Partie I

Question I 1

Soit h un projecteur de E, cyclique, et soit $C_a^p = \{a, h(a), \dots h^{p-1}(a)\}$ un cycle de h. Puisque $h^2(a) = h(a)$ et puisque les p éléments de C_a^p sont disjoints, on en déduit que $p \leqslant 2$. Comme C_a^p est une partie génératrice de E, on a:
$n = \dim E \leqslant p$.

Donc, un projecteur h peut être cyclique pour $n = 1$ ou $n = 2$.
Dans le cas où $n = 1$, un cycle de h s'écrit $\{a\}$, où a est un vecteur non nul de E.
Dans le cas où $n = 2$, un cycle de h s'écrit $\{a, h(a)\}$, où a est un vecteur de E qui n'appartient ni au noyau, ni à l'image de h

Question I 2a

On choisit $a = e_1$ et $p = n$. On vérifie facilement que C_a^p est un cycle de f.
On vérifie également que :

- $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = n - 1$
- $\Pi_f(X) = X^{n-1}(X-1)$

  Les valeurs propres de f sont 0, de multiplicité $n-1$ et 1, de multiplicité 1.

  $E_0(f)$ est de dimension 1 (puisque $\operatorname{rg} f = n-1$)

  $E_1(f)$ est de dimension 1 (puisque 1 est une valeur propre simple)
- Donc, f est diagonalisable si et seulement si $n = 2$

Question I 2b

On choisit $a = e_1$ et $p = n + 1$.

- $C_a^p = \{e_1, e_2, \dots, e_n, -\sum_{k=1}^{n} e_k\}$ est une partie génératrice de E, dont les éléments sont 2 à 2 distincts.
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad g(e_i) \in C_a^p$

  $$g\left(-\sum_{k=1}^{n} e_k\right) = -\sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} e_k = e_1$$

  Donc : $g\left(C_a^p\right) \subset C_a^p$

$\boxed{g \text{ est donc cyclique et un cycle de } g \text{ est } C_{e_1}^{n+1}}$

$\boxed{\text{Il est clair que } g \text{ est de rang } n}$

On a : $g^{n+1}(e_1) = g\left(-\sum_{k=1}^{n} e_k\right) = e_1$

$\forall i \in \{2, \ldots, n\} \quad g^{n+1}(e_i) = g^{n+1} \circ g^{i-1}(e_1) = g^{i-1} \circ g^{n+1}(e_1) = e_i$

g^{n+1} coïncidant avec id sur une base de E, est donc égale à id. g annule donc le polynôme $X^{n+1} - 1$, qui est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples.

$\boxed{\text{Donc, } g \text{ est diagonalisable}}$

Question I 3a

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique d'ordre p et C_a^p un cycle de f. Puisque C_a^p est une partie génératrice de E de cardinal p, on a :

$\boxed{p \geqslant \dim E = n}$

Question I 3b

C_a^p étant un cycle de f, $\operatorname{Im} f$ contient $f(a), \ldots, f^{p-1}(a)$. Le sous-espace engendré par ces vecteurs est de dimension $n-1$ au moins, puisque C_a^p est une partie génératrice de E.

$\boxed{\text{Donc, } \operatorname{Im} f \text{ est de dimension } n-1 \text{ au moins}}$

Question I 4a

Notons HR_k la propriété : $f^k(a) \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$

- $\{a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a), f^m(a)\}$ est liée et $\{a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\}$ est libre. On en déduit que $f^m(a)$ appartient à $\operatorname{Vect}(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a))$.

  On en déduit que HR_m est vraie.

- Supposons que HR_k est vraie avec $k \geqslant m$. Alors, $f^k(a)$ appartient à $\operatorname{Vect}(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\}$. On en déduit que $f^{k+1}(a)$ appartient à $\operatorname{Vect}(f(a), f^2(a), \ldots, f^m(a))$. Puisque HR_m est vraie, on a:

  $\operatorname{Vect}(f(a), f^2(a), \ldots, f^m(a)) \subset \operatorname{Vect}(a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\}$.

  On en déduit que HR_{k+1} est vraie.

$\boxed{\text{Donc, par récurrence : } \forall k \geqslant m \quad f^k(a) \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}}$

Question I 4b

On déduit de la question précédente que tout élément de C_a^p est un élément de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Comme C_a^p est une partie génératrice de E, il en est de même de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ étant à la fois une partie génératrice et une famille libre de E, est donc une base de E. En particulier $n = m$.

