

Partie 1

Dans toute cette partie, on pose, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f_a : x \mapsto e^{-ax}$  (notation introduite en 3.1 du sujet).

1.1. En multipliant  $(E_a^f)$  par  $f_a$ , et puisque  $f_a' = -af_a$ , on a :

$$z' - az = -f \iff f_a z' - af_a z = -f_a f \iff (f_a z)' = -f_a f$$

donc  $z$  est solution de  $(E_a^f)$  si et seulement si  $f_a z$  est une primitive de  $-f_a f$ .

Or par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction  $H : x \mapsto -\int_1^x f_a f$  est une primitive de  $-f_a f$  sur l'intervalle  $I$ , et les primitives de  $-f_a f$  sur  $I$  sont égales entre elles à une constante près.

Donc  $z$  est solution de  $(E_a^f)$  si et seulement s'il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que  $f_a z = H + K$ , i.e.  $z = (H + K)f_{-a}$ , qui est le résultat voulu.

1.2. Si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux solutions de  $(E_a^f)$ , alors par 1.1, il existe  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $z_1 = (H + K_1)f_{-a}$  et  $z_2 = (H + K_2)f_{-a}$ , donc tels que  $z_1 - z_2 = (K_1 - K_2)f_{-a}$ .

Si de plus  $z_1$  et  $z_2$  sont bornées sur  $I$ , alors  $z_1 - z_2$  l'est aussi, or  $f_{-a}$  ne l'est pas (car on a  $a > 0$ , donc  $f_a$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ ), donc nécessairement  $K_1 = K_2$ , i.e.  $z_1 = z_2$ .

Ainsi si  $(E_a^f)$  admet une solution bornée sur  $I$ , alors celle-ci est unique.

1.3. Par hypothèses sur  $f$ , la fonction  $f_a f$  est continue sur  $I$  et dominée par  $f_a$  en  $+\infty$ . Or  $f_a$  est intégrable sur  $I$  car  $a > 0$  (intégrales de référence), donc par comparaison,  $f_a f$  l'est aussi.

Autrement dit, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$  converge absolument, donc elle converge.

1.4. • La fonction  $F$  est bien une solution de  $(E_a^f)$  sur  $I$  puisqu'elle est de la forme donnée en 1.1, pour  $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$  (par relation de Chasles), qui est bien une constante réelle par 1.3.

• Soit  $M$  un majorant de  $|f|$  sur  $I$  ( $M$  existe par hypothèse sur  $f$ ). Alors par croissance de l'intégrale,  $\forall x \in I$ ,  $|F(x)| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt \leq M e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} dt$ . Or  $\int_x^{+\infty} e^{-at} dt = \left[ \frac{e^{-at}}{-a} \right]_x^{+\infty} = \frac{e^{-ax}}{a}$ .

Donc  $\forall x \in I$ ,  $|F(x)| \leq \frac{M}{a}$ . Ainsi, la fonction  $F$  est bornée sur  $I$ .

On a montré que  $F$  est une solution bornée de  $(E_a^f)$  sur  $I$ , et par 1.2, elle est unique.

2.1. Par la formule de 1.4 ou de façon évidente au vu de l'équation  $(E_a^1)$ , la solution bornée  $U_a(1)$  de  $(E_a^1)$  est la fonction constante égale à  $\frac{1}{a}$ .

2.2. • Pour tout  $f \in \mathcal{E}$ , la fonction  $U_a(f)$  est bornée et continue (même dérivable) sur  $I$  par construction (cf. 1.1 et 1.4). Donc l'application  $U_a$  va de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ .

• L'application  $U_a$  est linéaire par linéarité de l'intégrale. En effet, pour tous  $f, g \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\forall x \in I, U_a(\lambda f + g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} f_a \times (\lambda f + g) = e^{ax} \int_x^{+\infty} (\lambda f_a f + f_a g) = \lambda e^{ax} \left( \int_x^{+\infty} f_a f + \int_x^{+\infty} f_a g \right) = \lambda U_a(f)(x) + U_a(g)(x), \text{ donc } U_a(\lambda f + g) = \lambda U_a(f) + U_a(g).$$

On a montré que  $U_a$  est linéaire de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ , i.e. que  $U_a$  est un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ .

2.3. a. Soit  $f \in \mathcal{E}$ . Par définition,  $U_a(f)$  est une solution de  $(E_a^f)$ , donc  $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$ . Ainsi si  $U_a(f) = 0$  (fonction nulle sur  $I$ ), alors  $U_a(f)' = 0$ , et donc  $f = 0$ .

Cela montre que  $\text{Ker}(U_a) = \{0\}$ , i.e. que  $U_a$  est injectif.

b. Pour tout  $f \in \mathcal{E}$ ,  $U_a(f)$  est dérivable sur  $I$  puisque c'est une solution sur  $I$  de l'équation différentielle d'ordre un  $(E_a^f)$ , et  $U_a(f)' = aU_a(f) - f$  est continue comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Donc  $U_a(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , i.e.  $U_a(f) \in \mathcal{E}_1$ .

c. On vient de montrer que  $\text{Im}(U_a) \subset \mathcal{E}_1$ . Ainsi, aucun élément de  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$  n'a d'antécédent par  $U_a$ . Comme l'ensemble  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$  est non vide (il contient par exemple la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x$  sur  $[1; 2]$  et  $f(x) = 2$  sur  $[2; +\infty[$ , qui est continue et bornée sur  $I$ , mais pas dérivable en 2), cela montre que  $U_a$  n'est pas surjectif.

2.4. • Pour montrer que  $\mathcal{F} = \text{Vect}(\sin, \cos)$  est stable par  $U_1$ , il suffit, vu la linéarité de  $U_1$ , de montrer que  $U_1(\sin)$  et  $U_1(\cos)$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ .

Méthode 1. Avec la formule d'Euler  $\cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$ , valable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a pour  $x \in I$  :

$$\begin{aligned}
U_1(\cos)(x) + i U_1(\sin)(x) &= e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt + i e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt \\
&= e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} e^{it} dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{(i-1)t} dt \\
&= e^x \left[ \frac{e^{(i-1)t}}{i-1} \right]_x^{+\infty} = e^x \frac{e^{(i-1)x}}{1-i} = \frac{e^{ix}}{1-i} = \frac{1}{2} e^{ix} (1+i) \\
&= \frac{1}{2} (\cos(x) - \sin(x)) + \frac{i}{2} (\cos(x) + \sin(x))
\end{aligned}$$

On en déduit par unicité des écritures algébriques des nombres complexes que  $U_1(\cos) = \frac{1}{2}(\cos - \sin)$  et  $U_1(\sin) = \frac{1}{2}(\cos + \sin)$ . D'où le résultat voulu.

Méthode 2. Par intégrations par parties dans lesquelles tous les termes convergent, on a pour  $x \in I$  :

$$* U_1(\sin)(x) = e^x \left( [-e^{-t} \sin(t)]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt \right) = \sin(x) + U_1(\cos)(x), \text{ et de même,}$$

$$* U_1(\cos)(x) = \dots = \cos(x) - U_1(\sin)(x).$$

On en déduit que  $2U_1(\sin) = \sin + \cos$  et  $2U_1(\cos) = \cos - \sin$ .

Conclusion. Ainsi  $U_1(\cos)$  et  $U_1(\sin)$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ , et donc  $\mathcal{F}$  est stable par  $U_1$ .

- La famille  $(\sin, \cos)$  est évidemment libre (car les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  ne sont pas proportionnelles) et génératrice de  $\mathcal{F}$  (par définition de  $\mathcal{F}$ ), donc la famille  $(\sin, \cos)$  est une base de  $\mathcal{F}$ .
- Les calculs du premier point montrent que la matrice, dans la base  $(\sin, \cos)$ , de l'endomorphisme de  $\mathcal{F}$  induit par  $U_1$ , est la matrice :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

Donc  $M$  est bien de la forme  $\lambda\Omega$  où  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$  et  $\Omega$  est la matrice de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  dans le plan euclidien orienté usuel.

