

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II, série TSI, concours CCP 2007

Problème 1

1. Il est clair que
- φ
- est bilinéaire et symétrique. Montrons que
- φ
- est définie positive.

Soit $P \in E$. Tout d'abord $\varphi(P, P) = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geq 0$.

Si $\varphi(P, P) = 0$, on a alors à la fois $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$. Comme $\deg(P) \leq 2$, la formule de Taylor permet d'écrire $P = P(0) + XP'(0) + \frac{X^2}{2}P''(0) = 0$.

D'où φ est définie positive et :

 φ est un produit scalaire

2. $\begin{aligned} \langle 1, X \rangle &= 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \\ \langle 1, X^2 \rangle &= 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 2 = 0 \\ \langle X, X^2 \rangle &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0 \end{aligned}$

D'où :

 B_c est une base orthogonale de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Notons $\| \cdot \|$ la norme associée à φ .

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1 \Rightarrow \|1\| = 1 \\ \langle X, X \rangle &= 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1 \Rightarrow \|X\| = 1 \\ \langle X^2, X^2 \rangle &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4 \Rightarrow \|X^2\| = 2 \end{aligned}$$

D'où :

 Une base orthonormée de E est $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$

3. $\begin{aligned} \varphi(P, Q) &= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \\ &= aa' + bb' + 4cc' \end{aligned}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 4c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + 4cc'.$$

D'où :

$$\varphi(P, Q) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

4. Soit Ω la matrice de passage de B_c à $B = (1, X, \frac{X^2}{2})$: $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Notons A' la

matrice de u dans B ; on a alors $A' = \Omega^{-1}A\Omega$ et A' est la matrice de u dans une base orthonormée. D'où :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &\Leftrightarrow u \text{ conserve le produit scalaire} \\ &\Leftrightarrow u \text{ est une isométrie vectorielle} \\ &\Leftrightarrow {}^t A' A' = I_3 \\ &\Leftrightarrow {}^t \Omega {}^t A (\Omega^{-1}) \Omega^{-1} A \Omega = I_3 \\ &\Leftrightarrow {}^t A ({}^t (\Omega^{-1}) \Omega^{-1}) A = {}^t (\Omega^{-1}) \Omega^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Or } {}^t (\Omega^{-1}) \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = S$$

On a montré :

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E^2, \langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle \Leftrightarrow {}^tASA = S}$$

5. Soit $A \in G$. On a alors $\det({}^tASA) = \det(S) \Rightarrow 4\det(A)^2 = 4$. D'où :

$\det(A) = \pm 1 \neq 0$ et $A \in GL_3(\mathbb{R})$. Montrons donc que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

- ${}^tI_3SI_3 = S \Rightarrow I_3 \in G : G \neq \emptyset$.

- Soient $A, B \in G$.

${}^t(AB)S(AB) = {}^tB({}^tASA)B = {}^tBSB = S$; d'où $AB \in G$ et G est stable pour la multiplication des matrices.

- Soit $A \in G$; ${}^tASA = S \Rightarrow ({}^tA)^{-1}SA^{-1} = S$
 $\Rightarrow {}^t(A^{-1})SA^{-1} = S$
 $\Rightarrow A^{-1} \in G$

D'où :

$$\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } (GL_3(\mathbb{R}), \times)}$$

6. a) Soit $P \in E$; alors $\deg(P(1-X)) = \deg(P)$ et $v(P)$ est bien dans E .

D'autre part, $\forall P, Q \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$v(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1-X) = \lambda P(1-X) + \mu Q(1-X) = \lambda v(P) + \mu v(Q)$. D'où :
 $\boxed{v \text{ est un endomorphisme de } E}$

b) $v(1) = 1$

$v(X) = 1 - X$

$v(X^2) = 1 - 2X + X^2$

D'où :

$$\boxed{M_{B_c}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Notons A la matrice précédente. On a alors :

$$\begin{aligned} {}^tASA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &\neq S \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{v \text{ n'est pas une isométrie vectorielle pour le produit scalaire } \varphi}$$

d) $\forall P \in E, v \circ v(P) = v(P(1-X)) = P(1 - (1-X)) = P$; d'où :

$$\boxed{v \text{ est involutif; c'est un isomorphisme de } E \text{ et } v^{-1} = v.}$$

