

## ENS BCPST 2010

### 1) La diffusion.

1°) Soit  $w(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ .  $\frac{dw}{dx}(x) = -\frac{n\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ ,  $\frac{dw}{dx}(0) = -\frac{n\pi}{L}\sin(0) = 0$ ,

$\frac{dw}{dx}(L) = -\frac{n\pi}{L}\sin(n\pi) = 0$ .  $\frac{d^2w}{dx^2}(x) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ . On a donc bien une fonction

propre, la valeur propre associée étant  $-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ .

2°) (1.1) devient  $\alpha'(t)\cos\left(\frac{n_0\pi}{L}x\right) = -d\alpha(t)\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{n_0\pi}{L}x\right)$ . Cette relation entraîne (en

prenant  $x=0$ )  $\alpha'(t) = -d\alpha(t)\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2$ . Réciproquement cette équation différentielle implique

bien (1.1). On en tire  $u(t,x) = \cos\left(\frac{n_0\pi}{L}x\right)\exp\left(-d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 t\right)$ , les conditions aux bords (1.2)

sont vérifiées (calcul analogue à celui du 1°)) et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t,x) = 0$  si  $n_0 > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t,x) = 1$  sinon.

3°) Posons si  $t \geq 0$   $I(t) = \int_0^L (u(t,x) - v(t,x))^2 dx$ . Observons que  $I(t) \geq 0$ , et que, vu les conditions initiales,  $I(0) = 0$ . Puis, en dérivant sous le signe somme comme l'énoncé le suggère, on tire

$$\frac{dI}{dt} = \int_0^L 2(u(t,x) - v(t,x)) \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) \right) dx = \int_0^L 2d(u(t,x) - v(t,x)) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \right) dx$$

qui par intégration par parties devient

$$\frac{dI}{dt} = \left[ 2d(u(t,x) - v(t,x)) \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \right) \right]_{x=0}^{x=L} - 2d \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx, \text{ soit en}$$

tenant compte des conditions aux bords,  $\frac{dI}{dt} = -2d \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \right)^2 dx$  et donc  $\frac{dI}{dt} \leq 0$ .

$I$  est donc décroissante, or  $I(t) \geq 0$  et  $I(0) = 0$ , donc  $I$  est identiquement nulle. Etant l'intégrale d'une fonction positive continue, celle-ci est identiquement nulle, ce qui prouve bien que  $u=v$ .

4°) En s'inspirant des résultats du 2°), on considère la fonction  $u$  définie par

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right). \text{ On vérifie qu'elle a toutes les propriétés requises}$$

et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = \alpha_0$ .

5°) Chacun des harmoniques de la donnée initiale se trouve multiplié par une exponentielle tendant vers zéro. Ces harmoniques sont donc d'amplitude de plus en plus faible, et l'on constate, au vu des coefficients intervenant dans les formules, que cet étouffement est plus rapide si l'harmonique de départ a une fréquence  $\frac{n}{2L}$  élevée.

**2) Une équation de réaction-diffusion.**

1°)a)  $f(u(t, x_0)) = f(u(t, x_0)) - f(u_0) = f'(u_0)(u(t, x_0) - u_0) + o(u(t, x_0) - u_0)$ . Si l'on pose  $\bar{u}(t) = u(t, x_0) - u_0$ , le second membre de (2.4) s'approche donc, tant que  $\bar{u}(t)$  est petit, par  $f'(u_0)\bar{u}(t)$ , le premier membre est égal à  $\frac{d\bar{u}}{dt}(t)$ , on obtient donc bien (2.5).

