

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts II, 2025, filière PSI.
Version provisoire du 28/04/2025

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Modèle SIR pour la propagation d'épidémie et séries de Dirichlet

Partie I : Linéarisation de (E)

(1) Le problème de Cauchy (C_l) s'écrit

$$\begin{cases} u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = -\frac{1}{2} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Son unique solution est la fonction $u : x \mapsto e^{-x/2} - 1$. Cette fonction est décroissante sur \mathbb{R}^+ .

(2) Une solution constante de (E_l) de valeur γ vérifie

$$\gamma + 1 = \frac{1}{2}(1 + \gamma).$$

L'unique solution de cette équation est $\gamma = -1$.

On observe que l'on a bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x/2} - 1) = -1 = \gamma.$$

(3) Comme y est solution de (E), on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \frac{1}{2}e^c - c - 1 \in \mathbb{R}.$$

Or, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = +\infty$ (ceci se démontre, par exemple dans le cas $l > 0$, en disant qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $y'(x) \geq l/2$ pour $x \geq \alpha$ puis en intégrant que

$$y(x) \geq y(\alpha) + \frac{l(x - \alpha)}{2}$$

pour $x \geq \alpha$).

Comme y possède une limite finie en $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0 = \frac{1}{2}e^c - c - 1,$$

ce qui montre que

$$c + 1 = \frac{1}{2}e^c,$$

et donc que la fonction constante égale à c est solution de (E).

Soit

$$x \mapsto h(x) = \frac{1}{2}e^x - x - 1.$$

La fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , strictement décroissante sur $] - \infty, \ln(2)[$, strictement croissante sur $]\ln(2), +\infty[$. De plus,

$$h(0) = -1/2 < 0, h(\ln 2) = -\ln(2) < 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty,$$

la dernière limite s'obtenant par croissance comparées.

Le théorème de la bijection implique que h s'annule exactement une fois sur $] - \infty, \ln(2)[$ en une valeur $c_1 < 0$ et s'annule exactement une fois sur $]\ln 2, +\infty[$ en une valeur $c_2 > \ln 2 > 0$.

Comme y est décroissante de limite c en $+\infty$ et comme $y(0) = 0$, on a $c \leq 0$ ce qui à l'aide de ce qui précède montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c = c_1$.

Partie II : Séries de Dirichlet

(4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lambda_n^k a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{n^k}{2^n}\right).$$

Or, par croissances comparées, on a

$$\frac{n^k}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$\lambda_n^k a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par domination par une série de Riemann convergente, la série $\sum \lambda_n^k a_n$ est absolument convergente donc convergente, ce qui montre que les b_k sont bien définis.

(5) La suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ étant strictement croissante de premier terme nul, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, 0 \leq |f_n(x)| \leq |a_n| \leq \frac{M}{2^n}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Comme la série $\sum \frac{M}{2^n}$ est convergente, la série $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ par domination. On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ et les f_n étant continues sur \mathbb{R}^+

que la somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur \mathbb{R}^+ comme limite uniforme de fonctions continues.

(6) On a de suite $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + b_0$.

De plus, comme $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ , on peut appliquer le théorème de la double-limite. Comme $\lambda_n > 0$ pour $n \geq 1$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n e^{-\lambda_n x}) = a_0.$$

(7) Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n^{(k)}(x)| = |a_n \lambda_n^k| e^{-\lambda_n x} \leq \frac{M}{2^n} \lambda_n^k$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n^{(k)}(x)| = |a_n \lambda_n^k| e^{-\lambda_n x} \leq |a_n| \lambda_n^k.$$

Or, on a vu précédemment que $\sum |a_n| \lambda_n^k$ est convergente. Ceci montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ , donc uniformément sur \mathbb{R}^+ . Le théorème de \mathcal{C}^k

dérivation des séries de fonctions montre alors que f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R}^+ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^k \lambda_n^k e^{-\lambda_n x} = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^k e^{-\lambda_n x}.$$

