

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$. On a $\chi_A = X^2 - (a+c)X + ac - b^2$.

$\chi_A(\sqrt{2}) = 0$, donc $(a+c)\sqrt{2} = 2 + ac - b^2 \in \mathbb{Q}$ et comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc $a+c = 0$ et $b^2 - ac = 2$.

Ce qui donne que $c = -a$ et $b^2 + a^2 = 1$. Il suffit donc de choisir $a = b = 1$ et $c = -1$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ répond à la question.

2. (a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$ admet $\sqrt{3}$ comme valeur propre, alors comme dans la question précédente, on a $Tr(A) = a+c = 0$, donc $\chi_A = X^2 - \lambda$ où $\lambda = -\det(A)$.

$\sqrt{3}$ est une racine de χ_A , donc $\lambda = 3$.

(b) D'après Fermat, on a $n^3 \equiv n \pmod{3}$, donc 3 divise $n(n-1)(n+1)$.

3 est premier donc 3 divise l'un des termes, ce qui donne que $n \equiv 0 \pmod{3}$ ou $n \equiv 1 \pmod{3}$ ou $n \equiv -1 \pmod{3}$ dans tous les cas $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ou $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

(c) Supposons qu'il existe un triplet d'entiers (x, y, z) premier dans leur ensemble tel que:

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

Alors $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

D'après la question précédente $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ si $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ et $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ et $x^2 + y^2 \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$ sinon. Donc $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ et $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

On a 3 est premier, donc divise x et y . En posant $x = 3x'$ et $y = 3y'$, on a $3(x'^2 + y'^2) \equiv 3z^2$.

Donc 3 divise z ce qui est absurde puisque x, y et z sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(d) Supposons qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$ admettant $\sqrt{3}$ comme valeur propre.

On a $Tr(A) = 0$, posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X^2 - a^2 - b^2$.

$\sqrt{3}$ est une racine, donc $a^2 + b^2 = 3$. Et comme $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Écrivons a et b sous formes irréductibles $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$ avec $(q, q') \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(p, p') \in \mathbb{Z}^2$, alors en remplaçant dans l'égalité précédente, on a:

$$(pq')^2 + (p'q)^2 = 3(qq')^2 \text{ qu'on peut écrire } u^2 + v^2 = 3w^2.$$

En simplifiant par leur pgcd, on peut supposer u, v et w sont premiers entre eux dans leur ensemble

Ce qui est absurde d'après la question précédente.

En conclusion: Il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$ admettant $\sqrt{3}$ comme valeur propre.

3. (a) Posons $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1A & B_2A \\ B_3A & B_4A \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 \\ AB_3 & AB_4 \end{pmatrix}.$$

Donc B et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ commuent si et seulement si A commute avec les matrices $B_i, 1 \leq i \leq 4$

$$B^2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^2 + B_2B_3 & B_1B_2 + B_2B_4 \\ B_1B_3 + B_3B_4 & B_4^2 + B_2B_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } B^2 = (q+1) \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \text{ si et seulement si } \begin{cases} B_1^2 + B_2B_3 = (q+1)I_n \\ B_4^2 + B_2B_3 = (q+1)I_n \\ B_1B_2 + B_2B_4 = 0 \\ B_1B_3 + B_3B_4 = 0 \end{cases}.$$

Comme $A^2 = qI_n$, il suffit donc de choisir $B_1 = A$ et $B_4 = -B_1, B_2 = B_3 = I_n$. Un choix possible est donc $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

- (b) D'après la question précédente, on a montré que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ vérifie $A^2 = qI_n$, alors il existe B par blocs, dont les blocs sont des polynômes en A tel que $B^2 = (q+1)I_n$.

Ainsi la matrice $M_1^{(1)} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $M_2^{(1)} = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{Q})$ et que $M_1^2 = qI_{2n}$, $M_2^2 = (q+1)I_{2n}$ avec M_1 diagonale par blocs.

Construisons maintenant 3 matrices $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)}$ et $M_3^{(2)}$ qui commutent deux à deux avec $(M_1^{(2)})^2 = qI_{4n}$, $(M_2^{(2)})^2 = (q+1)I_{4n}$ et $(M_3^{(2)})^2 = (q+2)I_{4n}$.