**Remarques (problème d'énoncé).**

— En prenant la base  $(\cos, \sin)$ , on trouverait un angle de  $-\frac{\pi}{4}$ .

— Pire : en prenant une base plus exotique, comme  $(\sin, 2\cos)$ , ou  $(\sin, \sin + \cos)$ , la matrice  $M$  n'est pas de la forme  $\lambda\Omega$  souhaitée ...

**3.1.** Pour tout  $x \in I$ ,  $U_a(f_r)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t} dt = e^{ax} \left[ \frac{e^{-(a+r)t}}{-(a+r)} \right]_x^{+\infty} = e^{ax} \frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{e^{-rx}}{a+r} = \frac{1}{a+r} f_r(x)$ .

Donc  $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r} f_r$ .

**3.2.** Tout  $\lambda \in ]0; \frac{1}{a}]$  est de la forme  $\lambda = \frac{1}{a+r}$  pour  $r = \frac{1}{\lambda} - a \geq 0$ , et par **3.1**, on a alors  $U_a(f_r) = \lambda f_r$ .

Comme  $f_r \neq 0$ , cela montre qu'un tel  $\lambda$  est valeur propre de  $U_a$ .

**3.3.** Par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_a^n(f_r) = \frac{1}{(a+r)^n} f_r$ .

Or  $\frac{1}{a+r} > 0$  et pour tout  $x \in I$ ,  $f_r(x) \neq 0$ , on en déduit que :

- si  $\frac{1}{a+r} < 1$ , i.e. si  $a+r > 1$ , alors la suite  $(U_a^n(f_r))_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers 0 (fonction nulle),
- si  $a+r = 1$ , alors la suite  $(U_a^n(f_r))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $f_r$ , donc converge simplement vers  $f_r$ ,
- si  $\frac{1}{a+r} > 1$ , i.e. si  $a+r < 1$ , alors la suite  $(U_a^n(f_r))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

**3.4.** Vu **3.3**, la série  $\sum U_a^n(f_r)$  converge simplement sur  $I$  si et seulement si  $\frac{1}{a+r} < 1$ , i.e.  $a+r > 1$ .

Le cas échéant, on a alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a+r}\right)^n f_r = \frac{1}{1-\frac{1}{a+r}} f_r = \frac{a+r}{a+r-1} f_r$ .

**4.** Soit  $x \in I$ . Le changement de variable  $u = t - x$  est valide dans l'intégrale définissant  $U_a(f)(x)$  puisque la fonction affine  $t \mapsto t - x$  réalise une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]x; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$ , et donne :

$$U_a(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = e^{ax} \int_0^{+\infty} e^{-a(x+u)} f(x+u) du = \int_0^{+\infty} e^{-au} f(x+u) du.$$

C'est le résultat voulu (en remplaçant  $u$  par  $t$ ).

**5.1.** Montrons que la famille  $\mathcal{B}_p = (g_0, \dots, g_p)$  est libre. Si  $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  est tel que  $\sum_{k=0}^p \lambda_k g_k = 0$  (fonction nulle sur  $I$ ), alors pour tout  $x \in I$ ,  $\sum_{k=0}^p \lambda_k x^k e^{-x} = 0$ , et donc  $\sum_{k=0}^p \lambda_k x^k = 0$  puisque  $e^{-x} \neq 0$ . Ainsi le polynôme  $\sum_{k=0}^p \lambda_k X^k$  admet une infinité de racines (car  $I = ]1; +\infty[$  est infini), donc c'est le polynôme nul, i.e.  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ .

Ainsi  $\mathcal{B}_p$  est libre, et comme elle engendre  $\mathcal{F}_p$  par définition, c'en est une base.

