CONCOURS EXTERNE

SESSION DE 1990

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

REMARQUES IMPORTANTES.

1° *Outre l'énoncé proprement dit, le texte comporte une présentation détaillée de chacun des deux thèmes proposés ainsi qu'une définition des objectifs recherchés.*

2° *Les difficultés du problème sont graduées et le jury saura apprécier la qualité de la rédaction et toutes les démonstrations claires et complètes à l'intérieur de chacun de ces thèmes.*

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectifs du problème

Une suite $w = (w_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ de nombres complexes étant donnée, on dit que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n$ est convergente (resp. absolument convergente) si les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} w_{-n}$ sont toutes deux convergentes (resp. absolument convergentes) et on pose alors $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_{-n}$. Au cours du problème, on utilise l'espace préhilbertien complexe H_2 des suites $u = (u_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ telles que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|^2$ est convergente, le produit scalaire de deux éléments u et v étant défini par $(u|v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}_n v_n$, la norme associée étant notée $\| \ \|$. Le sous-espace préhilbertien complexe de H_2 constitué des suites u de H_2, telles que $u_n = 0$ pour tout entier n strictement négatif, est noté H_1.

La première partie du problème étudie des critères pour qu'une matrice hermitienne soit définie positive. À l'exception de la question I.4.*c.* dont le résultat peut être utilisé dans la question III.2.*c.*, la suite du problème est indépendante de cette première partie et est consacrée à l'étude et à la détermination des spectres, dont la définition est donnée plus loin, de certains endomorphismes hermitiens positifs inversibles d'un espace préhilbertien H. Après une brève étude en dimension finie où ce spectre est une partie finie de $\mathbf{R}$, la deuxième partie en fournit une localisation dans le cas d'un espace H quelconque puis, dans l'espace H_1, propose un exemple où ce spectre est l'ensemble des points d'une suite convergente de réels et de sa limite.

Les troisième et quatrième parties fournissent enfin, dans le cas de l'espace H_2, un deuxième exemple dans lequel le spectre s'identifie à un segment de $\mathbf{R}$.

PREMIÈRE PARTIE

L'espace préhilbertien considéré dans cette partie est $\mathbf{C}^n$ où n est un entier donné supérieur à un. Le produit scalaire des deux vecteurs $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ est défini par :

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k y_k ;$$

la norme du vecteur x est définie par $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Si A est une matrice à coefficients complexes, à n lignes et p colonnes, on note $A^* = {}^t\overline{A}$, la matrice à p lignes et n colonnes dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la matrice transposée de A. Une matrice carrée A est dite hermitienne si $A = A^*$.

Dans ce qui suit, un élément x de $\mathbf{C}^n$ est identifié avec la colonne X de ses composantes sur la base canonique et A désigne aussi bien une matrice carrée d'ordre n que l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ qui lui est associé. Ainsi le vecteur Ax, image de x par l'endomorphisme A, s'exprime par le produit matriciel AX et le produit scalaire $(y|Ax)$ peut s'écrire Y^*AX.

La matrice carrée A d'ordre n est dite définie positive si A est hermitienne et si, quel que soit x, élément non nul de $\mathbf{C}^n$, le nombre $(x|Ax)$ (ou X^*AX) est strictement positif.

Le déterminant d'une matrice carrée A est noté det A.

L'objet de cette première partie est de dégager des critères pour qu'une matrice hermitienne A soit définie positive.

Tournez la page S.V.P.

I.1. Étude d'une forme hermitienne sur C.

a. Étant donnés un nombre réel non nul a, un nombre réel quelconque c et un nombre complexe quelconque b, on pose, pour tout nombre complexe z : $T(z) = a|z|^2 + b\bar{z} + \bar{b}z + c$.

(On remarquera que $T(z)$ est un nombre réel.)

Montrer que, pour tout nombre complexe z : $T(z) = a\left|z + \dfrac{b}{a}\right|^2 + c - \dfrac{|b|^2}{a}$.

En déduire, en faisant intervenir les deux nombres a et $c - \dfrac{|b|^2}{a}$, une condition nécessaire et suffisante pour que $T(z)$ soit strictement positif quel que soit le nombre complexe z.

b. Application : Soient α et γ deux nombres réels et β un nombre complexe. Déterminer une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir α et le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{bmatrix}$ pour que cette matrice soit définie positive.

I.2. Premier critère de positivité d'une matrice M.