A partir de $M_2^{(1)}$ construit la matrice $M_3^{(2)} = \begin{pmatrix} M_2^{(1)} & I_{2n} \\ I_{2n} & -M_2^{(1)} \end{pmatrix}$, $M_2^{(2)} = \begin{pmatrix} M_2^{(1)} & 0 \\ 0 & -M_2^{(1)} \end{pmatrix}$ et $M_1^{(2)} = \begin{pmatrix} M_1^{(1)} & 0 \\ 0 & M_1^{(1)} \end{pmatrix}$. Les 3 matrices $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)}$ et $M_3^{(2)}$ qui commutent deux à deux

puisque $M_1^{(1)}$ et $M_2^{(1)}$ le sont de plus: $(M_1^{(2)})^2 = \begin{pmatrix} M_1^{(1)} & 0 \\ 0 & M_1^{(1)} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (M_1^{(1)})^2 & 0 \\ 0 & (M_1^{(1)})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qI_{2n} & 0 \\ 0 & qI_{2n} \end{pmatrix} = qI_{4n}$

De même $(M_2^{(2)})^2 = (q+1)I_{4n}$ et pour $(M_3^{(2)})^2 = (q+2)I_{4n}$ (d'après la question précédente) et par construction les matrices sont symétriques à coefficients dans \mathbb{Q} .

On voit bien comment on peut construire par récurrence des matrices pour construire des matrices de mêmes tailles qui sont symétriques à coefficients dans \mathbb{Q} et telles que $M_1^2 = qI_s$, $M_2^2 = (q+1)I_s, \dots$

Pour démarrer notre raisonnement on démarre de $I_n^2 = I_n$ ($q=1$), puis on construit les matrices. La rédaction de cette question n'est pas simple, je me suis contenté d'expliquer le principe.

- (c) Si on pose $q_i = \frac{a_i}{b_i}$, $(a_i, b_i) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux, $1 \leq i \leq d$.

L'égalité $M_i^2 = q_i I_n$ est équivalente à $(b_i M_i)^2 = a_i b_i I_n$.

Soit $d = \max_{1 \leq i \leq d} (a_i b_i)$ et on applique la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des matrices

$N_i \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ tel que $\forall i$, $N_i^2 = a_i b_i I_n$, on prenant $M_i = \frac{1}{b_i} N_i$, on a $M_i^2 = q_i I_n$.

4. (a) Supposons que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$, posons $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$, $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, premiers entre eux.

Alors $a^3 = 2b^3$. On a donc 2 divise a^3 et 2 est premier, donc 2 divise a . Puis en posant $a = 2a'$ On a $2a'^3 = b^3$ donc 2 divise b ce qui est absurde.

Le polynôme $X^3 - 2$ est de degré 3 et n'a pas de racine dans \mathbb{Q} , donc il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

$\chi_M \in \mathbb{Q}[X]$ donc soit $X^3 - 2$ et χ_M sont premiers entre eux, soit $X^3 - 2$ divise χ_M .

Et comme $\sqrt[3]{2}$ est une racine commune dans \mathbb{C} , donc χ_M et $X^3 - 2$ ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ et donc dans $\mathbb{Q}[X]$ (sinon avec Bezout on aboutit à une contradiction).

On en déduit que $X^3 - 2$ divise χ_M .

- (b) $X^3 - 2$ divise χ_M , donc $j\sqrt[3]{2}$ est une valeur propre de M , absurde, puisque le spectre de M est inclus dans \mathbb{R} (M est symétrique).

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{2}(A + A^T) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

On a $\chi_A = X^n - 1$, donc les valeurs propres sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

A est visiblement orthogonale et $A^T A = I_n = {}^T A A$ donc elles commutent.