**5.2.** Comme en **2.4**, pour montrer que  $\mathcal{F}_p = \text{Vect}(g_0, \dots, g_p)$  est stable par  $U_a$ , il suffit, vu la linéarité de  $U_a$ , de montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$ ,  $U_a(g_k) \in \mathcal{F}_p$ . Or pour tout  $x \in I$ , on a par la formule de **4** :

$$\begin{aligned}
U_a(g_k)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} g_k(x+t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-(x+t)} (x+t)^k dt \\
&= e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i t^{k-i} dt \quad \text{par la formule du binôme,} \\
&= \sum_{i=0}^k e^{-x} x^i \binom{k}{i} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{k-i} dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

Autrement dit,  $U_a(g_k) = \sum_{i=0}^k \lambda_{i,k} g_i$  où  $\lambda_{i,k} = \binom{k}{i} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} t^{k-i} dt$ .

Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$ ,  $U_a(g_k) \in \mathcal{F}_p = \text{Vect}(g_0, \dots, g_p)$ , donc  $\mathcal{F}_p$  est stable par  $U_a$ .

**5.3.** Les calculs faits en **5.2** montrent que la matrice, dans la base  $(g_0, \dots, g_p)$ , de l'endomorphisme de  $\mathcal{F}_p$  induit par  $U_a$ , est triangulaire supérieure, et a pour coefficients diagonaux les  $\lambda_{k,k} = \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t} dt = \frac{1}{a+1}$ , pour  $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$ . Son déterminant, qui est le déterminant demandé, est donc  $\prod_{k=0}^p \lambda_{k,k} = \frac{1}{(a+1)^{p+1}}$ .

**6.** Pour tout  $f \in \mathcal{E}$ , on a  $|f| \in \mathcal{E}$ , de sorte que  $U_a(f)$  et  $U_a(|f|)$  sont bien définis. Et par croissance de l'intégrale, on a alors, pour tout  $x \in I$ ,  $|U_a(f)(x)| = |e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt| \leq e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)| dt = U_a(|f|)(x)$ .

Donc  $|U_a(f)| \leq U_a(|f|)$ .

**7.** Si  $f$  est positive, alors de façon évidente au vu des formules définissant  $U_a(f)$  en **1.4** ou en **4**, on a par positivité de l'intégrale,  $\forall x \in I$ ,  $U_a(f)(x) \geq 0$ . Donc si  $f$  est positive, il en est de même pour  $U_a(f)$ .

**8.** On suppose  $f$  décroissante.

- Alors pour tous  $x \in I$  et  $t \geq 0$ , on a  $f(x+t) \leq f(x)$ , donc  $e^{-at} f(x+t) \leq e^{-at} f(x)$ , et donc par croissance de l'intégrale avec la formule vue en **4**,  $U_a(f)(x) \leq f(x) \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{f(x)}{a}$ .

Puisque  $a > 0$ , on a donc  $\forall x \in I$ ,  $aU_a(f)(x) \leq f(x)$ , i.e.  $aU_a(f) \leq f$ .

- Par définition,  $U_a(f)$  est une solution de  $(E_a^f)$ , donc  $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$ . Ainsi  $U_a(f)' = aU_a(f) - f \leq 0$  par le point précédent, donc  $U_a(f)$  est décroissante.

**9.1.** L'hypothèse  $f \in \mathcal{H}$  implique  $f' \in \mathcal{E}$ , de sorte que  $U_a(f')$  est bien défini.

Alors par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent, on a pour  $x \in I$  :

$$U_a(f')(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f'(t) dt = e^{ax} [e^{-at} f(t)]_x^{+\infty} + ae^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = -f(x) + aU_a(f)(x).$$

Ainsi  $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$ .

**9.2.** Comme  $U_a(f)$  est une solution de  $(E_a^f)$ , on a aussi  $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$ , et donc vu **9.1**,  $U_a(f)' = U_a(f')$ .

Autrement dit,  $\forall f \in \mathcal{H}$ ,  $D \circ U_a(f) = U_a \circ D(f)$ , i.e.  $U_a$  et  $D$  commutent dans  $\mathcal{H}$ .