Dans cette question, M est une matrice hermitienne donnée, d'ordre n supérieur ou égal à deux. On décompose M sous la forme :

$$M = \begin{bmatrix} a & V^* \\ V & \widetilde{M} \end{bmatrix}$$

où a est un réel, V une matrice colonne à $n - 1$ éléments et $\widetilde{M}$ une matrice hermitienne d'ordre $n - 1$.

a. En décomposant la colonne Z de $\mathbb{C}^n$ sous la forme $Z = \begin{pmatrix} z \\ \widetilde{Z} \end{pmatrix}$ où z est un nombre complexe et $\widetilde{Z}$ une matrice colonne à $n - 1$ lignes, calculer le nombre complexe Z^*MZ.

b. Montrer que la matrice M est définie positive si et seulement si les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

- le nombre a est strictement positif ;
- la matrice hermitienne $a\widetilde{M} - VV^*$ est définie positive.

(À cet effet, on utilisera I.1. avec $b = V^*\widetilde{Z} = {}^t\widetilde{Z}\,\bar{V}$ et $c = \widetilde{Z}^*\widetilde{M}\widetilde{Z}$.)

Le processus précédent peut être itéré. On pose : $M_1 = M$, $d_1 = a$, $V_1 = V$, $\widetilde{M}_1 = \widetilde{M}$, $M_2 = d_1\widetilde{M}_1 - V_1V_1^*$.

Si $n \geqslant 3$, on décompose M_2 sous la forme : $M_2 = \begin{bmatrix} d_2 & V_2^* \\ V_2 & \widetilde{M}_2 \end{bmatrix}$

où d_2 est réel et V_2 une colonne à $n - 2$ éléments. On construit ainsi par récurrence une suite (M_k) de matrices hermitiennes d'ordre $n - k + 1$ (où $k = 1, 2, \ldots, n$) et une suite (d_k) de réels liées par les relations :

$$M_k = \begin{bmatrix} d_k & V_k^* \\ V_k & \widetilde{M}_k \end{bmatrix}, \quad M_{k+1} = d_k\widetilde{M}_k - V_kV_k^*.$$

Pour $k = n$, $M_n = [d_n]$ est d'ordre 1 et le processus s'arrête.

c. Montrer que M est définie positive si et seulement si tous les nombres de la suite $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont strictement positifs.

d. Rédiger, dans le langage usuel, et en quelques lignes, un algorithme permettant de calculer les nombres d_k, prenant fin au premier nombre d_k, s'il existe, qui est négatif ou nul, et décidant si une matrice hermitienne M donnée est définie positive ou non.

I.3. Deuxième critère de positivité.

M est toujours une matrice hermitienne donnée d'ordre n supérieur ou égal à deux. On utilise les notations précédentes.

a. On suppose $n = 2$; montrer que $\det M_1 = \det M_2$.

b. Montrer que si n est supérieur strictement à deux et si d_1 est nul, alors $\det M_2$ est nul.

Tournez la page S.V.P.

c. Pour n strictement supérieur à deux et d_1 non nul, montrer que $d_1^{n-2} \det M_1 = \det M_2$.

Indication : On pourra multiplier par d_1 les $n-1$ dernières colonnes de M_1 ; en ajoutant à chacune de ces colonnes un multiple convenable de la première colonne de M_1, on se ramène à calculer un déterminant dont la première ligne ne comporte plus qu'un seul coefficient non nul.

d. Pour $n \geqslant 3$, en supposant les nombres d_k non nuls pour $k = 1, 2, ..., n-2$, montrer que :

$$\det M = \frac{d_n}{d_1^{n-2}\ d_2^{n-3}\ \dots\ d_{n-2}}.$$

e. On note C_p la matrice formée des p premières lignes et des p premières colonnes de M, et Δ_p le déterminant de C_p. Exprimer, lorsque les nombres d_k sont non nuls, Δ_1 et Δ_2 à l'aide des nombres d_k puis, pour $p \in \{3, \dots, n\}$, exprimer d_p en fonction de $d_1, d_2, \dots, d_{p-2}$ et Δ_p lorsque $n \geqslant 3$ (on pourra appliquer I.3.*d.* à la matrice C_p).

f. Déduire de ce qui précède que la matrice M est définie positive si et seulement si tous les nombres de la suite $(\Delta_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont strictement positifs.

I.4. ***Applications.***

a. En utilisant le premier critère, montrer que la matrice M suivante est définie positive :

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Le nombre a réel et le nombre b complexe étant donnés, on considère :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \bar{b} \\ 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

En utilisant le premier critère, déterminer les valeurs de a et de b pour lesquelles M est définie positive.

c. Soit la matrice réelle A d'ordre n de coefficients $a_{p,q}$ définis par $a_{p,q} = \exp(-|p-q|)$. Utiliser le second critère pour prouver que A est définie positive.

