

I Préliminaires

Q1

a) On a $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$ pour tous x et t réels.

D'où l'existence de $f * g$ par comparaison puisque f est intégrable

b) L'application $x \rightarrow f(t)g(x-t)$ est continue pour tout t réel, et de plus on a la condition de domination donnée par a) donc $f * g$ est continue sur \mathbb{R}

c) On fait le changement de variable $u = x - t = h(t)$. h est strictement décroissante de classe C^1 , réalise un difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et $|h'(t)| = 1$. On obtient donc ;

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = g * f(x)$$

(et l'on obtient ainsi la convergence de l'intégrale définissant $g * f$)

Q2

Soit (x_n) une suite réelle tendant vers $+\infty$. On pose $u_n = f * g(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x_n - t)dt$

On a la condition de domination $|g(t)f(x_n - t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$ et pour tout t réel fixé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t)g(x_n - t) = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f * g(x_n) = 0$$

Ceci étant valable pour toute suite réelle tendant vers $+\infty$, on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0}$

(caractérisation séquentielle de la limite)

On a un raisonnement analogue en $-\infty$

Q3

Si f et g sont dans $P(\mathbb{R})$, $f * g$ existe et est continue par le même argument qu'en Q1

On a $|f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$ pour tous x et t réels donc $|f * g(x)| \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \|g\|_\infty$

$f * g$ est positive par positivité de l'intégrande

Enfin, en posant $F(x, t) = f(t)g(x-t)$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)dt$ converge pour tout réel x

. D'autre part l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)dx$ converge pour tout t en posant $u = x - t$ (puisque g est intégrable), d'où (1) puisque F est positive

D'autre part $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)du = f(t)$. Donc

$t \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)dx$ est intégrable, d'où (3)

On admet (2).

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dx \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Tout est donc dit

II Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$

Q4

On a d'après la question 3 $|f * u(x)| \leq \|u\|_\infty$ d'où $\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$

Q5

$$T_f T_g(u) = T_f(g * u) = f * (g * u) = (f * g) * u = (g * f) * u = \underline{T_g T_f(u)}$$

Q6

Comme $T_{f_1} T_{g_2} = T_{g_2} T_{f_1}$ on a:

$$\begin{aligned} \|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_\infty &= \|T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) - (T_{g_1} - T_{f_1})(T_{g_2}(u))\|_\infty = \|T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))\|_\infty \\ &\leq \|T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))\|_\infty + \|T_{g_2}((T_{g_1} - T_{f_1})(u))\|_\infty \leq \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty + \|(T_{g_1} - T_{f_1})(u)\|_\infty \end{aligned}$$

Q7

On raisonne par récurrence sur n à partir de la question précédente

III Lois normales

Remarque: g_h est la densité de la loi normale $N(0, h)$

Q8

a) g_h est continue positive bornée

On effectue dans $\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x) dx$ le changement de variables $u = \frac{x}{h} = \varphi(x)$. φ est une

bijection de classe C^1 de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et l'on obtient l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2h}}}{\sqrt{2\pi}} dx$

qui converge et vaut 1, d'où la convergence et la valeur $\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x) dx = 1$

b) $x \rightarrow x g_h(x)$ est continue et impaire. De plus $x g_h(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où l'intégrabilité

sur \mathbb{R}

$$\text{On a donc } \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x g_h(x) dx = 0}$$

c) $x \rightarrow x^2 g_h(x)$ est continue et paire. De plus $x^2 g_h(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où l'intégrabilité sur

\mathbb{R}

En effectuant une intégration par parties, on a pour

$$a > 0 : \int_0^a x^2 g_h(x) dx = \left[-\frac{h}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2h}} \right]_0^a + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2h}} dx$$

Et en faisant tendre a vers $+\infty$: $\int_0^{+\infty} x^2 g_h(x) dx = \frac{h^2}{2}$. Par parité: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x) dx = h^2}$

Q9

On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que $(g_h)^{*p} = g_{\sqrt{p}h}$ et que, d'après l'associativité de $*$: $(T g_h)^p = T_{g_h^{*p}}$, d'où le résultat.

IV Convergence faible sur $P(\mathbb{R})$

Q10

g_h est de classe C^∞ comme composée de fonctions de classe C^∞

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k , il existe un polynôme $P_{k,h}$ de degré k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \left(\frac{d^k}{dx^k} g_h \right)(x) = P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

C'est vrai pour $k = 0$ avec $P_{0,h}(x) = 1$

On suppose la propriété vraie à l'ordre $k \in \mathbb{N}$. On obtient alors par dérivation:

$$\forall x \in \mathbb{R} \left(\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} g_h \right)(x) = (P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k,h}(x)) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

On pose alors $P_{k+1,h}(x) = (P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k,h}(x))$ et $P_{k+1,h}$ est bien un polynôme

(opérations sur les polynômes) de degré $k + 1$ puisque $\deg(\frac{x}{h^2} P_{k,h}(x)) = k + 1$ et $\deg P'_{k,h} \leq k - 1$.