**10.** On va montrer par récurrence la propriété  $\mathcal{P}_n : \forall f \in \mathcal{E}, \forall x \in I, U_a^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$ .

- La propriété  $\mathcal{P}_0$  est vraie par définition de  $U_a$  (cf. **1.4**).

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_n$  est vraie. Fixons  $f \in \mathcal{E}$  et  $x \in I$ . En appliquant  $\mathcal{P}_n$  à la fonction  $U_a(f)$ , on a :

$$U_a^{n+2}(f)(x) = U_a^{n+1}(U_a^n(f))(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U_a(f)(t) dt.$$

Or la fonction  $g : t \mapsto e^{-at} U_a(f)(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et admet pour dérivée  $g' : t \mapsto -e^{-at} f(t)$  puisque  $U_a(f)$  est solution de  $(E_a^f)$  (cf. calculs faits en **1.1**).

Une intégration par parties donne alors, sous réserve de convergence de l'un des deux termes de droite :

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U_a(f)(t) dt = \left[ \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} U_a(f)(t) \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt.$$

Or le terme entre crochets converge vers 0 en  $+\infty$  par croissances comparées (car  $U_a(f)$  est bornée), et vaut 0 en 0. On en déduit que la dernière intégrale converge, et on a alors, en multipliant par  $e^{ax}$  :

$$U_a^{n+2}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-at} f(t) dt$$

qui est le formule voulue au rang  $n+1$ . On a montré que si  $\mathcal{P}_n$  est vraie, alors  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

- On conclut par principe de récurrence que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , i.e. que :

$$\forall f \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N}, U_a^{n+1}(f) : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt.$$

**11.1.** La série exponentielle  $\sum \frac{(t-x)^n}{n!}$  converge et a pour somme  $e^{t-x}$ , donc la série proposée converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) = e^{t-x} e^{-at} f(t) = e^{-x} e^{(1-a)t} f(t).$$

**11.2.** Soit  $x \in I$ . Il s'agit de montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} U_a^{n+1}(f)(x)$  converge et de calculer sa somme  $S(x)$ .

Vu **10**, il s'agit de montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$  converge et de calculer sa somme  $e^{-ax} S(x)$ .

On va pour cela utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : t \mapsto \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)$  est continue (par morceaux) sur  $[x; +\infty[$ .

- Par **11.1**, la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[x; +\infty[$ , et sa somme  $F : t \mapsto e^{-x} e^{(1-a)t} f(t)$  est continue (par morceaux) sur  $[x; +\infty[$ .

- Soit  $M$  un majorant de  $|f|$  sur  $I$ . Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [x; +\infty[$ , on a  $|f_n(t)| \leq \frac{M}{n!} t^n e^{-at}$ , et la fonction  $g_n : t \mapsto t^n e^{-at}$  est intégrable sur  $[x; +\infty[$ , puisque dominée en  $+\infty$  par  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  par croissances comparées. Donc  $f_n$  est intégrable sur  $[x; +\infty[$ , et  $\int_x^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \frac{M}{n!} \int_x^{+\infty} t^n e^{-at} dt \leq \frac{M}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt$ . Or avec l'indication et en posant  $u = at$ ,  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{1}{a^n} \int_0^{+\infty} (at)^n e^{-at} dt = \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{a^{n+1}}$ . On a donc  $\int_x^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \frac{M}{a^{n+1}}$ . Or la série géométrique  $\sum \frac{1}{a^{n+1}}$  converge puisque  $a > 1$ , donc par comparaison, la série de terme général  $\int_x^{+\infty} |f_n(t)| dt$  converge.