$\boxed{\text{Donc, } \mathcal{F} = \{a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a)\} \text{ est une base de } E}$

Question I 4c

D'après la question précédente, si $R = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k$ est un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a :

$$\begin{aligned} R(f) = 0 &\implies R(f)(a) = 0 \\ &\implies \sum_{k=0}^{n-1} r_k f^k(a) = 0 \\ &\implies \forall k \in \{0, \ldots, n-1\} \quad r_k = 0 \end{aligned}$$

On en déduit qu'un polynôme annulateur de f non nul est de degré au moins n et donc que P_f est de degré au moins n. Comme P_f est un diviseur unitaire de Π_f (théorème de Cayley-Hamilton), on en déduit que :

$\boxed{P_f = \Pi_f}$

Question I 5

Si f est bijectif et si C_a^p est un cycle de f, alors il existe k dans $\{0, \ldots, p-1\}$ tel que :
$f^p(a) = f^k(a)$

Si k était non nul, puisque f^k est bijective, on aurait :
$f^{p-k}(a) = a$
ce qui serait contradictoire puisque a et $f^{p-k}(a)$, étant deux éléments de C_a^p, devraient être distincts.

$\boxed{\text{Si } f \text{ est bijectif et si } C_a^p \text{ est un cycle de } f, \text{ on a } f^p(a) = a}$

Question I 6

Soit C_e^2 un cycle de f. On sait d'après la question I 4b que $(e, f(e))$ est une base de E. La matrice de f dans cette base est :
$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$
Or, on a : $\beta = \operatorname{tr} f = b \qquad \alpha = -\det f = a$

De plus, on a : $\quad f^2(e) = e \quad$ ou $\quad f^2(e) = f(e)$

Dans le cas où $f^2(e) = e$, ceci entraîne :
$a = 1 \quad b = 0$
Mais, dans ce cas, 1 est valeur propre de f ($P_f = X^2 - 1$).

Dans le cas où $f^2(e) = f(e)$, ceci entraîne :
$a = 0 \quad b = 1$
Mais, dans ce cas, 1 est valeur propre de f ($P_f = X(X-1)$)

$\boxed{\text{Il n'existe aucune valeur de } a \text{ et } b \text{ pour que } f \text{ soit cyclique d'ordre 2}}$

Question I 7

f^n est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ (d'après le cours sur les rotations d'un plan euclidien).

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$, écrivons $\theta = 2\pi\dfrac{a}{b}$, avec $a \wedge b = 1$. Puisque θ n'appartient pas à $2\pi\mathbb{Z}$: $b > 1$.

  On choisit $a = e_1$ et $p = b - 1$.

  - C_a^p est une partie génératrice de E, puisque $(a, f(a))$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}^2$ (rappelons que θ n'est pas un élément de $2\pi\mathbb{Z}$).
  - $$\begin{aligned} f^k(a) = f^l(a) &\Longrightarrow k\theta \equiv l\theta \pmod{2\pi} \\ &\Longrightarrow (k-l)a \equiv 0 \pmod{b} \\ &\Longrightarrow k - l \text{ multiple de } b \end{aligned}$$
    C_a^p possède donc p éléments distincts 2 à 2
  - Puisque $f^p(a) = a$, C_a^p est stable par f

  Donc, C_a^p est un cycle de f et f est cyclique

- Réciproquement, si f est cyclique et si C_a^p est un cycle de f, alors, puisque f est bijective, on a : $f^p(a) = a$.

  Si $p\theta$ n'est pas nul modulo 2π, alors, 1 n'est pas valeur propre de f^p (les valeurs propres de f^p étant $e^{ip\theta}$ et $e^{-ip\theta}$). Donc :

  $p\theta = 2\pi q$

  $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$

$\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } \theta \in 2\pi\mathbb{Q}}$

Partie II

Question II 1a

On a vu à la question I 5 que : $f^p(a) = a$ (puisque f est bijectif et C_a^p est un cycle de f).
Pour tout k de $\{1, \ldots, p-1\}$, on a :
$f^p(f^k(a)) = f^k(f^p(a)) = f^p(a)$
Donc f^p et id coïncident sur C_a^p, qui est une partie génératrice de E.

$\boxed{\text{On en déduit que } f^p = id}$

$\boxed{f \text{ est diagonalisable puisqu'il annule le polynôme } X^p - 1, \text{ qui est scindé à racines simples}}$

Question II 1b

Puisque f annule $X^p - 1$, Π_f divise $X^p - 1$.
Soit k tel que Π_f divise $X^k - 1$. Alors, f annule $X^k - 1$ et, en particulier $f^k(a) = a$. Comme les éléments de C_a^p sont 2 à 2 distincts, on en déduit que $k \geqslant p$.