A et A^T sont codiagonalisables puisque commutent et sont toutes les deux diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

De plus si $AX = \lambda X$, alors $A^T A X = \lambda A^T X$, ce qui donne que $A^T X = \frac{1}{\lambda} X = \bar{\lambda} X$ puisque ($|\lambda| = 1$) les valeurs propres sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que;

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1}) \text{ et } P^{-1}A^T P = \text{diag}(1, \bar{\omega}_n, \dots, \bar{\omega}_n^{n-1}) \text{ où } \omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$$

Donc $P^{-1}MP = \text{diag}\left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$, le spectre de M est donc

$$\text{Sp}(M) = \left\{ \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Partie II

6. $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + X^d$, donc $X^d P\left(\frac{1}{X}\right) = X^d \left(a_0 + \frac{a_1}{X} + \dots + \frac{1}{X^d}\right) = 1 + a_{d-1} X + \dots + a_0 X^d$.

On a $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$, donc $Q(X) = X^d \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right) = X^d \prod_{i=1}^d \left(\frac{1 - \lambda_i X}{X}\right) = \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)$

7. $a_0 \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de P .

On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\lambda_i}, 1 \leq i \leq d \right\}$, $f(x) = -\sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i x}$.

Pour $|\lambda_i x| < 1$, c'est-à-dire pour $|x| < \frac{1}{|\lambda_i|}$, on a $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^{n+1} x^n$

Soit $r = \min_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{1}{|\lambda_i|}\right)$, pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$f(x) = -\sum_{i=1}^d \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_i^{n+1} x^n \right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n+1} \right) x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} N_{n+1} x^n$$

8. (a) Supposons que a_0, a_1, \dots, a_{d-1} sont des éléments de \mathbb{Q} .

On a f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-r, r[$. f est une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{Q} , donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{Q} par suite $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{Q}$. D'autre part f est DSE sur $]-r, r[$, donc son DSE est égal à sa série de Taylor.

En particulier $N_{n+1} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \in \mathbb{Q}$.

(b) $\forall x \in]-r, r[$, $Q(x) f(x) = Q'(x)$ donc par la formule de Leibniz, on a:

$$\forall x \in]-r, r[, \forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k+1)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)}(x) f^{(i)}(x)$$

Donc pour $x = 0$, on a : $Q^{(k+1)}(0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)}(0) f^{(i)}(0)$

On a $Q'(0) = f(0) Q(0) = f(0) = -N_1 \in \mathbb{Q}$.

Supposons que $Q^{(i)}(0) \in \mathbb{Q}$ pour $0 \leq i \leq k$, alors d'après la relation précédente

$$Q^{(k+1)}(0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)}(0) f^{(i)}(0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} Q^{(k-i)}(0) i! N_{i+1} \in \mathbb{Q}, \text{ donc } Q \in \mathbb{Q}[X].$$

(c) Si 0 n'est pas racine c'est déjà fait .Si 0 est racine de P ,écrivons $P = X^k \prod_{i=1}^m (X - \mu_i)$ avec μ_1, \dots, μ_m les racines non nulles.

Ainsi $P \in \mathbb{Q}[X]$ si et seulement si $\prod_{i=1}^m (X - \mu_i) \in \mathbb{Q}[X]$. Et comme 0 n'est pas racine de

$\prod_{i=1}^m (X - \mu_i)$, alors $\prod_{i=1}^m (X - \mu_i) \in \mathbb{Q}[X]$ si et seulement si $\forall n, \sum_{i=0}^d \mu_i^n = \sum_{i=0}^m \mu_i^n \in \mathbb{Q}$.

9. Appliquons le résultat de la question précédente aux polynômes $Q = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (X - \alpha_i \beta_j)$ et $Q_1 = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (X - \alpha_i - \beta_j)$. On $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \in \mathbb{Q}[X]$ et $\prod_{j=1}^m (X - \beta_j) \in \mathbb{Q}[X]$, donc

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \alpha_i^k \in \mathbb{Q}$ et $\sum_{j=1}^m \beta_j^k \in \mathbb{Q}$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i \beta_j)^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^k \beta_j^k = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \right) \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^k \right) \in \mathbb{Q}$

Donc $Q \in \mathbb{Q}[X]$.