Le théorème de d'intégration terme à terme s'applique donc et montre que la fonction  $F$  est intégrable sur  $[x; +\infty[$ , que la série  $\sum \int_x^{+\infty} f_n(t) dt$  converge, et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_n(t) dt = \int_x^{+\infty} F(t) dt = e^{-x} \int_x^{+\infty} e^{(1-a)t} f(t) dt.$$

En multipliant par  $e^{ax}$ , on conclut que la série  $\sum_{n \geq 0} U_a^{n+1}(f)(x)$  converge et a pour somme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_a^{n+1}(f)(x) = e^{(a-1)x} \int_x^{+\infty} e^{(1-a)t} f(t) dt.$$

**11.3.** La formule obtenue ci-dessus montre que  $S = U_b(f)$  pour  $b = a - 1 > 0$ .

**Remarque.** On peut illustrer ce résultat avec l'exemple traité en **3.4**. En effet pour  $f = f_r$  et  $a + r > 1$ , on a montré que  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1} f_r$ , donc  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \frac{a+r}{a+r-1} f_r - f_r = \frac{1}{a+r-1} f_r = U_{a-1}(f_r)$  vu **3.1**.

## Partie 2

1. Il est clair que si  $f_1, f_2$  et  $h \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  sont telles que  $f_1 = \underset{+\infty}{o}(f_2)$  et  $h$  ne s'annulant pas, alors  $hf_1 = \underset{+\infty}{o}(hf_2)$ . Ainsi si  $f = \underset{+\infty}{o}(g)$ , alors  $f_a f = \underset{+\infty}{o}(f_a g)$  et donc par l'encadré,  $\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left( \int_x^{+\infty} e^{-at} g(t) dt \right)$ . En multipliant cette relation par  $e^{ax}$ , on obtient  $U_a(f)(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (U_a(g)(x))$ , qui est le résultat voulu.
2. On rappelle que  $f_1 \underset{+\infty}{\sim} f_2 \iff f_1 - f_2 = \underset{+\infty}{o}(f_2)$ . Ainsi si  $f \underset{+\infty}{\sim} g$ , alors  $f - g = \underset{+\infty}{o}(g)$ , donc par **1**,  $U_a(f - g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$ . Or par linéarité de  $U_a$  (cf. **Partie 1, 2.2**), on a  $U_a(f - g) = U_a(f) - U_a(g)$ , donc  $U_a(f) - U_a(g) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$ , ce qui signifie  $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$ .
3. • Cas d'une limite nulle.  
Si  $\lim_{+\infty} f = 0$ , i.e. si  $f = \underset{+\infty}{o}(1)$ , alors par **1**,  $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(1))$ .  
Or les calculs faits en **Partie 1, 2.1** ou **3.1**, donnent  $U_a(1) = \frac{1}{a}$ , donc  $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{a}\right)$ , i.e.  $\lim_{+\infty} U_a(f) = 0$ .
- Cas d'une limite non nulle.  
Si  $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}^*$ , alors en appliquant le point précédent à  $f - \ell$ , ou la question **2** à l'équivalent  $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$ , on obtient en profitant de la linéarité de  $U_a$ ,  $\lim_{+\infty} U_a(f) = \frac{\ell}{a}$ .

On a montré dans tous les cas que si  $f$  converge en  $+\infty$ , alors  $U_a(f)$  aussi, avec  $\lim_{+\infty} U_a(f) = \frac{1}{a} \lim_{+\infty} f$ .

- 4.1. Soit  $\omega > 0$ . Les fonctions  $h_\omega$  et  $h'_\omega = -\omega h_{\omega+1}$  appartiennent à  $\mathcal{E}$ , donc par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent (la limite en  $+\infty$  du terme entre crochets est nulle par croissances comparées), on a pour  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} H_\omega(x) &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} h_\omega(t) dt \\ &= e^{ax} \left[ \frac{e^{-at}}{-a} h_\omega(t) \right]_x^{+\infty} - \frac{\omega}{a} e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} h_{\omega+1}(t) dt \\ &= \frac{1}{a} h_\omega(x) - \frac{\omega}{a} H_{\omega+1}(x) \end{aligned}$$

qui est l'égalité voulue.

- 4.2. On a manifestement  $h_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(h_\omega)$ , donc par **1**,  $H_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$ .

