École normales supérieures

Concours d'admission 2014 - filière MP spécialité INFO

Corrigé de l'épreuve d'informatique-mathématiques - A - (ULCR)

Partie I : dimension VC d'un hypergraphe

Pour tout entier naturel n, nous noterons $S_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Remarque : si H est non vide, la dimension VC de H est correctement définie, puisque la partie vide est pulvérisée par H (on aura $\dim_{\mathrm{VC}}(H) \geq 1$). Nous utiliserons la convention $\dim_{\mathrm{VC}}(\emptyset) = -\infty$ pour que les inégalités de la question 4 soient toujours valables.

1.a Le nombre maximal d'arête est le cardinal de $P(S)$, i.e. 2^n, puisque la seule condition imposée à H est l'inclusion de H dans $P(S)$.

1.b L'ensemble des hypergraphes de sommets S est l'ensemble des parties de $P(S)$: le nombre d'hypergraphes définis sur S est donc égal à $|P(P(S))| = 2^{|P(S)|} = 2^{2^n}$. Par exemple, pour $n = 0$, il y a deux hypergraphes sur $\emptyset$: $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$.

1.c Pour $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leq i$, notons P_j^i l'ensemble des parties de S_i de cardinal j. Pour $p \geq q \geq 1$, P_q^p est la réunion disjointes de P_q^{p-1} et de $P' = \{A \subset S_p,\ |A| = q \text{ et } p-1 \in A\}$. Comme l'application $B \longmapsto B \cup \{p-1\}$ est bijective de P_{q-1}^{p-1} sur P', on a :

$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1}.$$

2.a Posons $S = S_2$, $H = \{S_2\}$, $U = \{0\}$ et $V = \{0, 1\}$. Nous avons $H_{|U} = \{\{0\}\} \not\subset \{\{0, 1\}\} = H_{|V}$.

2.b Par contraposée : si $\alpha \cap V = \beta \cap V$, alors $\alpha \cap U = \alpha \cap (U \cap V) = (\alpha \cap V) \cap U = (\beta \cap V) \cap U = \beta \cap (U \cap V) = \beta \cap U$.

2.c Si $N = |H_{|U}|$, il existe une famille $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'éléments de H telle que les parties $\alpha_i \cap U$ soient deux à deux distinctes : on en déduit que les parties $\alpha_i \cap V$ sont également deux à deux distinctes, ce qui prouve que $|H_{|V}| \geq N = |H_{|U}|$.

3.a Posons $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Nous avons :

$$H = \{\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j\}, 1 \leq i \leq j \leq n\} \cup \{\emptyset\}$$

donc avec $U = \{x_1, x_2\}$, $H_{|U} = P(U)$ mais pour $U \subset S$ de cardinal au moins trois, on peut choisir i, j, k tels que $1 \leq i < j < k \leq n$ et $x_i, x_j, x_k \in U$: la partie $\{x_i, x_k\}$ de U n'est pas dans $H_{|U}$. On en déduit que $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = 3$.

3.b Si $n = 3$, $H' = P(S')$ donc $\dim_{\mathrm{VC}}(H') = 4$.

Si $n \geq 4$, on a pour toute partie $S'' \subset S'$, $H'' = H'_{|S''} = \{S'' \cap f([a,b]),\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, si S'' est de cardinal 3, $H'' = P(S'')$, mais si S'' est de cardinal au moins égal à 4, on peut fixer $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ avec $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$ tels que $f(\theta_1), f(\theta_2), f(\theta_3), f(\theta_4) \in S''$. La partie $f(\theta_1), f(\theta_3)$ de H'' n'est pas élément de $H'_{|H''}$ car pour a, b réels, la partie $f([a,b])$ est connexe par arcs : si elle contient $f(\theta_1)$ et $f(\theta_2)$, elle contient ou bien $f(\theta_2)$, ou bien $f(\theta_4)$, qui appartiennent aux deux arcs de cercles qui relient $f(\theta_1)$ à $f(\theta_3)$. On en déduit que $H'' \neq P(S'')$.