On en tire  $\bar{u}(t) = \bar{u}(0) \exp(f'(u_0)t)$ , avec  $\bar{u}(0) = u_p(x_0)$ . La condition de stabilité asymptotique est donc  $f'(u_0) < 0$ .

b)i) En appliquant la définition d'une dérivée et d'une limite, on obtient l'existence d'un

intervalle  $[u_0 - \eta, u_0 + \eta]$  sur lequel  $\frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} - f'(u_0) < -\frac{f'(u_0)}{2}$ , ce qui équivaut à

$$\frac{f(u)}{u - u_0} < \frac{f'(u_0)}{2} \text{ ou } f(u)(u - u_0) < \frac{f'(u_0)}{2}(u - u_0)^2, (u - u_0)^2 \text{ étant positif.}$$

ii) Notons bien d'abord qu'il est licite de parler du premier instant où  $u(t, x_0) = u_0 + \eta$  si effectivement il existe de tels instants. La justification précise n'est pas évidente du tout pour des étudiants de BCPST : considérer la borne inférieure de ces valeurs, montrer que cette borne est un plus petit élément en utilisant la continuité de  $u$ , on reste certes dans les limites

du programme, mais la mise en œuvre serait délicate pour la grande majorité des étudiants..... L'auteur adopte donc une démarche prudente en admettant implicitement l'existence de cette plus petite valeur ! (Mais envisager  $t^*$  infini n'a guère de sens...)<sup>o</sup>

Si  $t^*$  est fini et si par exemple  $u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$ , on a, d'après i),  $\eta f(u(t^*, x_0)) \leq \eta^2 f'(u_0)/2$ , donc  $f(u(t^*, x_0)) < 0$ , et  $\frac{\partial u}{\partial t}(t^*, x_0) < 0$ .

Soit  $0 \leq t < t^*$ . Si  $u(t, x_0) \geq u(t^*, x_0)$ , comme  $u(0, x_0) = u_0 < u(t^*, x_0)$ ,  $\exists 0 \leq s < t^*$  tel que  $u(s, x_0) = u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$ , en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, ce qui contredit la définition de  $t^*$ . Ainsi  $\forall 0 \leq t < t^*$ ,  $u(t, x_0) < u(t^*, x_0)$ , donc  $\forall 0 \leq t < t^*$ ,  $\frac{u(t, x_0) - u(t^*, x_0)}{t - t^*} > 0$ , et par passage à la limite on arrive à

$\frac{\partial u}{\partial t}(t^*, x_0) \geq 0$ . Contradiction. De même on ne peut avoir  $u(t^*, x_0) = u_0 - \eta$ .  $t^*$  est donc infini.

iii) On a  $u_0 - \eta < u(0, x_0) < u_0 + \eta$ ,  $\forall t \geq 0$   $u(t, x_0) \neq u_0 \pm \eta$ , en vertu du théorème des valeurs intermédiaires on peut conclure que  $\forall t \geq 0$   $u_0 - \eta < u(t, x_0) < u_0 + \eta$ .

$$v'(t) = 2(u(t, x_0) - u_0) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_0) = 2(u(t, x_0) - u_0) f(u(t, x_0)) \leq (u(t, x_0) - u_0)^2 f'(u_0) = f'(u_0) v(t)$$

d'après i) En utilisant le changement de variable proposé, on obtient  $\lambda'(t) \exp(f'(u_0)t) + \lambda(t) f'(u_0) \exp(f'(u_0)t) \leq f'(u_0) \lambda(t) \exp(f'(u_0)t)$ , soit  $\lambda'(t) \leq 0$ . On a donc une fonction décroissante, et  $\forall t \geq 0$   $0 \leq v(t) \leq \lambda(0) \exp(f'(u_0)t)$ . La stabilité asymptotique en découle.

2°)a) (2.6) s'établit comme (2.5).