De même On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j)^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \alpha_i^p \beta_j^{k-p} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^p \beta_j^{k-p}.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^p \right) \left(\sum_{j=1}^m \beta_j^{k-p} \right) \in \mathbb{Q}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j)^k \in \mathbb{Q}$, donc $Q_1 \in \mathbb{Q}[X]$

Partie III

10. D'après le théorème spectral

11. (a) Notons \mathcal{A} l'ensemble des nombres totalement réel. On a $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ (par définition de \mathcal{A}).D'après la question 9. si $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, alors $a + b$ et ab sont deux éléments de \mathcal{A} .On a $-1 \in \mathcal{A}$, donc en combinant les deux propriétés on a $a - b \in \mathcal{A}$ et $ab \in \mathcal{A}$. \mathcal{A} est un sous-anneau de \mathbb{R} .Si $a \in \mathcal{A}$ est non nul, a racine de $P \in \mathbb{Q}[X]$ de racines toutes réelles , alors $Q(X) = X^d P \left(\frac{1}{X} \right) \in \mathbb{Q}[X]$ de racines toutes réelles et $Q \left(\frac{1}{a} \right) = 0$, donc $\frac{1}{a} \in \mathcal{A}$.

(b) C'est immédiat comme la question précédente.

12. • Si x est totalement positif, alors il existe un polynôme $P = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i) \in \mathbb{Q}[X]$ de racines

réelles Soit $R(X) = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i^2)$. Les racines de R sont positives de plus $R(x^2) = 0$.D'autre

part pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n (\alpha_i^2)^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{2k} \in \mathbb{Q}[X]$ (d'après 8.c), donc $R \in \mathbb{Q}[X]$.

- Supposons que x^2 est totalement positifs, alors x^2 est racine d'un polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^d (X - \alpha_i) \in \mathbb{Q}[X]$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$. Posons $\alpha_i = \beta_i^2$ et $R(X) = \prod_{i=1}^d (X^2 - \beta_i^2)$, x^2 est racine de P , donc x est racine de R et toutes les racines de R sont réelles. D'autre part $\sum_{i=1}^d (\beta_i^2)^k = \sum_{i=1}^d \alpha_i^k \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc $R \in \mathbb{Q}[X]$.

Quatrième partie

13. (a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^d$, alors ${}^tX S X = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j t(z^{i+j})$ et puisque x_1, \dots, x_d sont des nombres rationnels, donc et z^i sont totalement réels (puisque z l'est aussi), donc

$${}^tX S X = t \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_i x_j t z^{i+j} \right) = t \left(\left(\sum_{i=1}^d x_i z^i \right)^2 \right)$$

$\sum_{i=1}^d x_i z^i$ est totalement réel, donc $\left(\sum_{i=1}^d x_i z^i \right)^2$ est totalement positifs. Par suite

$${}^tX S X = t \left(\left(\sum_{i=1}^d x_i z^i \right)^2 \right) \geq 0.$$

Si $X \in \mathbb{Q}^n$ et ${}^tX S X = 0$, alors $\left(\sum_{i=1}^d x_i z^i \right)^2 = 0$ (puisque il est totalement positif) et donc

$\sum_{i=1}^d x_i z^i = 0$. Ce qui donne que $\sum_{i=1}^d x_i z^{i-1} = 0$, c'est-à-dire que $x_0 + x_1 z + \dots + x_d z^{d-1} = 0$. Supposons

que $(a_0, a_1, \dots, a_d) \neq (0, \dots, 0)$, alors $P = \sum_{i=0}^{d-1} x_{i+1} X^i \in \mathbb{Q}[X]$ est non nul et $P(z) = 0$ ce contredit

la définition de d est minimal, donc $(a_0, a_1, \dots, a_d) = (0, \dots, 0)$. Donc ${}^tX S X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{Q}^d$ avec $X \neq 0$.

- (b) On a $S : \mathbb{Q}^d \rightarrow \mathbb{Q}^d$, $X \mapsto S X$ est un endomorphisme. Soit $X \in \ker(S)$, on a $S X = 0$ donc $X^T S X = 0$ par suite $X = 0$ (d'après la question précédente). S est donc un isomorphisme donc $\det(S) \neq 0$. Donc S est inversible.