7. a) La dérivation des polynômes étant linéaire et diminuant le degré,

ψ et ψ_1 sont clairement des endomorphismes de E .

$$\begin{aligned}
\text{b) } \psi(1) &= 1 \\
\psi(X) &= 1 + X \\
\psi(X^2) &= 2 + 2X + X^2 \\
\psi_1(1) &= 1 \\
\psi_1(X) &= -1 + X \\
\psi_1(X^2) &= -2X + X^2
\end{aligned}$$

D'où :

$$M_{B_C}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_{B_C}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \forall P \in E, \psi \circ \psi_1(P) = \psi(P - P') = (P - P') + (P' - P'') + P'' \text{ car } P^{(3)} = 0. \text{ D'où } \psi \circ \psi_1(P) = P \text{ et :}$$

$$\boxed{\psi \circ \psi_1 = Id_E}$$

L'on en déduit que $\det(\psi) \times \det(\psi_1) = 1$, que ψ et ψ_1 appartiennent à $GL(E)$ et que

$$\boxed{\psi_1^{-1} = \psi}$$

d) Soit P solution polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 de l'équation. On a alors :

$$\begin{aligned}
\psi_1(P) &= X^2 + 5X + 9 \Leftrightarrow P = \psi(X^2 + 5X + 9) \\
&\Leftrightarrow P = (X^2 + 5X + 9) + (2X + 5) + 2 \\
&\Leftrightarrow P = X^2 + 7X + 16
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une solution particulière de l'équation différentielle est donc } \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 + 7x + 16 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\text{La solution générale de l'équation différentielle est donc } \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2 + 7x + 16 + \lambda e^x \end{matrix} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

8. a) Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A . Pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\langle C_1, C_2 \rangle &= \frac{1}{9}(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 - 3) = 0 \\
\langle C_1, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-1 + \sqrt{3} + 3 - 1 - 1 - \sqrt{3}) = 0 \\
\langle C_2, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(3 - 1 - 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1) = 0 \\
\langle C_1, C_1 \rangle &= \frac{1}{9}(1 + 4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}) = 1 \\
\langle C_2, C_2 \rangle &= \frac{1}{9}(4 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - 2\sqrt{3}) = 1 \\
\langle C_3, C_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} + 1) = 1
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{A \text{ est une matrice orthogonale.}}$$

b) Soit $P = x + yX + z\frac{X^2}{2} \in E$. Résolvons $r(P) = P$.

$$\begin{aligned}
r(P) = P &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 \\ 1 - \sqrt{3} & 1 & -1 - \sqrt{3} \\ -1 - \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + (1 + \sqrt{3})y + (\sqrt{3} - 1)z = 0 \\ (1 - \sqrt{3})x - 2y - (1 + \sqrt{3})z = 0 \\ -(1 + \sqrt{3})x + (\sqrt{3} - 1)y - 2z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc :

$$r(P) = P \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + (1 + \sqrt{3})y + (\sqrt{3} - 1)z = 0 \\ y(-4 - 2) + z(-2 - 2\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})^2) = 0 \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 + (1 - \sqrt{3})L_1) \\ y(-2\sqrt{3} + 2 + 4 + 2\sqrt{3}) + z(4 + 2) = 0 \quad (L_3 \leftarrow -2L_3 + (1 + \sqrt{3})L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -y \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants est donc $\Delta = Vect\{1 + X - \frac{X^2}{2}\}$

c) L'ensemble des invariants étant une droite, r est une rotation vectorielle.

Son axe est Δ , ensemble des invariants.

Orientons Δ par $P_0 = 1 + X - \frac{X^2}{2}$ et notons θ l'angle de r .

$$\begin{aligned} - \operatorname{Tr}(A) &= 2 \cos(\theta) + 1 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} [\pi] \end{aligned}$$

- Afin de préciser l'angle, prenons un polynôme non colinéaire à P_0 , 1 par exemple, et calculons le produit mixte $[1, r(1), P_0]$ qui est du signe de $\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned} [1, r(1), P_0] &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{3}}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1 - \sqrt{3}}{3} & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{3} > 0 \end{aligned}$$

D'où : $\sin(\theta) > 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

r est donc une rotation d'axe Δ et d'angle $\frac{\pi}{2} [2\pi]$ pour l'orientation choisie.