Nous avons donc $\dim_{\mathrm{VC}}(H') = 4$ dans tous les cas.

4.a Supposons que $\dim_{\mathrm{VC}}(H) = 1$. Si $H = \emptyset$, $|H| \leq 1$. Sinon, soient $\alpha, \beta \in H$. Nous allons montrer que $\alpha \subset \beta$, ce qui prouvera par symétrie que $\alpha = \beta$: H sera un singleton.

Soit $x \in \alpha$ (si un tel x existe). Comme $\{x\} = \alpha \cap \{x\} \in H_{|\{x\}}$ et $H_{|\{x\}} \neq P(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$, on a $\beta \cap \{x\} = \{x\}$, ce qui prouve que $\alpha \subset \beta$.

4.b Considérons la surjection $\begin{array}{rccc} \Phi : & H & \longrightarrow & H'. \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha \cap (H \setminus \{x\}) \end{array}$ Si $\alpha' \in H''$, α' a deux antécédents par Φ (α' et $\alpha' \setminus \{x\}$) ; sinon, α possède un unique antécédent. Nous avons donc :

$$|H| = 2 \times |H''| + |H' \setminus H''| = |H'| + |H''|.$$

4.c Remarquons que pour $S_2 \subset S_1 \subset S$, on a $H_{|S_2} = \left(H_{|S_1}\right)_{|S_2}$.

Soit $S' \subset S \setminus \{x\}$ tel que $H'_{|S'} = P(S')$. On a alors $H_{|S'} = H'_{|S'} = P(S')$ donc $\dim_{\mathrm{VC}}(H') \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H)$.

Soit $S'' \subset S \setminus \{x\}$ tel que $H''_{|S''} = P(S'')$. Posons $S' = S'' \cup \{x\}$ (on a donc $|S'| = 1 + |S''|$). Pour chaque partie T de S'', il existe $\alpha \in H''$ tel que $T = \alpha \cap S''$. On a alors $\alpha \subset S \setminus \{x\}$, $\alpha \in H$ et $\alpha \cup \{x\} \in H$. On en déduit :

- $T = \alpha \cap S'' = \alpha \cap S' \in H_{|S'}$;
- $T \cup \{x\} = (\alpha \cup \{x\}) \cap S' \in H_{|S'}$.

Ainsi $H_{|S'} = P(S')$, ce qui prouve que $1 + \dim_{\mathrm{VC}}(H'') \leq \dim_{\mathrm{VC}}(H)$.

4.d Prouvons ce résultat par récurrence sur $|S|$:

- Si $|S| = 0$, on a $H = \emptyset$ ou $H = \{\emptyset\}$. Dans le premier cas, $|H| = 0$ et $d = -\infty$; dans le second cas, $|H| = 1$ et $d = 1$: l'inégalité demandée est bien vérifiée.
- Supposons que $|S| = n \geq 1$ et que la propriété ait été démontrée au rang $n - 1$. En choisissant $x \in S$ et en reprenant les notations précédentes, notons $d' = \dim_{\mathrm{VC}}(H')$ et $d'' = \dim_{\mathrm{VC}}(H'')$. L'hypothèse de récurrence nous donne :

$$\begin{aligned} |H| &\leq |H'| + |H''| \leq \sum_{i=0}^{d'-1} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{d''-1} \binom{n-1}{i} \\ &\leq \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{d-2} \binom{n-1}{i} \qquad \text{(car } d' \leq d \text{ et } d'' \leq d - 1\text{)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=0}^{d-1}\binom{n-1}{i}+\sum_{i=1}^{d-1}\binom{n-1}{i-1}\\
&\leq 1+\sum_{i=1}^{d-1}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]\\
&\leq 1+\sum_{i=1}^{d-1}\binom{n}{i}\\
&\leq \sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}
\end{aligned}
$$

et la propriété est démontrée au rang n.