Q11

La fonction $u \rightarrow P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$ est continue et de limite nulle en $\pm\infty$, donc est bornée sur \mathbb{R} .

En particulier, il existe $M > 0$ tel que pour tout réels x et t : $\left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \right| \leq M$ (en considérant $u = x - t$)

De plus pour $x \in [-a, a]$ et $|t| \geq 2a$, on a $|x - t| \geq ||t| - |x|| \geq |t| - a$ donc $e^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2}} \leq e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}}$ et on pose $\phi_k(t) = M$ pour $t \in [-2a, 2a]$ et $\phi_k(t) = e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4}}$ si $|t| > 2a$. Comme $\phi_k(t) = o_{\pm\infty}(\frac{1}{t^2})$, ϕ_k est intégrable (car continue par morceaux).

Q12

Montrons directement que $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}

$$T_{g_h}(u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x-t) u(t) dt$$

Comme g_h est de classe C^∞ et que u est bornée (mettons $|u| \leq K$), on a pour tout entier naturel k $|\left(\frac{d^k}{dx^k} g_h\right)(x-t) u(t)| \leq K \phi_k(t)$ ce qui donne simultanément l'intégrabilité de $\frac{d^k}{dx^k} (g_h(x-t) u(t))$ et la condition de domination pour $x \in [a, a]$

$T_{g_h}(u)$ est donc de classe C^∞ sur $[-a, a]$ et par extension sur \mathbb{R} , et pour tout entier naturel k et tout réel x : $(T_{g_h}(u))^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t) dt$

Q13

Soit x_n une suite réelle de limite $+\infty$

$$(T_{g_h}(u))^{(k)}(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x_n-t) e^{-\frac{(x_n-t)^2}{2h^2}} u(t) dt \text{ et } \left| \left(\frac{d^k}{dx^k} g_h\right)(x_n-t) u(t) \right| \leq K \phi_k(t).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,h}(x_n-t) e^{-\frac{(x_n-t)^2}{2h^2}} u(t) = 0$ pour tout t réel (croissances comparées), on obtient d'après le théorème de convergence dominée: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_{g_h}(u))^{(k)}(x_n) = 0$.

On a donc d'après la caractérisation séquentielle de la limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (T_{g_h}(u))^{(k)}(x) = 0$

On montre de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (T_{g_h}(u))^{(k)}(x) = 0$.

Q14

On effectue pour h positif le changement de variables de classe C^1 strictement

monotone

$$t = hu \quad dt = hdu$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2h^2}} dt = \int_{\frac{\alpha}{h}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du \quad \text{et comme } \lim_{h \rightarrow +0^+} \frac{\alpha}{h} = +\infty, \text{ on a } \lim_{h \rightarrow +0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt = 0$$

$$\text{Comme } g_h \text{ est paire: } \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt = \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt, \text{ on a bien: } \lim_{h \rightarrow +0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt = 0$$

Q15

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t) dt = 1$. On a alors pour tout réel x

$$|(Tg_h(u) - u)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t) - u(t)) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t) |u(x-t) - u(t)| dt$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et $\alpha > 0$ choisi comme en Q14

On a alors

$$|(Tg_h(u) - u)(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) |u(x-t) - u(t)| dt + \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) |u(x-t) - u(t)| dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) |u(x-t) - u(t)| dt$$

$$\text{Soit } |(Tg_h(u) - u)(x)| \leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) dt + 2\|u\|_{\infty} (\int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt)$$

On a $0 \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t) dt = 1$ puisque g_h est positive et

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2\|u\|_{\infty} (\int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt) = 0$$

donc il existe $\beta > 0$ tel que $0 < h < \beta \Rightarrow 2\|u\|_{\infty} (\int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt) \leq \varepsilon$

On a alors $0 < h < \beta \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad |(Tg_h(u) - u)(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|Tg_h(u) - u\| \leq 2\varepsilon$

D'où le résultat.

Q16

Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$.