Donc, P_f divise $X^k - 1$ et p est le plus petit entier k non nul tel que P_f divise $X^k - 1$

Question II 2a

P_f divise $X^p - 1$, qui est scindé à racines simples. Donc P_f est scindé à racines simples.
Soit λ une racine de P_f; c'est donc une valeur propre de f, et elle est donc racine de tout polynôme annulateur de f , en particulier Π_f.
P_f est scindé, à racines simples, toutes ses racines sont racines de Π_f. On en déduit que P_f est un diviseur de Π_f.

- P_f divise Π_f (vu précédemment)
- Π_f divise P_f (théorème de Cayley-Hamilton)
- P_f et Π_f sont unitaires

$\boxed{P_f = \Pi_f}$

Question II 2b

f est diagonalisable puisqu'il annule le polynôme $X^p - 1$, qui est scindé, à racines simples

Question II 2c

On notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f (on a vu à la question II 2a qu'elles étaient toutes distinctes). Pour tout i, v_i est un vecteur propre associé à λ_i.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$ est un vecteur tel que $\forall i \ , \ x_i \neq 0$.
On a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x) = 0 \quad & \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i x_k \lambda_k^i v_k = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_k Q(\lambda_k) v_k = 0 \qquad \text{avec } Q = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \\
& \Longrightarrow \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad Q(\lambda_k) = 0 \qquad \text{avec } Q = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \\
& \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \quad \text{multiple de } P_f \\
& \Longrightarrow \quad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\} \quad \alpha_i = 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)) \text{ est une famille libre de } E \text{ et donc une base}}$

Question II 2 d

- $(x, \ldots, f^{p-1}(x))$ est une partie génératrice de E, puisque $p \geqslant n$ et $(x, \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
- On garde les notations qui ont été introduites dans la solution de la question précédente. Soit $k > l$. On a:

$$
\begin{aligned}
f^k(x) = f^l(x) \quad & \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^l v_i \\
& \Longrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i^k = \lambda_i^l \\
& \Longrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i \text{ racine de } X^k - X^l \\
& \Longrightarrow \quad P_f \text{ diviseur de } X^{k-l} - 1 \\
& \Longrightarrow \quad k - l \geqslant p \qquad \text{par hypothèse}
\end{aligned}
$$

  Donc, les éléments de C_x^p sont distincts 2 à 2
- $f^p(x) = x$ puisque $f^p = id$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est cyclique et } C_x^p \text{ est un cycle de } f}$

Question II 3a

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + A
$$

$\boxed{\text{Un polynôme annulateur de } f \text{ est donc } X^2 - X - 2}$

Question II 3b

Il y a une **erreur d'énoncé**. L'endomorphisme f ne peut être cyclique, puisque son polynôme minimal est $X^2 - X - 2$ et n'est donc pas égal à son polynôme caractéristique. Or, lorsque f est un endomorphisme cyclique bijectif, on a , d'après la question II 2a : $P_f = \Pi_f$.

Partie III

Question III 1a

On a vu à la question I 3b qu'un endomorphisme cyclique était de rang au moins $n-1$. Donc, d'après le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est inférieure ou égale à 1. Comme f n'est pas inversible, on en déduit que:

$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$

Question III 1b

Si $f^p(a) = a$, on aurait, pour tout k de $\{0, \ldots, p-1\}$:
$f^p(f^k(a)) = f^k(f^p(a)) = f^k(a)$
f^p et id coïncideraient sur C_a^p, qui est une partie génératrice de E. On aurait donc :
$f^p = id$
ce qui serait contradictoire, puisque f serait inversible.

$\boxed{\text{Donc, } f^p(a) \neq a}$

Question III 1c

j est un élément de $\{1, \ldots, p-1\}$ tel que : $f^p(a) = f^j(a)$
Pour tout k de $\{0, \ldots, p-1\}$, on a:

$$f^p(f^k(a)) = f^k(f^p(a)) = f^k(f^j(a)) = f^j(f^k(a))$$

Donc, f^p et f^j coïncident sur C_a^p, qui est une partie génératrice de E. On en déduit que :

$\boxed{f^p = f^j}$

Question III 1d

D'après la question précédente, f annule $X^p - X^j$. Donc, Π_f est un diviseur de $X^p - X^j$.