4.e Pour $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^* \cup \{-\infty\}$, notons H l'ensemble des parties de S_n de cardinal inférieur ou égal à $d-1$. On a bien :

- $|H| = \sum_{i=0}^{d-1}\binom{n}{i}$, puisque $\binom{n}{i}$ est le nombre de parties de S_n de cardinal i ;
- si S' est une partie de S de cardinal inférieur strictement à d (en supposant $d \neq -\infty$),$H_{|S'} = P(S')$;
- si S' est une partie de S de cardinal supérieur ou égal à d, $S' \notin H_{|S'}$, donc $H_{|S'} \neq P(S')$.

L'hypergraphe ainsi défini répond donc à la question posée.

Partie II : compression d'hypergraphe et dimension VC

5 Soit Φ l'application définie sur H par : $\alpha \longmapsto \begin{cases} \alpha & \text{si } x \notin \alpha \\ \alpha & \text{si } x \in \alpha \text{ et } \alpha \setminus \{x\} \in H \\ \alpha \setminus \{x\} & \text{sinon} \end{cases}$

- Par définition de $D_x(H)$, Φ est à valeur dans $D_x(H)$;
- Φ est injective. En effet, supposons que $\alpha, \beta \in H$ avec $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$. Trois cas sont possibles :
  <u>i) $x \notin \alpha$</u> : comme x n'est pas élément de $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) = \alpha$, $\Phi(\beta) = \beta \setminus \{x\}$. Si x était élément de β, on aurait alors $\Phi(\beta) = \beta$, car $\beta \setminus \{x\} = \alpha \in H$: ce serait absurde. On en déduit que $\alpha = \Phi(\beta) = \beta$.

  <u>ii) $x \in \alpha$ et $\alpha \setminus \{x\} \in H$</u> : on a alors $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) = \alpha$ qui contient x, donc $\alpha = \Phi(\beta) = \beta$.

  <u>iii) $x \in \alpha$ et $\alpha \setminus \{x\} \notin H$</u> : on a alors $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) = \alpha \setminus \{x\}$. Comme β est ou bien égal à $\Phi(\beta)$ ou bien égal à $\Phi(\beta) \cup \{x\}$ et que $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) = \alpha \setminus \{x\}$ n'est pas élément de H, $\beta = \Phi(\beta) \cup \{x\} = \alpha$.
- Φ est surjective : soit $\gamma \in D_x(H)$. Il existe alors $\alpha \in H$ tel que nous soyons dans l'un de ces deux cas :
  <u>i) $\gamma = \alpha \setminus \{x\}$</u> : si $x \notin \alpha$, $\gamma = \alpha = \Phi(\alpha)$; si $x \in \alpha$ et $\alpha \setminus \{x\} \in H$, $\gamma = \Phi(\alpha \setminus \{x\})$; enfin, si $x \in \alpha$ et $\alpha \setminus \{x\} \notin H$, $\gamma = \Phi(\alpha)$.

  <u>ii) $\gamma = \alpha$ avec $\alpha \setminus \{x\} \in H$</u> : on a $\gamma = \Phi(\alpha)$.

Φ est une bijection de H sur $D_x(H)$, qui ont donc même cardinal.

6 Il est inutile de séparer les cas, selon que x est ou non élément de U. Fixons $\gamma \in D_x(H)$. Nous avons deux cas :

i) $\gamma = \alpha \setminus \{x\}$ avec $\alpha \in H$.

$$\gamma \cap U = \big(\alpha \setminus \{x\}\big) \cap U = \underbrace{\big(\alpha \cap \{x\}\big)}_{\in H_{|U}} \setminus \{x\}$$

donc $\gamma \cap U \in D_x(H_{|U})$.

ii) $\gamma \in H$ avec $\gamma \setminus \{x\} \in H$. Alors $\gamma \cap U \in H_{|U}$ et :

$$\big(\gamma \cap U\big) \setminus \{x\} = \underbrace{\big(\gamma \setminus \{x\}\big)}_{\in H} \cap U \in H_{|U}$$

donc $\gamma \cap U \in D_x(H_{|U})$.