L'égalité de **4.1** donne donc  $\frac{1}{a} h_\omega = H_\omega + \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$ , i.e.  $\frac{1}{a} h_\omega \underset{+\infty}{\sim} H_\omega$ , qui est l'équivalent demandé.

- 5.1. Soit  $x \in I$ . Par linéarité de l'intégrale,  $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t} dt = \ln(x) + \int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t} dt$ .

Or pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $e^{-at} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-at)^k}{k!}$ , donc  $\frac{e^{-at}-1}{t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}$ .

Posons, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_k : t \mapsto \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!}$ . On a manifestement  $\|g_k\|_{\infty, [1; x]} = \frac{a^k x^{k-1}}{k!}$ , donc la série de fonctions  $\sum_{k \geq 1} g_k$  converge normalement sur  $[1; x]$ . On peut donc intervertir somme et intégrale sur le segment  $[1; x]$  :

$$\int_1^x \frac{e^{-at}-1}{t} dt = \int_1^x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^x \frac{(-a)^k t^{k-1}}{k!} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k \cdot k!} (x^k - 1).$$

On a donc bien  $\int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-a)^k}{k \cdot k!} (x^k - 1)$ .

**5.2.** Immédiat vu **5.1** puisque  $H_1(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt = e^{ax} \left( \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-at}}{t} dt \right)$  par relation de Chasles.

### Partie 3

- 1.** Par **Partie 1, 3.1**,  $U_a(f_r) = \frac{1}{a+r} f_r$ , donc  $\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t) dt$  converge lorsque  $r > 0$  (intégrale de référence).
- 2.** Par **Partie 2, 4.2**, on a  $H_\omega \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a} h_\omega$ , donc les deux intégrales  $\int_1^{+\infty} H_\omega(t) dt$  et  $\int_1^{+\infty} h_\omega(t) dt$  sont de même nature (car les fonctions en jeu sont continues et positives sur  $I = [x; +\infty[$ ).  
Or  $\int_1^{+\infty} h_\omega(t) dt$  converge  $\iff \omega > 1$  (intégrale de Riemann), donc  $\int_1^{+\infty} H_\omega(t) dt$  converge  $\iff \omega > 1$ .
- 3.1.** Par définition,  $U_a(f)$  est une solution de  $(E_a^f)$ , donc  $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$ , i.e. avec les notations de cette question,  $F' - aF + f = 0$ . En intégrant cette relation entre 1 et  $x \in I$ , on obtient, puisque  $\Phi' = F$  :  
$$F(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0, \text{ i.e. } \Phi'(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0.$$
- 3.2.** La fonction  $\varphi$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , donc elle y est continue (même de classe  $\mathcal{C}^1$ ). Et puisque  $f$  est positive, on a pour tout  $x \in I$ ,  $0 \leq \varphi(x) = \int_1^x f \leq \int_1^{+\infty} f$ , donc  $\varphi$  est bornée sur  $I$ . Ainsi,  $\varphi \in \mathcal{E}$ .
- 3.3.** Par **3.1**, on a  $\Phi(x) = \int_1^x F(t) dt = \frac{1}{a} (F(x) + \varphi(x) - F(1))$ .  
Or  $F = U_a(f)$  est bornée par construction, et  $\varphi$  est bornée par **3.2**, donc  $\Phi$  l'est.  
Par ailleurs comme  $f$  est positive,  $F = U_a(f)$  l'est aussi par **Partie 1, 7**, donc  $\Phi$  est croissante.  
Le théorème de la limite monotone implique alors que  $\Phi(x) = \int_1^x F(t) dt$  converge quand  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui est la définition de la convergence de  $\int_1^{+\infty} F(t) dt$ .
- 4.** On suppose  $f$  intégrable, donc la question **3** s'applique à  $|f|$  et montre que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} U_a(|f|)$  converge.  
Or par **Partie 1, 6**, on a  $|U_a(f)| \leq U_a(|f|)$ , donc par comparaison, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} |U_a(f)|$  converge, autrement dit  $U_a(f)$  est intégrale sur  $I$ .