Problème 2

1. - (C) est définie sur $\mathbb{R}$.

$$- \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} - \text{on peut restreindre l'étude à } \mathbb{R}^+ \\ - (C) \text{ est symétrique par rapport à } (Ox) \end{array} \right.$$

(C) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, x' = 2t \text{ et } y' = 3t^2$$

D'où le tableau de variations :

t	0	$+\infty$
x'	0	+
x	0	$\nearrow +\infty$
y	0	$\nearrow +\infty$
y'	0	+

- Étude du point stationnaire en 0 :

Au voisinage de 0, $\overrightarrow{OM}(t) = t^2 i + t^3 j$. (i, j) étant libre, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce et la tangente est orientée par i .

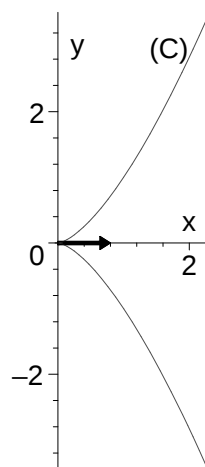
- Étude de la branche infinie en $+\infty$:

$\frac{y}{x} = t$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$: d'où la branche infinie est une branche parabolique de direction asymptotique $Vect\{j\}$

Tableau de valeurs approchées :

y	0	1	2.3	4
x	0	1	3.4	8

Représentation :



2. a) On reconnaît l'équation d'une parabole d'axe (Ox) , de sommet $\Omega\left(\frac{4}{27}, 0\right)$, de paramètre

$$p = \frac{2}{27}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(t^2 - \frac{2}{9}\right)^2 \left(t^2 + \frac{4}{9}\right) &= \left(t^4 - \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{9^2}\right) \left(t^2 + \frac{4}{9}\right) \\ &= t^6 + t^2 \left(\frac{4}{9^2} - \frac{4}{9}\right) + \frac{16}{9^2 \times 3^2} \\ &= t^6 - \frac{12}{9^2}t^2 + \frac{16}{27^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t^6 - \frac{4}{27}t^2 + \frac{16}{27^2} = \left(t^2 - \frac{2}{9}\right)^2 \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } M(x, y) \in (C) \cap (\Gamma) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ y^2 = \frac{4}{27} \left(x - \frac{4}{27}\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t^6 - \frac{4}{27}t^2 + \frac{16}{27^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \left(t^2 - \frac{2}{9}\right)^2 \left(t^2 + \frac{4}{9}\right) = 0 \text{ (d'après la question 2)a)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{9}, \pm \frac{2\sqrt{2}}{27}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$(C) \cap (\Gamma) = \left\{ A \left(\frac{2}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{27} \right), B \left(\frac{2}{9}, \frac{-2\sqrt{2}}{27} \right) \right\}$$

d) Notons T_C la tangente en A à (C) et T_Γ la tangente en A à (Γ) .

La pente a_C de T_C est $\frac{y'}{x'} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)$. Or $\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{y'}{x'}(t) = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$. D'où :

$$a_C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. (Γ) a pour équation $f(x, y) = 0$.
 $(x, y) \rightarrow 2p(x - 2p) - y^2$

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = 2pi - 2yj \neq \overrightarrow{0}$ (où $p = \frac{2}{27}$ est défini ci-

dessus). D'où au point A de (Γ) , la normale est dirigée par $\overrightarrow{\text{grad}} f\left(\frac{2}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{27}\right) = 2p(i - \sqrt{2}j)$.

La tangente est orientée par un vecteur orthogonal à $2p(i - \sqrt{2}j) : \sqrt{2}i + j$ et a donc pour

pente :

$$a_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

T_C et T_Γ passent toutes deux par A et ont même pente, donc :

En A , (C) et (Γ) ont même tangente.

Cette tangente a pour équation : $y - \sqrt{2}p = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 3p)$.