7 Soit U tel que $H_{|U} \neq \mathcal{P}(U)$. On a alors $\big|(D_x(H))_{|U}\big| \leq \big|D_x(H_{|U})\big| = |H_{|U}| < |\mathcal{P}(U)|$ donc $(D_x(H))_{|U} \neq \mathcal{P}(U)$. On en déduit le résultat demandé : $\dim_{\mathrm{VC}} D_x(H) \leq \dim_{\mathrm{VC}} H$.

8.a Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $N_i = \sum_{\alpha \in H_i} |\alpha|$.

Soit H un hypergraphe sur S et $x \in S$. En notant Φ la bijection définie à la question 7, nous avons :

$$\sum_{\alpha \in D_x(H)} |\alpha| = \sum_{\alpha \in H} |\Phi(\alpha)|$$

Comme $\Phi(\alpha) = \alpha$ ou $\alpha \setminus \{x\}$, on en déduit que

$$\sum_{\alpha \in D_x(H)} |\alpha| \leq \sum_{\alpha \in H} |\alpha|$$

avec égalité si et seulement si $\Phi(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in H$, i.e. si et seulement si $D_x(H) = H$.

Ainsi, $(N_i)_{i \geq 0}$ est une suite décroissante d'entiers naturels : elle stationne à partir d'un certain rang i_0 et $H_i = H_{i_0}$ pour tout $i \geq i_0$.

8.b Comme $\dim_{\mathrm{VC}} H^* \leq \dim_{\mathrm{VC}} H$, il suffit de montrer que la dimension VC de H^* est égale à $M = \max\{|\alpha|,\ \alpha \in H^*\}$. Ceci est une conséquence directe du fait que pour tout $x \in S$, $D_x(H^*) = H^*$:

- soit $U \subset S$ tel que $H^*_{|U} = \mathcal{P}(U)$. Il existe en particulier $\alpha \in H^*$ tel que $\alpha \cap U = U$. On en déduit que $|U| \leq |\alpha| \leq M$.
- soit $\alpha_0 \in H^*$ tel que $|\alpha_0| = M$. Pour toute partie A de α_0, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots i_k \in S$ tels que $A = \alpha_0 \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. Nous avons alors $\alpha_0 \in H^*$, $\alpha_0 \setminus \{i_1\} \in D_{i_1}(H^*) = H^*$, et ainsi de suite jusqu'à

  $$A = \big(\alpha_0 \setminus \{i_1, \dots, i_{k-1}\}\big) \setminus \{i_k\} \in D_{i_k}(H^*) = H^*$$

  soit $H^*_{|\alpha_0} = \mathcal{P}(\alpha_0)$.

8.c Comme H^* est contenu dans l'ensemble des parties de S de cardinal au plus M, nous avons :

$$|H| = |H^*| \leq |\{U \subset S,\ |U| \leq M\}| = \sum_{i=0}^{M} \binom{n}{i} \leq \sum_{i=0} d-1 \binom{n}{i}$$

Partie III : dimension VC d' hypergraphes géométriques

9.a Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de parties convexes de $\mathbb{R}^d$, alors pour $x, y \in C = \cap_{i\in I} C_i$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_i$ pour tout $i \in I$, donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Une intersection de parties convexes est donc convexe.

Ceci prouve en particulier que pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{conv}(A)$ est une partie convexe qui contient A et qui est contenue dans toutes les parties convexes contenant A : c'est la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^d$ contenant A.

9.b (2) $\Longrightarrow$ (1) est évident car $\operatorname{conv}(A)$ est convexe.

Supposons que A est convexe. Comme A est convexe et contient A, $\operatorname{conv}(A) \subset A$ et $A \subset \operatorname{conv}(A)$ par définition de l'enveloppe convexe : on a donc (1) $\Longrightarrow$ (2).

(3) $\Longrightarrow$ (1) en choisissant $n = 2$.

(1) $\Longrightarrow$ (3) se prouve par récurrence sur n : supposons que A est convexe.