DEUXIÈME PARTIE

Un espace préhilbertien complexe H étant donné, on note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de H et $\|x\|$ la norme du vecteur x. Un endomorphisme φ de l'espace H est dit hermitien (ou auto-adjoint) si, quel que soit le couple (x, y) d'éléments de H, l'égalité $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$ est vérifiée. Un tel endomorphisme est dit positif (resp. défini positif) si, quel que soit x dans H, le réel $(\varphi(x)|x)$ est positif (resp. strictement positif pour tout x non nul dans H). On désigne par End(H) l'algèbre des endomorphismes de H ; l'unité de cette algèbre est l'endomorphisme identité de H noté I.

II.1. Étude du spectre en dimension finie.

Si φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, le spectre de φ est l'ensemble, noté $\sigma(\varphi)$, des nombres complexes λ tels que $\varphi - \lambda I$ ne soit pas inversible. L'algèbre End$(\mathbb{C}^n)$ est munie de la norme définie par : $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\|, \|x\| \leqslant 1\}$.

a. Soit φ un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^n$. Prouver que le spectre de φ s'identifie à l'ensemble des valeurs propres de φ et que ce spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.

b. On désigne par $\rho(\varphi)$ le plus grand module des valeurs propres de φ. En supposant toujours φ hermitien, prouver que $\|\varphi\| \leqslant \rho(\varphi)$, puis que $\|\varphi\| = \rho(\varphi)$. (On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres.)

c. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de φ, pour que l'endomorphisme hermitien φ soit positif (resp. défini positif). Que peut-on dire dans ce cas de $\|\varphi\|$?

d. On suppose que φ est hermitien positif et inversible ; montrer que φ^{-1} est également hermitien et positif et déduire de ce qui précède que $\sigma(\varphi)$ est inclus dans $[\|\varphi^{-1}\|^{-1}, \|\varphi\|]$.

Dans les questions suivantes, H est de dimension infinie et complet. Le sous-espace de End(H) constitué des endomorphismes continus de H est une sous-algèbre de End(H) que l'on note $\mathcal{L}(H)$. La norme d'un endomorphisme φ continu de H est toujours définie par :

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x)\|, x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$$

et on admettra que, muni de cette norme, $\mathcal{L}(H)$ est complet. On admet également la propriété de la norme du composé de deux éléments de $\mathcal{L}(H)$: $\|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\|\,\|\psi\|$.

Un élément φ de $\mathcal{L}(H)$ est dit inversible dans $\mathcal{L}(H)$ si φ est bijectif sur H et si φ^{-1} est continu. Le spectre $\sigma(\varphi)$ est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\varphi - \lambda I$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

Tournez la page S.V.P

II.2. Étude d'un premier exemple.

Dans cette question l'espace H est celui, noté H_1, du préambule, on admettra qu'il est complet. Soit ψ l'application qui associe à toute suite u de H_1 la suite notée ψ_u de terme général :

$$(\psi_u)_n = \frac{n+1}{n+2} u_n.$$

a. Démontrer que ψ est un endomorphisme de H_1, hermitien défini positif et continu. Calculer $\|\psi\|$.

b. Déterminer les nombres complexes λ tels que $\psi - \lambda I$ soit non injectif.

c. Montrer que $\psi - I$ n'est pas surjectif, puis que, si λ n'appartient pas à $\left\{\frac{n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$,

$\psi - \lambda I$ est inversible dans $\mathscr{L}(H_1)$. En déduire $\sigma(\psi)$.

d. Calculer $\|\psi^{-1}\|$ et vérifier enfin que $\sigma(\psi) \subset [\|\psi^{-1}\|^{-1}, \|\psi\|]$.

II.3. Premières localisations du spectre de φ.

Un espace préhilbertien complet quelconque H étant donné, on considère un élément fixé φ de $\mathscr{L}(H)$. Les puissances successives de φ par composition sont notées φ^k (avec $\varphi^0 = I$ et $\varphi^1 = \varphi$).

a. Montrer que si un nombre complexe donné z vérifie $|z| > \|\varphi\|$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}\varphi^k$ converge normalement dans $\mathscr{L}(H)$. En déduire que $\varphi - zI$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$ et que $\sigma(\varphi)$ est inclus dans le disque fermé de centre O et de rayon $\|\varphi\|$.

b. On pose $K = \|\varphi - I\|$. Prouver que $\sigma(\varphi)$ est inclus dans le disque fermé de centre 1 et de rayon K.