En particulier,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n^k = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^k = (-1)^k b_k.$$

(8) Comme f est nulle, on a

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$. Soit alors

$$p = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \neq 0\}.$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0.$$

En simplifiant par $e^{-\lambda_p x}$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_{n=p}^{+\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_p)x} = 0.$$

Or, $\lambda_n > \lambda_p$ pour tout $n > p$ et par le théorème de la double-limite, on peut à nouveau passer à la limite quand x tend vers $+\infty$. On obtient alors

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=p}^{+\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_p)x} = \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_p)x}) = a_p.$$

Ceci donne donc la contradiction et on a donc bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0}.$$

Partie III : Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

(9) Comme $y(0) = 0$, on a d'après (6) : $0 = a_0 + b_0$.

Par ailleurs, toujours d'après (6), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c_1 = a_0$. Et donc

$$\boxed{a_0 = c_1 \text{ et } b_0 = -c_1}.$$

(10) On a en évaluant en 0,

$$y'(0) + 1 = \frac{1}{2}$$

et d'après (7), $y'(0) = -b_1$. Finalement

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2}}.$$

(11) On a pour tout x , $g'(x) = y'(x)g(x)$. A l'aide de la formule de Leibniz appliquée à l'ordre $k-1$, il vient

$$g^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} y^{(j+1)}(x) g^{(k-1-j)}(x) \stackrel{=}{=} \sum_{i=j+1}^k \binom{k-1}{i-1} y^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x).$$

Définissons d_k par la relation $g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k$.

On a bien $d_0 = 1$ et en évaluant en 0 l'identité précédente, à l'aide de (7), il vient

$$(-1)^k d_k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} (-1)^i b_i (-1)^{k-i} d_{k-i}$$

et donc

$$d_k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

(12) En dérivant (E) k fois, on a

$$y^{(k+1)} + y^{(k)} = \frac{1}{2} g^{(k)}$$

et en évaluant en 0,

$$-b_{k+1} + b_k = \frac{1}{2} d_k.$$

Partie IV : Approximation de la solution y

(13) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} |y_N(x) - y(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} \\ &= \frac{M}{2^{N+1}} \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= \frac{M}{2^N}. \end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, il vient

$$\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{M}{2^N}.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = 0,$$

ce qui signifie que y_N converge uniformément vers y sur \mathbb{R}^+ .

Soit $\varepsilon > 0$ et $J_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$.

Pour $x \geq \varepsilon$, on a en reprenant le calcul précédent

$$|y_N(x) - y(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \varepsilon} \leq e^{-\lambda_{N+1} \varepsilon} |a_n| \leq \frac{M e^{-\lambda_{N+1} \varepsilon}}{2^N},$$

et donc

$$\|y_N - y\|_{\infty, J_\varepsilon} \leq \frac{M e^{-\lambda_{N+1} \varepsilon}}{2^N}$$

ce qui est plus fin que l'estimation précédente puisque $\lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-\lambda_{N+1} \varepsilon} = 0$.

(14) On a $VA = B$ avec

$$V = (v_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N} \text{ et } v_{i,j} = \lambda_j^{i-1}.$$

(15) Les λ_j étant distincts, la matrice V est une matrice de Vandermonde inversible donc le système $VA = B$ possède $A = V^{-1}B$ comme unique solution.

Partie V : Modèle de propagation d'épidémie SIR

(16) Si $S_0 = 0$, alors

$$\boxed{(x \mapsto S(x) = 0, x \mapsto I(x) = I_0 e^{-x}, x \mapsto R(x) = 1 - I_0 e^{-x})}$$

est solution "évidente" du problème (le fait que S soit constante égale à 0 est biologiquement évident et le reste en découle).