- pour $x_1, x_2 \in A$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, nous avons

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda_1)x_2 \in A.$$

- soit $n \geq 3$ et supposons que la propriété ait été démontrée au rang n. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$. Si $\lambda_{n+1} = 1$, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1} = x_{n+1} \in A$. Sinon, posons $\mu = 1 - \lambda_{n+1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \in]0,1]$ et $\mu_i = \lambda_i/\mu$ pour i compris entre 1 et n. Les μ_i sont positifs et de somme égale à 1 : l'hypothèse de récurrence prouve que $y = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n \in A$ et comme $\mu \in [0,1]$, la convexité de A permet de conclure :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1} = \mu y + (1-\mu)x_{n+1} \in A.$$

9.c Posons $C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$.

Si B est une partie convexe contenant A, $C \subset B$ d'après la propriété (3), donc $C \subset \operatorname{conv}(A)$.

C est une partie convexe, car si $x, y \in C$, associés resp. à $(x_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(x_i, \lambda_i)_{n+1\leq i\leq n+m}$, et si $\mu \in [0,1]$, alors $\lambda x + (1-\lambda)y$ est élément de C, associé à la famille :

$$(x_1, \mu\lambda_1), \ldots, (x_n, \mu\lambda_n), (x_{n+1}, (1-\mu)\lambda_{n+1}), \ldots, (x_{n+m}, (1-\mu)\lambda_{n+m}).$$

Comme elle contient A, elle contient également $\operatorname{conv}(A)$, ce qui achève de démontrer l'égalité.

10.a Soit un demi-espace fermé D, associé à $c \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $x, y \in D$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y) \cdot c = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(x \cdot c)}_{\leq t} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{(y \cdot c)}_{\leq t} \leq \lambda t + (1-\lambda)t = t$$

donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$ et D est convexe.

10.b Notons encore c, t un couple définissant D.

L'implication $\Longleftarrow$ est évidente, car $X \subset \text{conv}(X)$.

Montrons le sens direct par contraposée : supposons que $X \cap D = \emptyset$ et soit $x \in \text{conv}(X)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. On a alors, les λ_i étant positifs et non tous nuls :

$$x \cdot c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(x_i \cdot c)}_{<t} < t$$

donc $\text{conv}(X) \cap D = \emptyset$.

11.a Soit $n \geq d+2$. On pose $y_i = \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ pour tout i. Le rang de $(y_1, \ldots y_n)$ est au plus égal à $d+1$ et $n > d+1$, donc cette famille est liée : il existe un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de réels non tous nuls tel que $\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n = 0$, ce qui donne $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$.

11.b Soit (λ_i) la famille construite à la question précédente. Posons :

$$I_1 = \{i \mid \lambda_i \geq 0\},\ V_1 = \{x_i, \mid i \in I_1\},\ I_2 = \{i \mid \lambda_i < 0\},\ V_2 = \{x_i, \mid i \in I_2\}$$

$\{V_1, V_2\}$ est alors une partition de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en deux parties non vides (la somme des λ_i est nulle et les λ_i ne sont pas tous nuls). En posant $\mu = \displaystyle\sum_{i \in I_1} \lambda_i = \sum_{i \in I_2} -\lambda_i > 0$, nous avons :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i}_{\in \text{conv}(V_1)} = \underbrace{\sum_{i \in I_2} \frac{-\lambda_i}{\mu} x_i}_{\in \text{conv}(V_2)}$$

donc $\text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2) \neq \emptyset$.

12 Soit $U \subset S$ tel que $|S| \geq d+2$. On pose $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et on applique la question 11 : on subdivise U en deux parties V_1, V_2 telles que $\text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2) \neq \emptyset$. Pour tout $D \in \mathcal{D}_d$, $D \cap U \neq V_1$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $V_1 \subset D$ et $D \cap V_2 = \emptyset$. On aurait alors $\text{conv}(V_1) \subset D$ (car D est convexe) et $D \cap \text{conv}(V_2) = \emptyset$ (question 10 b) : absurde.

Ainsi, $H_{|U} \neq \mathcal{P}(U)$ dès que $|U| \geq d+2$, donc $\dim_{\text{VC}} H \leq d+2$.