Recherchons (on admet qu'elle est unique, ce que ne mentionne pas l'énoncé) la solution de (2.6) sous la forme  $\bar{u}(t, x) = \alpha(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ , s'inspirant en cela de la première partie.

$$\text{On obtient } \alpha'(t) = f'(u_0)\alpha(t) - d\alpha(t)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \text{ puis}$$

$$\bar{u}(t, x) = \alpha_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(f'(u_0)t - d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \text{ ce qui assure la stabilité asymptotique.}$$

b) L'existence de  $t^*$  serait là vraiment hors programme, car elle nécessite des arguments d'uniforme continuité pour assurer la continuité de  $t \rightarrow M(t) = \sup_{x \in [0, L]} u(t, x)$  et de  $t \rightarrow m(t) = \inf_{x \in [0, L]} u(t, x)$ . Néanmoins la continuité de ces deux fonctions est indispensable pour la suite.....

Remarquons que  $u_0 - \eta < m(0) \leq M(0) < u_0 + \eta$ , ces bornes étant atteintes, propriété des fonctions continues sur un segment.

Supposons par exemple que  $\sup_{x \in [0, L]} u(t^*, x) = u_0 + \eta$ .

$\exists x_0 \in [0, L]$  tel que  $\sup_{x \in [0, L]} u(t^*, x) = u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$ . Comme au 1°), on a  $f(u(t^*, x_0)) < 0$ .

$x \rightarrow u(t^*, x)$  admet un maximum en  $x_0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(t^*, x_0) = 0$ , (même si  $x_0 = 0$  ou  $x_0 = L$ , vu les conditions aux bords), la dérivée seconde en ce maximum est donc négative ou nulle,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^*, x_0) \leq 0$ , et par conséquent  $\frac{\partial u}{\partial t}(t^*, x_0) < 0$ .

Or si  $0 \leq t < t^*$ ,  $\sup_{x \in [0, L]} u(t, x) < \sup_{x \in [0, L]} u(t^*, x)$ , en raisonnant comme au 1°), et en utilisant la continuité de la fonction  $M$ .... Donc  $\forall 0 \leq t < t^*$ ,  $u(t, x_0) \leq \sup_{x \in [0, L]} u(t, x) < \sup_{x \in [0, L]} u(t^*, x) = u(t^*, x_0)$ , et par conséquent comme au 1°)

$\frac{\partial u}{\partial t}(t^*, x_0) \geq 0$ . Contradiction. De même si  $\inf_{x \in [0, L]} u(t^*, x) = u_0 - \eta$ .  $t^*$  est donc infini.

En utilisant la continuité des fonctions  $m$  et  $M$  et le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que  $\forall t \geq 0$   $u_0 - \eta < m(t) \leq M(t) < u_0 + \eta$ , d'où  $\forall t \geq 0, \forall x \in [0, L]$   $u_0 - \eta < u(t, x) < u_0 + \eta$ .

En utilisant toujours le résultat admis au 1°)3°) on obtient

$$\begin{aligned}
 V'(t) &= \int_0^L 2(u(t, x) - u_0) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx = \int_0^L 2(u(t, x) - u_0) f(u(t, x)) dx + \int_0^L 2d(u(t, x) - u_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx \\
 &= \int_0^L 2d(u(t, x) - u_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx = \left[ 2d(u(t, x) - u_0) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L 2d \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx = \\
 &= - \int_0^L 2d \left( \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \leq 0 \\
 &= \int_0^L 2(u(t, x) - u_0) f(u(t, x)) dx \leq \int_0^L (u(t, x) - u_0)^2 f'(u_0) dx = f'(u_0) V(t)
 \end{aligned}$$

On tire de tout ceci  $V(t) \leq f'(u_0)V(t)$ , et l'on conclut comme au 1°) à la stabilité asymptotique.

N.B. Si l'énoncé avait défini  $t^*$  comme le plus petit des  $t$  tels qu'il existe  $x$  vérifiant  $u(t, x) = u_0 + \eta$  ou  $u(t, x) = u_0 - \eta$ , il aurait été possible de répondre à la question en restant dans le cadre du programme BCPST.