D'où :

$$(T) \text{ coupe } (Ox) \text{ en } F \text{ de coordonnées } (p, 0) = \left(\frac{2}{27}, 0 \right)$$

e) La normale (N) passe par $A \left(\frac{2}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{27} \right)$ et est dirigée par $i - \sqrt{2}j$ (d'après la question précédente). Elle a donc pour équation :

$$y - \frac{2\sqrt{2}}{27} = -\sqrt{2} \left(x - \frac{2}{9} \right) \Leftrightarrow \sqrt{2}x + y - \frac{8\sqrt{2}}{27} = 0.$$

Soit $M(x, y) \in P$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (C) \cap (N) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \sqrt{2}x + y - \frac{8\sqrt{2}}{27} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t^3 + \sqrt{2}t^2 - \frac{8\sqrt{2}}{27} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \left(t - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \left(t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}t + \frac{8}{9} \right) = 0 \end{cases} \quad ((N) \text{ passe par } A) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in (C) \cap (N) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ \left(t - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \left(t + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ t = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ ou } t = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$M(x, y) \in (C) \cap (N) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{9} \text{ et } y = \frac{2\sqrt{2}}{27} \text{ (} t = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{) ou} \\ x = \frac{8}{9} \text{ et } y = -\frac{16\sqrt{2}}{27} \text{ (} t = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{)} \end{cases} .$$

Donc :

$$(N) \cap (C) = \{A, D\} \text{ où } D \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{8}{9}, -\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)$$

La tangente en D à (C) a pour pente $\frac{y'}{x'} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\sqrt{2}$. C'est la même que celle de (N) qui passe aussi par D .

Donc :

(N) est tangente en D à (C) .

f) Soit $M(x, y) \in P$.

$$\begin{aligned}
 M(x, y) \in (\Gamma) \cap (N) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2p(x - 2p) - y^2 = 0 \\ \sqrt{2}x + y - 4p\sqrt{2} = 0 \end{cases} . \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p + \frac{y^2}{2p} \\ \sqrt{2} \left(2p + \frac{y^2}{2p}\right) + y - 4p\sqrt{2} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p + \frac{y^2}{2p} \\ y^2 + y\sqrt{2}p - 4p^2 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2p + \frac{y^2}{2p} \\ (y - p\sqrt{2})(y + 2\sqrt{2}p) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow (x, y) = (3p, p\sqrt{2}) \text{ ou } (x, y) = (6p, -2p\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

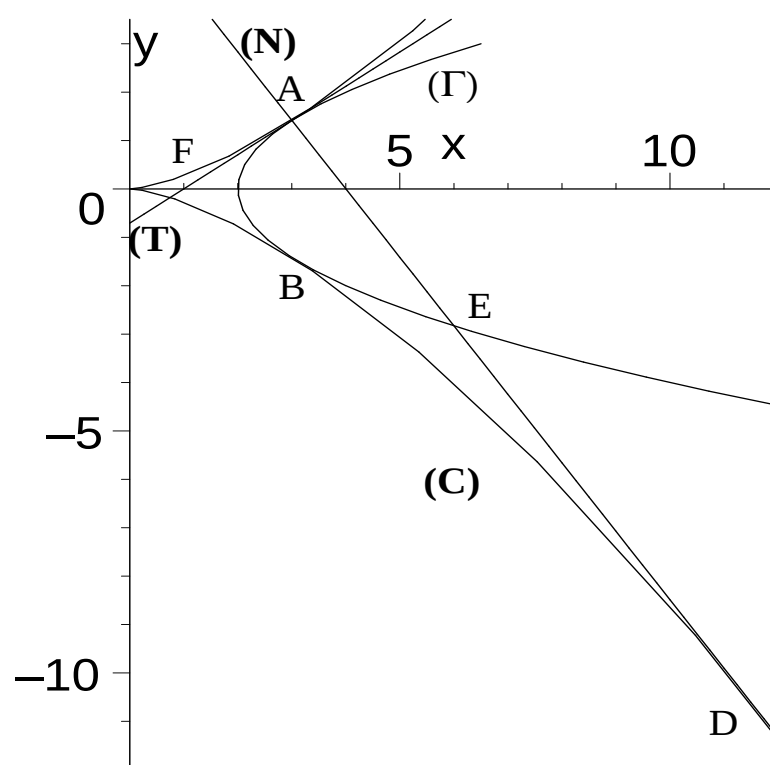
Donc :

$$E \text{ a pour coordonnées } (6p, -2p\sqrt{2}) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{4\sqrt{2}}{27}\right)$$

3. Remarquons que les valeurs approchées des coordonnées dans le repère donné des points remarquables sont données par le tableau :

A	B	D	E	F
3	3	12	6	1
1.4	-1.4	-11.3	-2.8	0

ce qui donne la représentation :



ΔΔΔ

Rédigé par
 Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
 Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc
 Tel. 0296639414
 Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr