$ ) est l'événement : « la première (resp. deuxième) boule tombe dans la case numéro  $i$  ». Par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(C_{1,i} \cap C_{2,i}) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(C_{i,1}) \mathbb{P}(C_{i,2}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$$

donc  $p = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$ . On sait que  $\mathbb{E}[U] = p$  et  $\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[U] + 1$  donc  $\mathbb{E}[T_2] = \frac{2N-1}{N}$ .

On note que les cas  $N = 1$  et  $N \geq 2$  diffèrent par la valeur de  $T_2(\Omega)$ , mais dans les deux cas il est possible d'écrire :

$$T_2(\Omega) \subset \{1, 2\}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}, \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}, \quad \mathbb{E}[T_2] = \frac{2N-1}{N}.$$

3. En notant  $C_{k,j}$  l'événement « la  $j$ -ème boule tombe dans la case numéro  $k$  », on a de manière analogue à un calcul précédent :

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(C_{1,i} \cap \dots \cap C_{n,i}) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(C_{i,1}) \dots \mathbb{P}(C_{i,n}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}.$$

Si  $N = 1$ , l'événement  $\{T_n = 2\}$  est impossible, donc de probabilité nulle.

Si  $N \geq 2$ , l'événement  $\{T_n = 2\}$  est réalisé si l'un des  $\binom{N}{2}$  événements incompatibles  $K_{i,d} \cap K_{j,n-d}$  est réalisé, où  $K_{r,d}$  est l'événement «  $r$  boules sont tombés dans la case numéro  $r$  » (avec  $1 \leq i \neq j \leq N$  et  $1 \leq d \leq n-1$ ). Il y a  $\binom{n}{d}$  choix possibles pour les numéros de lancer mettant une boule dans la case  $i$ , les autres boules lancées allant dans la case  $j$ . Par incompatibilité et indépendance,

$$\mathbb{P}(K_{i,d} \cap K_{j,n-d}) = \sum_{d=1}^{n-1} \binom{n}{d} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^n} \left(\sum_{d=0}^n \binom{n}{d} - 2\right) = \frac{2^n - 2}{N^n}$$

et finalement  $\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}$ .

En conclusion

$$\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}$$

avec la convention  $\binom{N}{2} = 0$  si  $N = 1$ .

Si  $N < n$ , l'événement  $\{T_n = n\}$  est impossible, donc de probabilité nulle.

Supposons  $N \geq n$ . Pour qu'au  $n$ -ième lancer  $n$  cases soient non vides, il faut qu'au lancer précédent  $n-1$  cases soient non vides et que le dernier lancer atteigne une case vide. Dans cette configuration, il y a  $N - (n-1)$  cases vides lors du  $n$ -ième lancer, donc, les cases pouvant être atteintes de manière équiprobable et par indépendance des lancers,

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N+1-n}{N} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = n) &= \frac{(N+1-n)(N-(n-1)) \dots (N-1)}{N^{n-1}} \mathbb{P}(T_1 = 1) \\ &= \frac{N(N-1) \dots (N-(n-1))}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)! N^n}.\end{aligned}$$

En conclusion :

$$P(T_n = n) = \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}$$

avec la convention  $\binom{N}{n} = 0$  si  $n > N$ .

4. Les  $\{T_n = i\}$ , pour  $1 \leq i \leq \min(n, N)$  forment un système complet d'événements car  $T_n(\Omega) = \llbracket 1, \min(n, N) \rrbracket$  d'après la question 1.

On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{\min(n, N)} \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i) \mathbb{P}(T_n = i).$$

Mais pour  $i > k$  l'on a  $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i) = 0$  car le nombre de cases non vides ne peut pas diminuer avec un lancer supplémentaire.

On a aussi  $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = i) = 0$  si  $i < k-1$  car le nombre de case non vides ne peut évoluer qu'au plus de 1 avec un lancer supplémentaire.

On a donc :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k) \mathbb{P}(T_n = k) + \mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k-1) \mathbb{P}(T_n = k-1).$$

Or  $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k)$  est la probabilité que le nombre de cases non vides n'ait pas évolué, c'est-à-dire que la dernière boule lancée arrive dans l'une des  $k$  cases non vides parmi les  $N$  disponibles.