En effet, en supposant que  $u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$ , on établit d'abord que  $x \rightarrow u(t^*, x)$  admet un maximum en  $x_0$ . S'il n'en est pas ainsi, il existe  $x$  vérifiant  $u(t^*, x) > u_0 + \eta$ , comme  $u(0, x) < u_0 + \eta$ ,  $\exists 0 < s < t^*$  vérifiant  $u(s, x) = u_0 + \eta$ , ce qui contredit la définition de  $t^*$ .

Soit  $0 \leq t < t^*$ . Si  $u(t, x_0) \geq u(t^*, x_0)$ , comme  $u(0, x_0) < u(t^*, x_0)$ ,  $\exists 0 \leq s < t^*$  tel que  $u(s, x_0) = u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$ , ce qui contredit la définition de  $t^*$ . Ainsi  $\forall 0 \leq t < t^*$ ,  $u(t, x_0) < u(t^*, x_0)$ , On conclut alors de la même manière que  $t^*$  est infini.

Enfin, on montre de manière très similaire que  $\forall t \geq 0, \forall x \in [0, L]$   $u_0 - \eta < u(t, x) < u_0 + \eta$ , la fin du raisonnement est identique.

### 3) Systèmes d'équations différentielles.

1°)a) Par théorèmes,  $(U_1, U_2)$  est libre et constitue une base de  $\mathbf{R}^2$ ,  $P$  est donc inversible.  $P^{-1}MP$  est la matrice dans la base  $(U_1, U_2)$  de l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  est  $M$ . Comme  $f(U_i) = \lambda_i U_i$ , cette matrice est bien la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

b) En admettant les règles de dérivation matricielle hors programme BCPST, on a

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}MX(t) = (P^{-1}MP)P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}Y(t). \text{ Si } Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \text{ on a}$$

donc  $y_i' = \lambda_i y_i$ , d'où  $y_i(t) = y_i(0) \exp(\lambda_i t)$ .

$$c) (\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0) \Rightarrow (\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0).$$

C'est clair, car  $\|Y(t)\| = \sqrt{y_1^2(0) \exp(2\lambda_1 t) + y_2^2(0) \exp(2\lambda_2 t)}$ .

$$\left(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0\right) \Rightarrow (\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0).$$

Car pour  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on obtient  $\|Y(t)\| = \exp(\lambda_1 t)$ , qui ne tend vers 0 en plus l'infini que si

$\lambda_1 < 0$ . De même  $\lambda_2 < 0$ .

$$\left(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0\right) \Rightarrow \left(\forall X(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0\right)$$

Comme  $-\|Y(t)\| \leq y_i(t) \leq \|Y(t)\|$ ,  $y_i(t) \rightarrow 0$ , or  $X(t) = PY(t)$ , donc  $x_i(t) \rightarrow 0$  et  $\|X(t)\| \rightarrow 0$ .

$$\left(\forall X(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0\right) \Rightarrow \left(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0\right)$$

Raisonnement analogue, en écrivant que  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ .

2°) Observons que la notion de multiplicité d'une valeur propre est hors programme BCPST....

a) Soit un vecteur  $U_2$  non colinéaire à  $U_1$ , et  $P = (U_1 | U_2)$ .  $P^{-1}MP$  est la matrice dans la base  $(U_1, U_2)$  de l'endomorphisme  $f$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  est  $M$ .

$f(U_1) = \lambda_1 U_1$ , la première colonne de cette matrice est donc  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , qed. La matrice de  $f$  dans

la base  $(U_1, U_2)$  étant triangulaire, ses valeurs propres sont les éléments de la diagonale, or il n'y a qu'une seule valeur propre, donc  $\lambda_1 = c$ .

b) En posant toujours  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , on obtient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + b y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda_1 y_2(t) \end{cases}, \text{ qui s'intègre en } \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + b y_2(0) \exp(\lambda_1 t) \\ y_2(t) = y_2(0) \exp(\lambda_1 t) \end{cases}, \text{ puis en}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) \exp(\lambda_1 t) + b y_2(0) t \exp(\lambda_1 t) \\ y_2(t) = y_2(0) \exp(\lambda_1 t) \end{cases}.$$

On a  $(\lambda_1 < 0) \Rightarrow \left(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0\right)$ .