- Soit k l'ordre de multiplicité de 0 comme racine du polynôme Π_f (on sait déjà que $1 \leqslant k \leqslant j$). Alors, Π_f est diviseur de $X^k(X^{p-j} - 1)$. En particulier, f annule $X^{p+k-j} - X^k$ et :

  $f^{p+k-j}(a) = f^k(a)$.

  Les éléments de C_a^p étant 2 à 2 distincts, on en déduit que $p + k - j \geqslant p$ et donc que $k = j$

Π_f est donc multiple de X^j et est un diviseur de $X^p - X^j$. On en déduit que :

$\boxed{\Pi_f \text{ est de la forme } X^jQ, \text{ où } Q \text{ est un diviseur de } X^{p-j} - 1}$

Question III 2

Si Q est un polynôme constant, le polynôme caractéristique de f est X^n. Comme Π_f est égal à P_f, on en déduit que X^n annule f et que X^{n-1} n'annule pas f.
Il existe donc x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

- Supposons que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ n'est pas libre. Il existe donc $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ non nul tel que :

  $$v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x) = 0$$

  Alors, si k est le plus petit entier tel que α_k est non nul, en prenant l'image par f^{n-k-1} du vecteur v, on a, sachant que f^n est nul :

  $\alpha_k f^{n-1}(x) = 0$

  On aboutit à une contradiction.

  Donc, $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E, et donc une base, puisque de cardinal n.
  On en déduit que C_x^{n+1} est une famille génératrice de E.
- Les éléments de C_x^{n+1} sont distincts 2 à 2, puisque les n premiers vecteurs forment une base et puisque le $(n+1)$-ième vecteur est le vecteur nul
- $f^{n+1}(x) = 0 = f^n(x)$ On en déduit que C_x^{n+1} est stable par f

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est cyclique d'ordre } n+1 \text{ et que } C_x^{n+1} \text{ est un cycle de } f}$

Question III 3a

Les polynômes X^j et $X^q - 1$ sont premiers entre eux, puisqu'ils n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème de décomposition des noyaux :

$\mathrm{Ker}(X^j(X^q - 1))(f) = \mathrm{Ker}\, X^j(f) \oplus \mathrm{Ker}(X^q - 1)(f)$

Or, f annule $X^j(X^q - 1)$, puisque Π_f divise $X^j(X^q - 1)$. Donc :

$\boxed{E = \mathrm{Ker}\, f^j \oplus \mathrm{Ker}(f^q - id)}$

Question III 3b

f et f^j commutent, donc, $\mathrm{Ker}\, f^j$ est stable par f.
f et $f^q - id$ commutent, donc $\mathrm{Ker}(f^q - id)$ est stable par f.

Question III 4a

- f_2 vérifie: $f_2^q = id_{E_2}$.

  Donc, f_2 est bijectif.

- On a, par propriété du cours : $P_f = P_{f_1} P_{f_2}$

  On en déduit que P_{f_2} est un diviseur de P_f, et donc de $X^j(X^q - 1)$.

  Comme f_2 est bijectif, P_{f_2} divise $X^q - 1$

- Supposons que P_{f_2} divise un des polynômes $X^k - 1$, pour $0 < k < q$.

  - $f_1^j = 0$. Donc, la seule valeur propre possible de f_1 est la racine de X^j : 0. On en déduit que que le polynôme caractéristique de f_1 est de la forme X^{j_1}.
  - Comme $P_f = P_{f_1} P_{f_2}$ et comme 0 n'est pas racine de P_2, on en déduit que $j_1 = j$

  On en déduirait donc que P_f s'écrirait sous la forme $P_{f_1} P_{f_2}$, donc sous la forme $X^j Q$, où Q diviserait un polynôme $X^k - 1$, avec $0 < k < q$.

  Ceci serait contradictoire.

  Donc, P_{f_2} ne divise aucun des polynômes $X^k - 1$, pour $0 < k < q$.

On conclut de ce qui précède et de l'étude faite dans la question II 2 que f_2 est cyclique d'ordre q

Question III 4b

$C_{a_2}^q$ est un cycle de f_2. Donc, d'après la question I 4b, $(a_2, f_2(a_2), \ldots, f_2^{q-1}(a_2))$ est une base de E_2. On en déduit que $(f_2^j(a_2), \ldots, f_2^{j+q-1}(a_2))$ est une base de E_2, comme image d'une base par l'endomorphisme bijectif f_2^j (on rappelle que f_2 est bijectif).