(17) Supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 > 0$ tel que $S(x_1) = 0$. Notons $I_1 = I(x_1)$ et $R_1 = 1 - I(x_1) = R(x_1)$. Alors

$$(x \mapsto \tilde{S}(x) = 0, x \mapsto \tilde{I}(x) = I_1 e^{-(x-x_1)}, x \mapsto R(x) = 1 - I_1 e^{-(x-x_1)})$$

est solution du système différentiel et coïncide avec (S, I, R) en x_1 . D'après le Théorème 1 admis par l'énoncé, $(S, I, R) = (\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{R})$ et en particulier, $\tilde{S}(0) = 0 = S(0)$, ce qui est absurde. On en déduit que $\boxed{S \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}^+}$. Etant continue et > 0 en 0, le théorème des valeurs

intermédiaires implique que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, S(x) > 0}$.

(18) On déduit de (17) et du système que

$$\frac{S'}{S} = -I$$

puis que

$$\left(\frac{S'}{S}\right)' = -I' = -IS + I = S' + I = S' - \frac{S'}{S}$$

et donc que

$$\boxed{-\left(\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}}.$$

(19) On a d'une part

$$h(0) = \ln(2S(0)) = \ln 1 = 0$$

et d'autre part

$$h'(x) + h(x) + 1 = \frac{S'(x)}{S(x)} + \ln(2S(x)) + 1.$$

Or, en intégrant la relation obtenue en (18) entre 0 et x , il vient

$$\frac{S'(0)}{S(0)} - \frac{S'(x)}{S(x)} = S(0) - S(x) + \ln(S(x)) - \ln(S(0)) = \frac{1}{2} - S(x) + \ln(2S(x)).$$

Or, $S'(0) = -I(0)S(0) = -\frac{1}{4}$ d'où

$$-\frac{1}{2} - \frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{1}{2} - S(x) + \ln(2S(x))$$

et donc

$$\frac{S'(x)}{S(x)} + \ln(2S(x)) + 1 = S(x) = \frac{1}{2} e^{h(x)}.$$

En combinant les relations précédentes, on obtient bien

$$h'(x) + h(x) + 1 = \frac{1}{2} e^{h(x)}$$

et $\boxed{h \text{ est bien solution de } (C)}$.

(20) On a par définition de S_N et S ,

$$S_N - S = \frac{1}{2} (e^{y_N} - e^h).$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc

$$|S_N - S| \leq \frac{1}{2} |y_N - h| \sup_{[y_N, h]} \exp.$$

Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |y_N(x)| \leq \sum_{n \geq N+1} \frac{M}{2^n} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{M}{2^n} = 2M$$

donc $|y_N| \leq 2M$ et par passage à la limite, $|h| \leq 2M$ (on rappelle que d'après (19), h est égale à la fonction y considérée dans les parties précédentes). On en déduit que

$$\sup_{[y_N, h]} \exp \leq e^{2M}.$$

En utilisant (13), on obtient finalement

$$\|S_N - S\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{1}{2} \|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}^+} e^{2M} \leq \frac{1}{2} \frac{M}{2^N} e^{2M} = \frac{M e^{2M}}{2^{N+1}}$$

et qu'en particulier (S_N) converge uniformément vers S sur \mathbb{R}^+ quand N tend vers $+\infty$.

Partie VI : Modèle probabiliste

(21) La probabilité $p(i)$ est égale à la probabilité que l'une au moins des K personnes rencontrées fasse partie des i personnes infectées. Donc $1 - p(i)$ est la probabilité que les K personnes rencontrées fasse partie des $M - i - 1$ personnes non infectées (en dehors de l'individu concerné). On a donc

$$1 - p(i) = \frac{\binom{M-i-1}{K}}{\binom{M-1}{K}}$$

et donc

$$p(i) = 1 - \frac{\binom{M-i-1}{K}}{\binom{M-1}{K}}.$$

(22) A n fixé, la famille d'événements

$$\left(\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) \right) \right)_{(s, i, r) \in E}$$

est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet donc d'écrire que pour tout k ,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{(s, i, r) \in E} \mathbb{P}(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)).$$

On a alors par définition de l'espérance et Fubini pour des sommes finies :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^M k \sum_{(s, i, r) \in E} \mathbb{P}(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \\ &= \sum_{(s, i, r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right) \\ &= \sum_{(s, i, r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(Z = k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)). \end{aligned}$$

- (23) Toutes les variables aléatoires mentionnées ont un univers-image fini et sont donc d'espérance finie.
(24) Pour chaque individu j de la population, on note $X_{j,n}$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il est rétabli le jour n et 0 sinon. On note aussi $Y_{j,n}$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il est infecté le jour n et 0 sinon.