Pour tout

$$h > 0 \quad \|T_{g_h}(T_{f_n}(u) - T_f(u)) - (T_{f_n}(u) - T_f(u))\|_{\infty} = \|T_{f_n}(T_{g_h}(u) - T_f(T_{g_h}(u)) - (T_{f_n}(u) - T_f(u)))\|_{\infty}$$

$\|T_{f_n}(T_{g_h}(u) - u) - T_f(T_{g_h}(u) - u)\|_{\infty} \leq 2\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty}$ (puisque les fonctions f_n et f sont dans $P(\mathbb{R}, \cdot)$)

Donc

$$\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_{\infty} \leq \|T_{g_h}(T_{f_n}(u) - T_f(u)) - (T_{f_n}(u) - T_f(u))\|_{\infty} + \|T_{g_h}(T_{f_n}(u) - T_f(u))\|_{\infty} \leq 2\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 15, il existe $h > 0$ tel que $2\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $T_{g_h}(u) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ donc, il existe un rang N à partir duquel

$$\|T_{f_n}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_{\infty} = 0$

(f_n) converge donc faiblement vers f

Q17

D'après la formule de Taylor-Young au voisinage de x (u est de classe C^{∞}):

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{t^2}{2} u''(x) + o_0(t^2)$$

$$\text{et donc } \boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} = \frac{u''(x)}{2}}$$

La fonction se prolonge donc bien continûment en 0

On a alors, comme f_n et $f_n^\#$ sont dans P :

$$\begin{aligned} n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) &= n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)(u(t) - u(x))dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(x)f_n^\#(t)dt \\ &= n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)(u(x-t) - u(x))dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u''(x)f_n^\#(t)dt = n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)(u(x-t) - u(x) - \frac{1}{2}t^2u''(x))dt \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right) f_n^\#(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} n f_n(t)(u(x-t) - u(x) + tu'(x) - \frac{1}{2}t^2u''(x))dt$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)dt = 0$, on obtient bien l'égalité demandée

Q18

Soit un réel x

On pose $v_x(t) = \frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2}$ pour t non nul et $v_x(0) = 0$. v_x est bien continue sur \mathbb{R} et bornée car de limite nulle en $\pm\infty$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange $|v(t)| = \left| \frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)-\frac{t^2}{2}u''(x)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{6}|t| \sup_{\mathbb{R}} |u^{(3)}|$ (1)

$$\begin{aligned} \text{D'après (1), pour } \alpha > 0 : & \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} v_x(t) f_n^\#(t) dt \right| \leq |\alpha| \sup_{\mathbb{R}} |u^{(3)}| \int_{-\alpha}^{\alpha} f_n^\#(t) dt \\ & \leq \frac{1}{6} |\alpha| \sup_{\mathbb{R}} |u^{(3)}| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^\#(t) dt \leq \frac{1}{6} |\alpha| \sup_{\mathbb{R}} |u^{(3)}| \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\alpha > 0$ (indépendamment de x) tel que $\frac{1}{6} |\alpha| \sup_{\mathbb{R}} |u^{(3)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} v_x(t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

D'autre part, pour t non nul $|v_x(t)| \leq \frac{1}{2} \|u''\|_{\infty} + \frac{1}{|t|} \|u'\|_{\infty} + \frac{2}{t^2} \|u\|_{\infty}$

Soit $a > 0$

Pour $t \geq \alpha$ $|v(t) f_n^\#(t)| \leq \left(\frac{1}{2} t^2 \|u''\|_{\infty} + t \|u'\|_{\infty} + 2 \|u\|_{\infty} \right) n \sqrt{n} f(\sqrt{n} t) \leq K t^2 n \sqrt{n} f(\sqrt{n} t)$ avec $K_{\alpha} = \frac{1}{2} \|u''\|_{\infty} + \frac{1}{\alpha} \|u'\|_{\infty} + \frac{2}{\alpha^2} \|u\|_{\infty}$

$$\text{et donc } \left| \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{n}} \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt \leq \frac{K_{\alpha}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{On a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right) f_n^\#(t) dt = 0$$

$$\text{De même, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\alpha} \left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right) f_n^\#(t) dt = 0$$

On peut donc choisir un entier naturel n tel que pour

$$n \geq N : \left| \int_{\alpha}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right) f_n^\#(t) dt \right| + \left| \int_{-\infty}^{-\alpha} \left(\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{u''(x)}{2} \right) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

(et N est indépendant de x)

Pour $n \geq N$, on a donc pour tout x réel $|n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x)| \leq \varepsilon$ et donc

$$\|n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x)\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

$$\text{On a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x)\|_{\infty} = 0$$

Q19

On a $\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} = \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}^n(u)\|_{\infty} \leq n \|T_{f_n}(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u)\|_{\infty}$

$$\leq \|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\|_{\infty} + \|n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\|_{\infty}$$

Or pour tout x réel : $g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-n\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{n} g_1(\sqrt{n}x)$

Or g_1 est une fonction de $P(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses de la question 17

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\|_{\infty} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} = 0$