13 La boule unité fermée est strictement convexe : si x et y sont deux points distincts de norme 1, les points de $]x, y[$ sont de norme strictement inférieure à 1. C'est par exemple une conséquence de l'identité du parallélogramme :

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2 = \underbrace{\frac{||x||^2 + ||y||^2}{2}}_{=1} - \underbrace{\frac{||x-y||^2}{4}}_{>0} < 1$$

puis, pour $z \in]x, \frac{x+y}{2}]$ (la preuve serait symétrique avec $z \in [\frac{x+y}{2}, y[$), on peut écrire $z = \alpha x + (1-\alpha)\frac{x+y}{2}$ avec $\alpha \in [0, 1[$, ce qui donne :

$$||z|| \leq \alpha + \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} \underbrace{\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2}_{<1} < \alpha + (1-\alpha) = 1$$

On en déduit que pour toute partie A de S, $\underbrace{\text{conv}(A)}_{\in \mathcal{C}_2} \cap S = A$: $H_{|S} = \mathcal{P}(S)$ et $\dim_{\text{VC}} H = n+1$.

Partie IV : approximation d'une famille d'hypergraphes géométriques

14.a Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut choisir $x_i \in \cap_{j \neq i} C_j$. S'il existe i et i' distincts tels que $x_i = x_{i'}$, on a $x_i \in C_1 \cap \ldots \cap C_n$. Sinon, la question 11b) permet de partitionner $\{x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ en deux sous-ensembles $V_1 = \{x_i,\ i \in I_1\}$ et $V_2 = \{x_i,\ i \in I_2\}$ tels que $\text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2) \neq \emptyset$.

V_1 est contenu dans la partie convexe $\cap_{i \in I_2} C_i$, donc $\text{conv}(V_1) \subset \cap_{i \in I_2} C_j$. De même, $\text{conv}(V_2) \subset \cap_{i \in I_1} C_j$. On en déduit que

$$\text{conv}(V_1) \cap \text{conv}(V_2) \subset \left(\bigcap_{i \in I_2} V_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I_1} V_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

donc $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} V_i \neq \emptyset$.

14.b La preuve se fait par récurrence sur n :

- si $n = d+2$, il suffit d'appliquer le a).
- soit $n \geq d+3$ et supposons que le résultat ait été démontré au rang $n-1$. Supposons que pour toute partie de cardinal $d+1$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, l'intersection des C_i pour $i \in I$ soit non vide. Pour toute partie S' de cardinal $n-1$ contenue dans $\{1, \dots, n\}$, l'hypothèse de récurrence s'applique : l'intersection des C_i pour $i \in S'$ est non vide. On peut alors appliquer le a) : l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{1 \leq i \leq n} C_i$ est non vide.

15.a Le résultat est évident, puisqu'une partie D de $\mathbb{R}^d$ est un demi-espace ouvert si et seulement si $D' = \mathbb{R}^d \setminus D$ est un demi-espace fermé. En notant $\mathcal{D}'_d$ l'ensemble des demi-espaces ouverts, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
c \text{ est un point central de } S \quad & \iff \quad \forall\, D \in \mathcal{D}_d,\ \left(c \in D \Longrightarrow |D \cap S| \geq \frac{n}{d+1} \right) \\
& \iff \quad \forall\, D \in \mathcal{D}_d,\ \left(|D \cap S| < \frac{n}{d+1} \Longrightarrow c \notin D \right) \\
& \iff \quad \forall\, D \in \mathcal{D}_d,\ \left(\left|(\mathbb{R}^d \setminus D) \cap S\right| > n - \frac{n}{d+1} \Longrightarrow c \notin D \right) \\
& \iff \quad \forall\, D' \in \mathcal{D}'_d,\ \left(|D' \cap S| > \frac{nd}{d+1} \Longrightarrow c \in D' \right)
\end{aligned}$$

15.b Pour i compris entre 1 et $d+1$, $C_i = \text{conv}(D_i \cap S)$ pour un certain demi-espace ouvert D_i. Notons $A_i = D_i \cap S$: chaque partie A_i est de cardinal strictement supérieur à $\dfrac{nd}{d+1}$. Or pour trois ensembles finis X, Y, S tels que $X \subset S$ et $Y \subset S$, nous avons $|X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y| \geq |X| + |Y| - |S|$. Nous obtenons donc par une récurrence immédiate :

$$\left| \bigcap_{i=1}^{d+1} A_i \right| \geq \sum_{i=1}^{d+1} |A_i| - d\,|S| > (d+1)\frac{nd}{d+1} - nd = 0$$

donc les A_i, et à fortiori les C_i, sont d'intersection non vide.

15.c Soit S un ensemble de cardinal $n \geq d+1$. Remarquons tout d'abord que $\mathcal{C}(S)$ est non vide, puisqu'il contient S : S étant fini, il est borné et il existe un demi-plan ouvert contenant S ; comme $n \geq d+1$, $S \in \mathcal{C}(S)$. D'autre part, $\mathcal{C}(S)$ est fini, car contenu dans $\mathcal{P}(S)$. Notons $\mathcal{C}(S) = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$ où $N = |\mathcal{C}(S)|$.

Si $N \leq d+1$, $\displaystyle\bigcap_{C \in \mathcal{C}(S)} C \neq \emptyset$ d'après le b), en posant $C_i = C_N$ pour $N+1 \leq i \leq d+1$.

Sinon, $\displaystyle\bigcap_{C \in \mathcal{C}(S)} C \neq \emptyset$ d'après 14a) et 15b).

Un élément c de cette intersection est alors un point central de S, puisqu'il vérifie la propriété de la question a) : si D est un demi-espace ouvert tel que $|D \cap S| > \dfrac{dn}{d+1}$, alors $\mathrm{conv}(D \cap S) \in \mathcal{C}(S)$, donc $c \in \mathrm{conv}(D \cap S)$, ce qui impose que $c \in D$ car D est une partie convexe contenant $D \cap S$.

16 Soit n_0 la partie entière supérieure de εn. Pour simplifier la rédaction, notons T_i l'ensemble T au début de la $(i+1)$-ème boucle et $\mathcal{T}_i$ l'ensemble des triangles de S qui n'entourent aucun point de T_i. Au début du calcul, $T_0 = \emptyset$ et $\mathcal{T}_0$ est de cardinal $\dbinom{n}{3}$. Pour $i \geq 1$, Si T_{i-1} n'est pas ε-fin pour S relativement à $\mathcal{C}_2$, on choisit $C_i \in \mathcal{C}_2$ tel que $|C_i \cap S| \geq \varepsilon |S|$ et $C_i \cap T = \emptyset$, puis on ajoute c_i à T, où c_i est un point central de $C_i \cap S$. En notant k_i le cardinal de $C_i \cap S$, le lemme de sélection assure qu'au moins $\dfrac{2}{9}\dbinom{k_i}{3}$ triangles de $C_i \cap S$ entourent c_i. Ces triangles appartiennent donc à $\mathcal{T}_{i-1}$ mais pas à $\mathcal{T}_i$ (comme C_i est convexe, un point qui entoure un triangle de C_i est élément de C_i). Comme $k_i \geq n_0$, on a :

$$0 \leq |\mathcal{T}_i| \leq |\mathcal{T}_{i-1}| - \frac{2}{9}\binom{k_i}{3} \leq |\mathcal{T}_{i-1}| - \frac{2}{9}\binom{n_0}{3} \leq |T_0| - \frac{2i}{9}\binom{n_0}{3} \leq \binom{n}{3} - \frac{2i}{9}\binom{n_0}{3}$$

Ceci prouve que l'algorithme termine et que le nombre de passage dans la boucle, i.e. le cardinal N de T à la fin du calcul, vérifie :

$$N \leq \frac{9n(n-1)(n-2)}{2n_0(n_0-1)(n_0-2)} \leq \frac{9(n-1)(n-2)}{2\varepsilon(\varepsilon n-1)(\varepsilon n-2)}.$$

Quand n tend vers l'infini, ce majorant tend vers $\dfrac{9}{2\varepsilon}$.