14. L'application $(X, Y) \mapsto {}^tX S Y$ est bilinéaire symétrique.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ non nul, \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , donc il existe $X_k = \begin{pmatrix} r_1^{(k)} \\ \vdots \\ r_d^{(k)} \end{pmatrix} \in (\mathbb{Q}^d)^{\mathbb{N}}$

tel que $X_k \rightarrow X$.

On a ${}^tX_k S X_k \geq 0$ et l'application $(X, Y) \mapsto {}^tX S Y$ est continue (car bilinéaire en dimension finie) donc par passage à la limite, on a ${}^tX S X \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^d$.

S est symétrique réelle donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

D'autre part si $\lambda \in Sp(S)$ et X est un vecteur propre associé à λ , alors $X^T S X = \lambda X^T X$ donc

$\lambda = \frac{X^T S X}{X^T X} > 0$ (car $0 \notin Sp(S)$). Donc les valeurs propres de S sont strictement positives

Si X_1, \dots, X_d une base orthonormée formée de vecteurs propres de S , X_i associé à λ_i et $X = \sum_{i=1}^d \mu_i X_i$, alors

$$X^T S X = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mu_i^2 \geq 0 \text{ et puisque } \lambda_i > 0 \text{ donc } X^T S X = 0 \text{ si et seulement si } \mu_i = 0 \forall i \text{ donc si } X = 0.$$

L'application $(X, Y) \mapsto {}^t X S Y$ est bilinéaire symétrique définie positive, donc définit bien un produit scalaire.

15. (a) On considère la base canonique de \mathbb{Q}^d puis on orthogonalise (comme par Gram-Schmidt) On

$$\text{pose } e'_1 = e_1, e'_2 = e_2 - \frac{B(e_2, e'_1)}{B(e'_1, e'_1)} e'_1 \text{ et } e'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{B(e_k, e'_i)}{B(e'_i, e'_i)} e'_i. \text{ On voit bien que } B(e'_1, e'_2) =$$

$$B(e_2, e'_1) - \frac{B(e'_1, e_2)}{B(e'_1, e'_1)} B(e'_1, e'_1) = B(e'_1, e_2) - B(e'_1, e_2) = 0.$$

Supposons que $B(e'_i, e'_j) = 0$ si $i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq k-1$, alors on a pour $1 \leq j \leq k$ $B(e'_j, e'_k) =$

$$B(e_k, e'_j) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{B(e_k, e'_i)}{B(e'_i, e'_i)} B(e'_i, e'_j) = B(e_k, e'_j) - B(e_k, e'_j) = 0. \text{ Donc } B(e'_i, e'_j) = 0 \text{ pour}$$

$i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$. Ainsi $(e'_1, e'_2, \dots, e'_d)$ est une base de \mathbb{R}^d telle que $B(e'_i, e'_j) = 0$ pour $i \neq j, 1 \leq i, j \leq d$.

(b) Soit $X, Y \in \mathbb{R}^d$, $X = \sum_{i=1}^d x_i e_i = \sum_{i=1}^d x'_i e'_i$. On a $X = P X'$ où P est la matrice de passage de la base canonique dans la base \mathcal{B}' . Par bilinéarité, on a

$$B(X, Y) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x'_i x'_j B(e'_i, e'_j) = \sum_{i=1}^d x_i'^2 B(e'_i, e'_i) = \sum_{i=1}^d q_i x_i'^2 \text{ où } q_i = B(e'_i, e'_i) > 0.$$

Posons $D = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_d)$, alors $B(X, Y) = X'^T D X'$. D'autre part

$$B(X, Y) = X^T S Y = (P X')^T S (P Y') = X'^T P^T S P Y'$$

Donc pour tout $(X', Y') \in \mathbb{R}^d$, $X'^T P^T S P Y' = X'^T D Y'$ donc $P^T S P = D = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_d)$.

16. On a $\chi_M = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{d-1} \end{vmatrix}$, à l'aide de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + X L_2 + \dots + X^{d-1} L_d$

On a $\chi_M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{d-1} \end{vmatrix}$ puis on développe par rapport à la dernière colonne

Ce qui donne $\chi_M = (-1)^{d+1} P(X) \begin{vmatrix} -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = Z(X) = X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \dots - a_0.$

17. (a) Posons $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1d} \\ s_{21} & s_{22} & \ddots & s_{2d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{d1} & \ddots & \ddots & s_{dd} \end{pmatrix}$ avec $s_{ij} = s_{ji}$. Il s'agit de vérifier que $(SM)^T = SM$

c'est-à-dire que $M^T S = SM$. Considérons la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_d) de \mathbb{R}^d (identifié à $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$).