C'est clair, car si  $\lambda_1 < 0$ ,  $y_i(t) \rightarrow 0$ .

$$\left(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0\right) \Rightarrow (\lambda_1 < 0).$$

Car pour  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on obtient  $\|Y(t)\| = \exp(\lambda_1 t)$ , qui ne tend vers 0 en plus l'infini que si

$\lambda_1 < 0$ .

Enfin, comme au 1°),  $\left(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall X(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0\right)$ .

3°)a) S'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $U_2 = \alpha U_1$ ,  $U = (1+i\alpha)U_1$ ,  $U_1$  est aussi un vecteur propre, à coordonnées réelles, de  $M$ , matrice à coefficients réels, pour la valeur propre non réelle  $a+ib$ , contradiction.

b) On a  $M(U_1 + iU_2) = (a+ib)(U_1 + iU_2)$ , soit aussi  $MU_1 + iMU_2 = (aU_1 - bU_2) + i(bU_1 + aU_2)$ . Donc  $f(U_1) = aU_1 - bU_2$ ,  $f(U_2) = bU_1 + aU_2$ , si  $f$  est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  est  $M$ . Comme  $P^{-1}MP$  est la matrice dans la base  $(U_1, U_2)$  de l'endomorphisme  $f$ ,  $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , vu la définition de la matrice d'une application linéaire.

c) En posant toujours  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , on obtient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1'(t) = ay_1(t) + by_2(t) \\ y_2'(t) = -by_1(t) + ay_2(t) \end{cases}$$

Observons que l'énoncé est quelque peu incorrect : si notre solution  $Y$  prend la valeur 0, l'angle polaire n'est pas vraiment défini, le rayon n'est pas forcément dérivable. De plus la tangente n'est pas toujours définie.....

Posons néanmoins  $\rho(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t)$ .  $\rho'(t) = 2y_1'(t)y_1(t) + 2y_2'(t)y_2(t)$  et  $\rho'(t) = 2ay_1^2(t) + 2ay_2^2(t) = 2a\rho(t)$ , d'où  $\rho(t) = \rho(0)\exp(2at)$ .

Il en résulte que soit  $Y$  est identiquement nulle, soit elle ne s'annule jamais, auquel cas on peut bien définir un système de coordonnées polaires de classe  $C^1$  (résultat hors programme BCPST).

On a  $\begin{matrix} y_1(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y_2(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \end{matrix}$  d'où  $\begin{matrix} y_1'(t) = r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\theta'(t)\sin(\theta(t)) \\ y_2'(t) = r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\cos(\theta(t)) \end{matrix}$ . On a par

ailleurs  $y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t) = b(y_1^2(t) + y_2^2(t)) = br^2(t)$ . On en tire  $-r^2(t)\theta'(t) = br^2(t)$ , d'où  $\theta'(t) = -b$ ,  $\theta(t) = -bt + \theta(0)$ . On obtient finalement

$$y_1(t) = \rho(0)\exp(at)\cos(-bt + \theta(0)), \quad y_2(t) = \rho(0)\exp(at)\sin(-bt + \theta(0)).$$

On a  $\|Y(t)\| = \|Y(0)\|\exp(at)$ . Il est donc immédiat que  $(a < 0) \Leftrightarrow (\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0)$ .

Et comme ci-dessus  $(\forall Y(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t)\| = 0) \Leftrightarrow (\forall X(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0)$ .

Remarquons que l'usage des coordonnées polaires est inutile, le calcul fait sur  $\rho(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t)$  suffit pour conclure.

