

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1)

$$\begin{aligned} ze^z = \omega &\iff Re^{i\theta} e^{R\cos\theta + iR\sin\theta} = re^{i\alpha} \\ &\iff Re^{R\cos\theta} e^{i(\theta + R\sin\theta)} = re^{i\alpha} \\ &\iff \begin{cases} Re^{R\cos\theta} = r \\ \theta + R\sin\theta \equiv \alpha [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

- 2) $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \varphi(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \varphi(\theta) = 0$ car $\alpha - \theta > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.
 φ étant continue sur $]0, \pi[$, alors $]0, +\infty[\subset \varphi(]0, \pi[)$, en fait il y'a égalité car $\varphi > 0$, et $r > 0$ possède au moins un antécédent $\theta \in]0, \pi[$.

- 3) 0 est l'antécédent du nombre complexe 0 par g .

Supposons que $\omega \in \mathbb{C}^*$, son antécédent z par g s'il existe est $\neq 0$, on peut mettre z et ω sous la forme $z = Re^{i\theta}$, $\omega = re^{i\alpha}$ les inconnues sont $R > 0$ et $\theta \in]0, \pi[$.

$$ze^z = \omega \text{ est équivalente à } \begin{cases} Re^{R\cos\theta} = r \\ \theta + R\sin\theta \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

$\exists \theta \in]0, \pi[$ tel que $\varphi(\theta) = r$ c'est la question précédente. Posons alors $R = \frac{\alpha - \theta}{\sin\theta}$,

Ces deux réels vérifient bien le système précédent, par conséquent z existe et l'application g est surjective de D dans $\mathbb{C}$.

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

- 4) Soit f l'endomorphisme canoniquement à N , alors $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$, donc $\exists x \in \mathbb{C}^n$ telle que $f^{n-1}(x) \neq 0$, supposons par l'absurde que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est liée, soit donc les complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$, l'ensemble $J = \{i \in [0, n-1] \cap \mathbb{N} / a_i \neq 0\}$ est non vide et soit j son plus petit élément.

L'égalité $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$ s'écrit $\sum_{i=j}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$, en composant par f^{n-j-1} , on obtient $a_j f^{n-1}(x) = 0$, alors $a_j = 0$ ce qui est absurde avec $j \in J$, la famille est donc libre.

- 5) La famille $(f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$ est libre c'est donc une base de $\mathbb{C}^n$.

La matrice de l'endomorphisme f dans cette base est $J_n(0)$, donc N est semblable à $J_n(0)$.

- 6) $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent donc $I_n = e^{J_n(0)-J_n(0)} = e^{J_n(0)} e^{-J_n(0)}$, ainsi $e^{J_n(0)}$ est inversible et $(e^{J_n(0)})^{-1} = e^{-J_n(0)}$.

$$e^{J_n(0)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J_n(0))^k}{k!} \text{ car } J_n(0) \text{ est nilpotente d'indice } n \text{ d'après la question 5).}$$

Alors $e^{J_n(0)}$ est un polynôme en $J_n(0)$ donc commutent avec $J_n(0)$, alors $(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = (J_n(0))^n (e^{J_n(0)})^n = 0$.

Si on suppose que $(J_n(0)e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$ alors $(J_n(0))^{n-1} (e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$ et comme $e^{J_n(0)}$ est inversible alors $(J_n(0))^{n-1} = 0$, absurde : donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .

$$7) P e^{J_n(0)} P^{-1} = P \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J_n(0))^k}{k!} P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} P \frac{(J_n(0))^k}{k!} P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(P J_n(0) P^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(P J_n(0) P^{-1})^k}{k!} = e^{P J_n(0) P^{-1}}.$$

Si $\bar{N}$ existe alors elle est nilpotente d'indice n , En effet :

L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \longmapsto \bar{N}M$ est continue, car linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension fini, donc :

$$\bar{N}e^{\bar{N}} = \bar{N} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{\bar{N}^k}{k!} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{N} \sum_{k=0}^p \frac{\bar{N}^k}{k!} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{\bar{N}^k}{k!} \bar{N} = e^{\bar{N}} \bar{N}$$

$e^{\bar{N}}$ est inversible et son inverse est $e^{-\bar{N}}$.

$(\bar{N}e^{\bar{N}})^n = \bar{N}^n e^{n\bar{N}} = 0$, comme $e^{n\bar{N}}$ est inversible, alors $\bar{N}^n = 0$.

Supposons que $\bar{N}^{n-1} = 0$, alors $\bar{N}^{n-1} (e^{\bar{N}})^{n-1} = 0 = (\bar{N}e^{\bar{N}})^{n-1} = (J_n(0))^{n-1}$, ce qui est absurde.

Donc $\bar{N}$ est semblable à $J_n(0)$, alors il existe P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\bar{N} = P J_n(0) P^{-1}$, l'inconnue devient P .

L'équation $\bar{N}e^{\bar{N}} = J_n(0)$ est équivalente à $P J_n(0) P^{-1} P e^{J_n(0)} P^{-1} = J_n(0)$ c'est à dire $P J_n(0) e^{J_n(0)} P^{-1} = J_n(0)$, de la question 6) la matrice $J_n(0) e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n , donc semblable à $J_n(0)$ alors P existe.

- 8) Avec la partie A) question 3, il existe $\mu \in D$, tel que $g(\mu) = \lambda$, c'est à dire $\mu e^\mu = \lambda$, le réel $\mu \neq 0$ donc μ appartient au demi plan ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$, alors $\mu \neq -1$.

$$J_n(\mu) e^{J_n(\mu)} = (\mu I_n + J_n(0)) e^{\mu I_n + J_n(0)} = \mu e^\mu e^{J_n(0)} + J_n(0) e^\mu e^{J_n(0)} = \mu e^\mu \left(I_n + J_n(0) + (J_n(0))^2 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(J_n(0))^{k-2}}{k!} \right) + J_n(0) e^\mu \left(I_n + J_n(0) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(J_n(0))^{k-1}}{k!} \right)$$

$$= \lambda I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 \left(\mu e^\mu \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(J_n(0))^{k-2}}{k!} + e^\mu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(J_n(0))^{k-1}}{k!} \right)$$

Avec $P(X) = \left(\mu e^\mu \sum_{k=2}^{n-1} \frac{X^{k-2}}{k!} + e^\mu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!} \right)$ le résultat est vrai.

9) Les deux matrices $J_n(0)$ et $(J_n(0))^2 P(J_n(0))$ commutent, donc

$$((\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((\mu + 1)e^\mu J_n(0))^k (J_n(0))^{2n-2k} (P(J_n(0)))^{n-k}$$

Le nombre $2n - 2k + k = 2n - k \geq n$ pour tout $k \in [0, n] \cap \mathbb{N}$, donc cette somme est nulle puisque tous ses termes sont nuls.

$$((\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)))^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} ((\mu + 1)e^\mu J_n(0))^k (J_n(0))^{2n-2-k} (P(J_n(0)))^{n-1-k}$$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf le terme qui correspond à $k = n - 1$ et $(J_n(0))^{n-1} P(J_n(0)) \neq 0$.

Remarque : la matrice $P(J_n(0))$ est triangulaire supérieure et le terme de sa diagonale est $\mu e^\mu + e^\mu = (\mu + 1)e^\mu \neq 0$ (c'est le coefficient constant du polynôme P), donc inversible.

Alors la matrice $(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0))$ est nilpotente d'ordre n . donc semblable à $J_n(0)$, donc $\exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0)) = Q J_n(0) Q^{-1}.$$

$$\text{Alors } J_n(\mu) e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + Q J_n(0) Q^{-1} = Q(\lambda I_n + J_n(0)) Q^{-1} = Q J_n(\lambda) Q^{-1}$$

$$\text{Donc } J_n(\lambda) = Q^{-1} J_n(\mu) Q Q^{-1} e^{J_n(\mu)} Q = Q^{-1} J_n(\mu) Q e^{Q^{-1} J_n(\mu) Q} = M e^M, \text{ avec } M = Q^{-1} J_n(\mu) Q$$

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

10) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice N , par la même méthode que celle de B.4), il existe $x \in \mathbb{C}^n$, telle que $(f^{p-1}(x), \dots, x)$ est libre, on la complète par le théorème de la base incomplète, en une base $\mathcal{B}'$, dans cette base la matrice de f est de la forme $A = \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Les matrices A et N sont donc semblables.

11) T_X est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux à 1, $\det T_X = 1$, donc inversible.

Le produit de T_X et de $\begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$ donne l'identité alors c'est son inverse.

$$A' = T_X A T_X^{-1} = \begin{pmatrix} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ 0 & C \end{pmatrix}. \text{ On prend } Y = -J_p(0)X + B + XC \text{ et } X = Z.$$

- 12) C'est simple de vérifier que $J_n(0)X = \begin{pmatrix} X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ 0 \end{pmatrix}$, en posant $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$ l'équation $Y = -J_p(0)X + B + XC$ peut se traduire par
- $$\begin{cases} Y_1 = -X_2 + B_1 + X_1 C \\ \vdots \\ Y_{n-1} = -X_n + B_{n-1} + X_{n-1} C \\ Y_n = 0 + B_n + X_n C \end{cases}$$

Soit $X_1 = 0$ par exemple, alors on peut choisir X_2 pour que $Y_1 = 0$.

X_2 est fixé alors on peut choisir X_3 pour que $Y_2 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir X_{n-1} , on peut choisir X_n pour que $Y_{n-1} = 0$, conclusion on peut choisir X pour que $Y_1 = \dots = Y_{n-1} = 0$, ainsi le vecteur $Y = 0$ sauf éventuellement Y_n .

- 13) Les matrices N , A et A' sont semblables, donc A' est nilpotente, et si P est inversible telle que $N = PA'P^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $N^k = 0 \iff A'^k = 0$.

Alors A' est nilpotente d'indice n .

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A' et $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soit $i \in \{p+1, \dots, n\}$ posons $\text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) = F$. De la forme de A' , on peut poser $f(e_i) = y_i e_p + x$, où $y_i \in \mathbb{C}$ et $x \in F$.

Par récurrence on montre que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}$ $f^k(F) \subset \text{vect}(e_{p-k+1}, \dots, e_n)$, alors $f^p(e_i) = y_i f^{p-1}(e_p) + f^{p-1}(x)$ c'est à dire $0 = y_i e_1 + f^{p-1}(x)$, et $f^{p-1}(x) \in \text{vect}(e_2, \dots, e_n)$, donc $y_i = 0$ par conséquent la dernière ligne $(y_{p+1}, \dots, y_n)$ de Y est nulle, alors $Y = 0$.

- 14) On raisonne par récurrence sur n .

Pour $n = 1$ rien à faire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat est vrai pour toute matrice d'ordre n , soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $p_1 \leq n+1$.

Si $p_1 = n+1$, on applique B.5), et A est semblable à $J_{n+1}(0)$.

Si $1 \leq p_1 < n+1$, des questions précédente A est semblable à A' qui de la forme $A' = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, comme A est nilpotente d'indice $n+1$, alors A' est

nilpotente d'indice $n+1$, donc $C^{n+1} = 0$ ainsi C est nilpotente par ailleurs son ordre est $n+1 - p_1 \leq n$, on applique l'hypothèse de récurrence sur C il existe $p_2, \dots, p_r$ des entiers naturels non nuls tels que C est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_2}(0) & & & (0) \\ & J_{p_3}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

Si Q désigne la matrice inversible telle que $C = QJQ^{-1}$, alors

$$A' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ est de la forme donnée et elle est semblable à A . le résultat est donc vrai pour toute matrice A nilpotente.