II.4. Réalité du spectre d'un endomorphisme hermitien.

Soit φ un endomorphisme hermitien appartenant à $\mathscr{L}(H)$.

a. Montrer que, pour tout élément x de H et pour tout nombre réel λ, $\|\varphi(x) + i\lambda x\|^2 \leqslant (\|\varphi\|^2 + \lambda^2)\|x\|^2$.
En déduire l'inégalité $\|\varphi + i\lambda I\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 + \lambda^2$.

b. Prouver que si le nombre z n'est pas réel, $\varphi - zI$ est inversible dans $\mathscr{L}(H)$. À cet effet, on posera $z = \alpha + i\beta$ et on montrera, en utilisant II.3.*a.*, que si $\varphi - zI$ n'est pas inversible dans $\mathscr{L}(H)$, alors pour tout nombre réel λ, $\alpha^2 + (\beta+\lambda)^2 \leqslant \|\varphi + i\lambda I\|^2$. En déduire que le spectre de φ est inclus dans $\mathbb{R}$.

II.5. Cas d'un endomorphisme hermitien et inversible.

Soit φ un élément donné de $\mathscr{L}(H)$ hermitien et inversible dans $\mathscr{L}(H)$.

a. Prouver que φ^{-1} est hermitien et déduire de ce qui précède que $\sigma(\varphi^{-1})$ est inclus dans $[-\|\varphi^{-1}\|, \|\varphi^{-1}\|]$.

b. Prouver qu'un nombre réel λ appartient à $\sigma(\varphi)$ si et seulement si son inverse appartient à $\sigma(\varphi^{-1})$.
Montrer que $\|\varphi\|\,\|\varphi^{-1}\| \geqslant 1$ et déduire de l'étude précédente l'inclusion suivante :

$$\sigma(\varphi) \subset [-\|\varphi\|, -\|\varphi^{-1}\|^{-1}] \cup [\|\varphi^{-1}\|^{-1}, \|\varphi\|].$$

TROISIÈME PARTIE

L'espace préhilbertien utilisé dans cette partie et la suivante est celui H_2 du préambule. On admet qu'il est complet.

Le sous-espace des éléments u de H_2 tels que $\sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|$ converge est noté V et, pour u élément de V, on note $\|u\|_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_n|$.

III.1. Construction d'éléments de $\mathscr{L}(H_2)$. Dans cette question u est un élément fixé de V.

a. Soit $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite bornée de nombres complexes.

Prouver que, pour tout entier n fixé dans $\mathbb{Z}$, la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_p v_{n-p}$ est convergente. Sa somme est notée w_n.

b. Les hypothèses restant les mêmes, prouver à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que, pour tout entier positif P, $\left|\sum_{p=-P}^{P} u_p v_{n-p}\right|^2 \leqslant \|u\|_1 \sum_{p=-P}^{P} |u_p|\,|v_{n-p}|^2$. En remarquant que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |u_p|\,|v_{n-p}|^2$ est convergente, montrer que, pour tout n : $|w_n|^2 \leqslant \|u\|_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} |u_p|\,|v_{n-p}|^2$.

Tournez la page S.V.P.

c. Prouver que, pour tout entier positif N et pour tout élément v de H_2 : $\sum_{n=-N}^{N} |w_n|^2 \leq \|u\|_1^2 \, \|v\|^2$.

En déduire que si v est un élément de H_2, il en est de même de w, et donner une majoration pour la norme $\|w\|$.

d. Soit φ_u l'endomorphisme de H_2 qui à v associe ainsi w. Prouver que $\varphi_u \in \mathscr{L}(H_2)$ et que $\|\varphi_u\| \leq \|u\|_1$.

<u>Dans tout le reste du problème, u désigne la suite de terme général $u_n = e^{-|n|}$ et φ_u l'endomorphisme qui lui est associé.</u> On se propose d'étudier complètement ce deuxième exemple.

III.2. Symétrie et positivité de φ_u. Pour tout entier relatif k, on note δ^k l'élément de V défini par $\delta^k_n = 0$ si $n \neq k$ et $\delta^k_k = 1$.
Pour tout v, élément de H_2 et pour tout entier positif N, on note v^N l'élément de H_2 défini par : $v^N = \sum_{-N}^{+N} v_k \delta^k$.

a. Prouver que la suite de terme général v^N converge vers v dans H_2.

b. Prouver que, pour tout couple d'entiers (p, k) de $\mathbf{Z}$, $(\delta^p | \varphi_u(\delta^k)) = (\varphi_u(\delta^p) | \delta^k)$ et en déduire à l'aide du résultat précédent que φ_u est hermitien.

c. À l'aide de la question I.4.*c.*, prouver que les nombres $(\varphi_u(v^N) | v^N)$ sont positifs et en déduire que φ_u est positif.