Par équiprobabilité :  $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k) = \frac{k}{N}$ .

De même,  $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k-1)$  est la probabilité que la dernière boule lancée arrive dans l'une des  $N - (k-1)$  cases encore vides, donc  $\mathbb{P}(T_{n+1} = k | T_n = k-1) = \frac{N - (k-1)}{N}$ .

On a bien établi que :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N} \mathbb{P}(T_n = k-1).$$

5. (a) Par définition, puisque  $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$  :

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k) x^k$$

la somme devant être limitée aux valeurs prises par  $T_n$ , qui sont ici en nombre fini d'après la question 1. Cette série entière est donc en fait une fonction polynomiale, donc

la fonction  $G_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) Notamment la fonction  $G_n$  est dérivable en  $x = 1$  et

$$\mathbb{E}[T_n] = G'_n(1).$$

- (c) On utilisera toujours une somme infinie pour l'expression de  $G_n$ , pour ne pas avoir à distinguer si  $n \leq N$  ou non.

D'après la relation ( $\star\star$ ), pour tout  $x$  réel :

$$\begin{aligned} NG_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(T_n = k) x^k + N \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k-1) x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \mathbb{P}(T_n = k-1) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(T_n = k) x^k + N \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k-1) x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) \mathbb{P}(T_n = k-1) x^k \end{aligned}$$

car  $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$  donc

$$\begin{aligned} NG_{n+1}(x) &= x \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(T_n = k) x^{k-1} + Nx \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k) x^k - x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(T_n = k) x^{k-1} \\ &= xG'_n(x) + NxG_n(x) - x^2G'_n(x) \end{aligned}$$

ce qui conduit bien à :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (x - x^2) G'_n(x) + xG_n(x).}$$

(d) Par dérivation de la relation précédente, pour tout  $x$  réel :

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (1 - 2x) G'_n(x) + \frac{1}{N} (x - x^2) G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x).$$

En prenant  $x = 1$ , sachant que  $G_n(1) = 1$ , on obtient :

$$G'_{n+1}(1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) G'_n(1) + 1$$

donc, d'après le (b) :

$$\boxed{\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}[T_n] + 1.}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique, le nombre  $\ell = N$  vérifiant

$$\ell = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \ell + 1$$

et la suite de terme général  $\mathbb{E}(T_n) - \ell$  est géométrique de raison  $1 - \frac{1}{N}$  et de premier terme  $\mathbb{E}(T_1) - \ell = 1 - N$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\mathbb{E}(T_n) - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} (1 - N) = -N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

6. (a) La fonction indicatrice  $\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}$  vaut 1 si la  $i$ -ème boule arrive dans la case numéro  $k$  et 0 sinon. On a alors

$$\boxed{Y_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i=k\}}.}$$

- (b) Les variables aléatoires  $\mathbb{I}_{\{X_i=k\}}$  sont indépendantes (car les lancers sont indépendants) et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{N}$  (probabilité qu'une boule arrive dans l'urne  $k$ ). On en déduit que  $Y_k$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\frac{1}{N}$  :

$$Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{N}\right).$$

Autrement dit, si l'on appelle « succès » le fait qu'une boule arrive dans l'urne numéro  $k$ , la variable  $Y_k$  compte le nombre de succès dans la répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $\frac{1}{N}$ .

La variable  $Z_k$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = \mathbb{P}(Y_k \geq 1)$  avec

$$1 - p = \mathbb{P}(Y_k = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{N}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-0} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

donc

$$Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

- (c) L'événement  $\{Z_1 = 0\} \cap \dots \cap \{Z_N = 0\}$  est impossible, car toutes les cases ne peuvent être vides à l'issue des lancers, donc

$$\mathbb{P}(\{Z_1 = 0\} \cap \dots \cap \{Z_N = 0\}) = 0 \neq \mathbb{P}(Z_1 = 0) \times \dots \times \mathbb{P}(Z_N = 0)$$

d'où l'on déduit que

les variables aléatoires  $Z_k$  ne sont pas mutuellement indépendantes.

- (d) Puisque  $T_n$  compte le nombre de cases non vides :

$$T_n = \sum_{k=1}^N Z_k.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}[Z_k] = \sum_{k=1}^N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

ce qui redonne bien :

$$\mathbb{E}[T_n] = N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$