D. Représentation Ae^A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- 15) $\chi_A = \prod_{k=1}^s (\lambda_k - X)^{\alpha_k}$, le théorème de Cayley Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux donne :

$$\mathbb{C}^n = \ker \theta = \bigoplus_{k=1}^s \ker(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k} = \bigoplus_{k=1}^s F_k$$

Les espaces F_k sont tous stables par f car f et $(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}$ commutent, si on considère f_k la restriction de f sur F_k , alors f_k est nilpotent, en effet :

Pour k fixé entre 1 et s , Soit $x \in \ker(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}$, alors

$(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}(x) = 0$ qui se traduit par $(f_k - \lambda_k id_{F_k})^{\alpha_k}(x) = 0$ donc $f_k - \lambda_k id_{F_k}$ est nilpotent.

Alors le polynôme $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ est annulateur de f_k , par conséquent la seule valeur propre de f_k est λ_k , donc χ_{f_k} est de la forme $(\lambda_k - X)^{\beta_k}$ où $\beta_k = \dim F_k$.

Si N_k est la matrice de $f_k - \lambda_k id_{F_k}$ dans une base $\mathcal{B}_k$ de F_k .

On a $f_k = \lambda_k id_{F_k} + f_k - \lambda_k id_{F_k}$, alors la matrice de f_k dans la base $\mathcal{B}_k$ est $\lambda_k I_{\beta_k} + N_k$.

La matrice de f dans $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^s \mathcal{B}_k$ adaptée à la décomposition précédente

est de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\beta_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{\beta_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\beta_s} + N_s \end{pmatrix}.$$

D'autre part $\chi_A = \prod_{k=1}^s \chi_{f_k} = \prod_{k=1}^s (\lambda_k - X)^{\beta_k} = \prod_{k=1}^s (\lambda_k - X)^{\alpha_k}$ l'unicité de la décomposition d'un polynôme en facteurs irréductible donne $\forall k \in \{1, \dots, s\}, \beta_k = \alpha_k$, d'où la question.

16) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donné, par application de la question précédente A est semblable A' . Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, la matrice N_i de la question précédente est nilpotente, on peut appliquer la question 14) donc semblable

$$\text{à } J_i = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix} \text{ avec } p_1 + \dots + p_r = \alpha_i, \text{ donc } \lambda_i I_{\alpha_i} + J_i =$$

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_i) & & (0) \\ & J_{p_2}(\lambda_i) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(\lambda_i) \end{pmatrix}, \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, r\}, \exists M_j \in \mathcal{M}_{p_j}(\mathbb{C}) \text{ telle}$$

que $J_{p_j}(\lambda_i) = M_j e^{M_j}$ et ceci par application de la question 9), alors :

$$\lambda_i I_{\alpha_i} + J_i = \begin{pmatrix} M_1 e^{M_1} & & (0) \\ & M_2 e^{M_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & M_r e^{M_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & M_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{M_1} & & (0) \\ & e^{M_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & e^{M_r} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si on pose } L_i = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & M_r \end{pmatrix} \text{ alors } e^{L_i} = \begin{pmatrix} e^{M_1} & & (0) \\ & e^{M_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & e^{M_r} \end{pmatrix},$$

alors $\lambda_i I_{\alpha_i} + J_i = L_i e^{L_i}$, par conséquent N_i est semblable à $L_i e^{L_i}$ le même

$$\text{processus donne } A \text{ est semblable à } M' e^{M'} \text{ où } M' = \begin{pmatrix} L_1 & & (0) \\ & L_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & L_s \end{pmatrix}.$$

$\exists P$ inversible telle que $A = P M' P^{-1} P e^{M'} P^{-1} = M e^M$, avec $M = P M' P^{-1}$ la surjectivité de l'application en découle.

FIN DU PROBLÈME

sadikoulmeki@yahoo.fr