III.3. Inversibilité de φ_u dans $\mathscr{L}(H_2)$.

a. Soit $v \in$ V. Prouver que $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n e^{int}$, série de fonctions de la variable réelle t, converge normalement sur $\mathbf{R}$ et que la fonction somme F_v est 2π-périodique et continue sur $\mathbf{R}$.

b. Quelle est la fonction F_w associée à $w = \varphi_v(\delta^k)$ où $v \in$ V ?

c. Soient v et $\tilde{v}$ deux éléments de V. Montrer que $\varphi_v(\tilde{v}) = \varphi_{\tilde{v}}(v)$.

d. Soient v et $\tilde{v}$ deux éléments de V, comparer $\varphi_v(\tilde{v})$ à la suite des coefficients de Fourier de $F_v F_{\tilde{v}}$ (on calculera ces coefficients en utilisant le développement en série de Fourier de F_v).

e. Calculer F_u et montrer que $F_u(t) \neq 0$ pour tout réel t. En remarquant que $\dfrac{1}{F_u}$ est un polynôme trigonométrique, déterminer l'élément $\tilde{u}$ de V tel que $F_{\tilde{u}} F_u = 1$.

f. En utilisant *b*) et *c*) ou *d*), montrer que, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, $\varphi_u \circ \varphi_{\tilde{u}}(\delta^k) = \delta^k$ et en déduire que φ_u est inversible dans $\mathscr{L}(H_2)$, d'inverse $\varphi_{\tilde{u}}$.

QUATRIÈME PARTIE

On poursuit l'étude du spectre de l'endomorphisme φ_u.

IV.1. Localisation de $\sigma(\varphi_u)$.

a. Calculer $\|u\|_1$ et $\|\tilde{u}\|_1$ et en déduire des majorations de $\|\varphi_u\|$ et de $\|\varphi_u^{-1}\|$.

b. Calculer $\|u - \delta^0\|_1$, en déduire une majoration de $\|\varphi_u - I\|$ puis, en utilisant II.3.*b.* et II.5.*b.*, prouver que : $\sigma(\varphi_u) \subset \left[\dfrac{e-1}{e+1}, \dfrac{e+1}{e-1}\right]$.

Pour la fin du problème, α étant un nombre réel et p étant un entier strictement positif, on note $v^{\alpha,p}$ ou plus simplement v l'élément de V défini par $v_n = e^{in\alpha}$ si $|n| \leq p$ et $v_n = 0$ si $|n| > p$. On pose également :

$$w = \varphi_u(v) - F_u(-\alpha)v \quad \text{où} \quad F_u(-\alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-|n|} e^{-in\alpha}.$$

$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-|n|} e^{-in\alpha}$

IV.2. Majoration de $\|w\|$. On suppose α et p fixés.

a. Montrer que, si $n > p$, $|w_n| \leq \sum_{k=n-p}^{n+p} e^{-k}$. En déduire qu'il existe un réel K_0 indépendant de p tel que $\sum_{n=p+1}^{+\infty} |w_n|^2 \leq K_0$.

b. Montrer que si $0 \leq n \leq p$, $|w_n| \leq \sum_{-\infty}^{n-p-1} e^k + \sum_{n+p+1}^{+\infty} e^{-k}$. En déduire qu'il existe un nombre réel K_1 indépendant de p tel que $\sum_{n=0}^{p} |w_n|^2 \leq K_1$.

c. Étudier, sans nouveaux calculs, le cas $n < 0$ et prouver qu'il existe K tel que, pour tout entier positif p, $\|w\| \leq$ K.

IV.3. Détermination du spectre de φ_u. Les éléments v et w précédents sont plus précisément notés $v^{\alpha,p}$ et $w^{\alpha,p}$.

a. Soient x^p de norme 1 et y^p les éléments de H_2 définis par $x^p = \dfrac{v^{\alpha,p}}{\|v^{\alpha,p}\|}$ et $y^p = \dfrac{w^{\alpha,p}}{\|v^{\alpha,p}\|}$.

Prouver, α étant toujours un réel fixé, que $\lim_{p\to\infty} y^p = 0$. En déduire que, quel que soit α, $F_u(-\alpha) \in \sigma(\varphi_u)$.

b. Déduire de ce qui précède l'égalité : $\sigma(\varphi_u) = \left[\dfrac{e-1}{e+1}, \dfrac{e+1}{e-1}\right]$.