On a pour $1 \leq j \leq d-1$,

$$M^T S e_j = M^T \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{dj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & & a_{d-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{dj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{2j} \\ s_{3j} \\ \vdots \\ s_{d-1,j} \\ a_0 s_{1j} + \dots + a_{d-1} s_{dj} \end{pmatrix}$$

On a $a_0 s_{1j} + \dots + a_{d-1} s_{dj} = a_0 t(z^{j+1}) + \dots + a_{d-1} t(z^{j+d}) = t(a_0 z^{j+1} + \dots + a_{d-1} z^{j+d})$ (les $a_i \in \mathbb{Q}$ et $z^i \in \mathcal{R}$). D'autre part on a $a_0 z^{j+1} + \dots + a_{d-1} z^{j+d} = z^{j+1} (a_0 + a_1 z + \dots + a_{d-1} z^{d-1}) = z^{j+1} \times z^d = z^{j+d+1}$, donc $a_0 s_{1j} + \dots + a_{d-1} s_{dj} = t(z^{j+d+1}) = s_{d,j+1}$. Or $s_{i,j} = t(z^{i+j}) = s_{i-k,j+k}$

$$\text{pour } k \leq i, \text{ donc } M^T S e_j = \begin{pmatrix} s_{2,j} \\ s_{3,j} \\ \vdots \\ s_{d-1,j} \\ s_{d,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,j+1} \\ s_{2,j+1} \\ \vdots \\ s_{d-1,j+1} \\ s_{d,j+1} \end{pmatrix} \text{ et } S M e_j = S e_{j+1} = \begin{pmatrix} s_{1,j+1} \\ s_{2,j+1} \\ \vdots \\ s_{d-1,j+1} \\ s_{d,j+1} \end{pmatrix}.$$

On a alors $M^T S e_j = S M e_j$ pour tout $j \leq d-1$ et par un calcul analogue, on a $M^T S e_d = S M e_d$. Les matrices $M^T S$ et SM ont les mêmes colonnes donc sont égales.

- (b) On a $S = R^T R$, S est inversible donc R aussi. On a

$$R M R^{-1} = (R^{-1})^T (R^T R) M R^{-1} = (R^{-1})^T (SM) R^{-1}$$

donc $(R M R^{-1})^T = [(R^{-1})^T S M R^{-1}]^T = (R^{-1})^T (SM)^T R^{-1} = (R^{-1})^T (SM) R^{-1}$ (SM est symétrique). Ce qui entraîne que $(R M R^{-1})^T = R M R^{-1}$, d'où la symétrie de la matrice $R M R^{-1}$.

18. On a q_1, q_2, \dots, q_d sont des nombres rationnels strictement positifs, donc d'après la question **3.c**, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices M_1, M_2, \dots, M_d éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $M_i^2 = q_i I_n$.

$$\text{Posons } \tilde{S} = \begin{pmatrix} q_1 S & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 S & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_d S \end{pmatrix}, \tilde{P} = \begin{pmatrix} P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{R} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_d \end{pmatrix} \tilde{P}$$

$$\tilde{S} \text{ est symétrique et } \tilde{S} = \tilde{P}^T \begin{pmatrix} q_1 I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_d I_n \end{pmatrix} \tilde{P}.$$

\tilde{R} est inversible. D'après la question précédente $\tilde{R} \tilde{M} \tilde{R}^{-1}$ est symétrique et $\tilde{R} \tilde{M} \tilde{R}^{-1} \in \mathcal{M}_{dn}(\mathbb{Q})$

M, \tilde{M} et $\tilde{R} \tilde{M} \tilde{R}^{-1}$ ont le même spectre et comme z est une valeur propre de M donc aussi de $\tilde{R} \tilde{M} \tilde{R}^{-1}$ qui est une matrice symétrique à coefficients dans \mathbb{Q} .