$(f^j(a_2), \ldots, f^{j+q-1}(a_2))$ engendre E_2

Question III 5a

On a vu dans la solution de la question III 4a que $P_f = P_{f_1} P_{f_2}$ et que $P_{f_1}(X) = X^j$. Donc, la dimension de E_1 est j.

Question III 5b

Si f_1^{j-1} était l'endomorphisme nul, alors le polynôme $R(X) = X^{j-1} Q(X)$ serait tel que:

$R(f_1) = 0_{E_1} \qquad R(f_2) = 0_{E_2}$

Les restrictions de $R(f)$ aux deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 seraient nulles. On en déduirait que $R(f) = 0$ et donc que R serait un multiple de $\Pi_f = P_f = X^j Q(X)$, ce qui serait contradictoire.

Donc, $f_1^{j-1} \neq 0$

$\boxed{\textbf{Question III 5c}}$

f_1 est un endomorphisme de E_1 et on a, d'après ce qui précède :
$\Pi_{f_1} = P_{f_1} = X^j Q \qquad \text{avec } Q = 1$
De l'étude faite à la question III 2, on déduit que f_1 est un endomorphisme cyclique d'ordre $j+1$. En particulier, si $C_{a_1}^{j+1}$ est un cycle de f_1 :

$\boxed{(a_1, f(a_1), \ldots, f^{j-1}(a_1)) \text{ est une base de } E_1}$

$\boxed{\textbf{Question III 6}}$

$a = a_1 + a_2$

- Puisque $f^j(a_1) = 0$, on a:

  $f^j(a) = f^j(a_2)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{j+q-1}(a) = f^{j+q-1}(a_2)$

  On en déduit que le sous-espace engendré par les éléments de C_a^{j+q-1} contient E_2 (ceci par la question III 4b).

  Le sous-espace engendré par les éléments de C_a^{j+q-1} contient également les éléments suivants :

  - $a - a_2 = a_1$
  - $\ldots$
  - $f^{j-1}(a) - f^{j-1}(a_2) = f^{j-1}(a_1)$

  Il contient donc E_1, car E_1 est le sous-espace engendré par $a_1, \ldots, f^{j-1}(a_1)$ (question III 5c)

  Le sous-espace engendré par les éléments de C_a^{j+q-1} contient donc :

  $E = E_1 \oplus E_2$ (question III 3a)

- Supposons que $f^k(a) = f^l(a)$, avec $k \neq l$. On a alors, puisque E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, stables par f_1 et f_2:

  $f_1^k(a_1) = f_1^l(a_1) \qquad f_2^k(a_2) = f_2^l(a_2)$

  De la première égalité, on déduit que : $\quad k \geqslant j \quad \text{et} \quad l \geqslant j$. Mais on a vu que dans la solution de la question III 4b que $f_2^j(a_2), \ldots, f_2^{j+q-1}(a_2)$ forment une base de E_2 et sont donc distincts 2 à 2. On a donc :

  $k \geqslant j + q \qquad l \geqslant j + q$

  Donc, les éléments de C_a^{j+q-1} sont distincts 2 à 2.

- $f^{j+q} = f^j$ puisque f annule $X^{j+q} - X^j$.

  En particulier : $f^{j+q}(a) = f^j(a)$

  On en déduit que C_a^{j+q-1} est stable par f.

$\boxed{\text{Donc, } C_a^{j+q-1} \text{ est un cycle de } f}$

Question III 7

On trouve facilement que : $P_f(X) = X^2(X-j)$

On rappelle que les valeurs propres de f sont racines de tout polynôme annulateur de f et donc de Π_f. Comme Π_f divise P_f (théorème de Cayley-Hamilton), on a:
$\Pi_f(X) = X^2(X-j)$ ou $\Pi_f(X) = X(X-j)$
On vérifie facilement que f n'annule pas $X(X-j)$.

On a donc:
$\Pi_f = P_f = X^2 Q$
où Q est un polynôme qui divise $X^3 - 1$ et aucun des polynômes $X^k - 1$ pour $0 < k < q$
On en déduit que f est cyclique d'ordre 5

Avec les notations de l'énoncé, on obtient facilement :

$a_2 = e_3$

Il reste à déterminer a_1. a_1 est un élément de Ker f^2 sans être élément de Ker f.
On a:
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ j & j & j^2 \end{pmatrix}$$
On choisira donc : $a_1 = je_1 - e_3$

$\boxed{\text{Un cycle de } f \text{ est donc } C_a^5, \text{ avec } a = je_1 + (j-1)e_3}$