On a alors

$$(X_{j,n+1} = 1) = (X_{j,n} = 1) \cup (Y_{j,n} = 1, X_{j,n+1} = 1)$$

et cette réunion est disjointe. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{j,n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{j,n} = 1) + \mathbb{P}(Y_{j,n} = 1, X_{j,n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{j,n} = 1) + \mathbb{P}(X_{j,n+1} = 1 \mid Y_{j,n} = 1)\mathbb{P}(Y_{j,n} = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{j,n} = 1) + \rho\mathbb{P}(Y_{j,n} = 1). \end{aligned}$$

De là, comme

$$\tilde{R}_n = \sum_{j=1}^M X_{j,n} \text{ et } \tilde{I}_n = \sum_{j=1}^M Y_{j,n},$$

on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta\tilde{R}_n] &= \mathbb{E}[\tilde{R}_{n+1}] - \mathbb{E}[\tilde{R}_n] \\ &= \sum_{j=1}^M \mathbb{P}(X_{j,n+1} = 1) - \sum_{j=1}^M \mathbb{P}(X_{j,n} = 1) \\ &= \sum_{j=1}^M \rho\mathbb{P}(Y_{j,n} = 1) \\ &= \rho\mathbb{E}[\tilde{I}_n]. \end{aligned}$$

- (25) La quantité $-\tilde{S}_{n+1} + \tilde{S}_n$ représente le nombre de personnes qui ont été infectées entre le jour $n+1$ et le jour n . Sachant que $\tilde{S}_n = s$ et $\tilde{I}_n = i$, chacune de ces s personnes est infectée avec probabilité $p(i)$. La quantité $-\tilde{S}_{n+1} + \tilde{S}_n$ s'apparente donc au nombre de "succès" lors de la répétition de s expériences de Bernoulli de paramètre $p(i)$. On a donc

$$\mathbb{P}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n = -k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) = \binom{s}{k} (p(i))^k (1 - p(i))^{s-k}.$$

- (26) On a en utilisant (22) avec $Z = -\tilde{S}_{n+1} + \tilde{S}_n$ puis (25) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta\tilde{S}_n] &= - \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n = -k \mid (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \\ &= - \sum_{(s,i,r) \in E} \left(\sum_{k=0}^M k \binom{s}{k} (p(i))^k (1 - p(i))^{s-k} \right) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^M k \binom{s}{k} (p(i))^k (1 - p(i))^{s-k}$$

est l'espérance d'une loi binomiale de paramètre $(s, p(i))$ donc

$$\sum_{k=0}^M k \binom{s}{k} (p(i))^k (1 - p(i))^{s-k} = sp(i).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[\Delta\tilde{S}_n] = - \sum_{(s,i,r) \in E} sp(i) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)),$$

qui est, par définition de l'espérance, égal à $-\mathbb{E}(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n))$. Remarquons que $p(\tilde{I}_n)$ est bien une variable aléatoire grâce à (21). On a bien montré que

$$\mathbb{E} \left[\Delta \tilde{S}_n \right] = -\mathbb{E}(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)).$$

Comme

$$\Delta \tilde{S}_n + \Delta \tilde{I}_n + \Delta \tilde{R}_n = 0,$$

on a

$$\mathbb{E} \left[\Delta \tilde{I}_n \right] = \mathbb{E}(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)) - \rho \mathbb{E}(\tilde{I}_n).$$