4°) Il résulte des trois précédentes questions que  $(\forall X(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0) \Leftrightarrow$  (Les valeurs propres de  $M$  ont une partie réelle strictement négative). Si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , un calcul simple montre que les valeurs propres de  $M$  sont les racines du polynôme du second degré  $C(U) = U^2 - (a+d)U + (ad - bc)$ . Rappelons que trace et déterminant sont hors programme BCPST.....

Si les racines de  $C$  sont réelles, elles sont négatives si leur produit  $\det(M)$  est positif et leur somme  $\text{tr}(M)$  est négative.

Si les racines ne sont pas réelles,  $\det(M)$  est positif (sinon le discriminant est positif), leur partie réelle, qui est égale à  $\text{tr}(M)/2$ , est négative si  $\text{tr}(M)$  est négative.

#### 4) Système de réaction-diffusion

1°) On a  $v_0 \neq 0$ , donc vu la deuxième équation  $u_0 \neq 0$  et

$$\begin{cases} \frac{u_0^2}{v_0} - u_0 = 0 \\ u_0^2 - 2v_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_0^2 - 2v_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_0 = v_0 = 2.$$

$$\frac{\partial \left( \frac{u^2}{v} - u \right)}{\partial u} = \frac{2u}{v} - 1, \quad \frac{\partial \left( \frac{u^2}{v} - u \right)}{\partial v} = -\frac{u^2}{v^2}, \quad \frac{\partial (u^2 - 2v)}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial (u^2 - 2v)}{\partial v} = -2$$

$$\frac{\partial \left( \frac{u^2}{v} - u \right)}{\partial u} (2,2) = 1, \quad \frac{\partial \left( \frac{u^2}{v} - u \right)}{\partial v} (2,2) = -1, \quad \frac{\partial (u^2 - 2v)}{\partial u} (2,2) = 4, \quad \frac{\partial (u^2 - 2v)}{\partial v} (2,2) = -2$$

Donc si  $\bar{u}, \bar{v}$  sont petites, en utilisant les différentielles de nos deux fonctions de deux

variables, les équations (4.8) s'approchent bien par  $\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{u} - \bar{v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 4\bar{u} - 2\bar{v} \end{cases}$ .

$\text{tr}(J) = -1 < 0, \det(J) = 2 > 0$ , donc d'après la partie 3), on peut conclure à la stabilité asymptotique.

2°) On obtient de même le système 
$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{u} - \bar{v} + d_u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 4\bar{u} - 2\bar{v} + d_v \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \end{cases}.$$

Cherchons les solutions sous la forme 
$$\begin{cases} \bar{u}(t, x) = \alpha(t) \cos(nx) \\ \bar{v}(t, x) = \beta(t) \cos(nx) \end{cases}.$$
 On obtient

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \alpha(t)(1 - d_u n^2) - \beta(t) \\ \beta'(t) = 4\alpha(t) - (2 + d_v n^2)\beta(t) \end{cases}.$$
 Les solutions tendent vers zéro si et seulement si

$$(1 - d_u n^2) - (2 + d_v n^2) < 0 \text{ et } -(2 + d_v n^2)(1 - d_u n^2) + 4 > 0.$$

La première condition est toujours vérifiée. La deuxième se réduit à  $d_u d_v n^4 + (2d_u - d_v)n^2 + 2 > 0$ .

Si  $d_u = d_v = \frac{1}{10}$ ,  $d_u d_v n^4 + (2d_u - d_v)n^2 + 2 = \frac{n^4}{100} + \frac{n^2}{10} + 2 > 0$ , il y a bien stabilité

asymptotique pour toutes les perturbations envisagées.

Si  $d_u = \frac{1}{10}, d_v = \frac{12}{10}$ ,  $d_u d_v n^4 + (2d_u - d_v)n^2 + 2 = \frac{3n^4}{25} - n^2 + 2$ , qui est négatif pour  $n=2$ .

3°)a) Cas  $[0, 2\pi]$ . Pour respecter les conditions aux bords, on doit envisager des perturbations

de la forme 
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\ \beta_0 \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \end{pmatrix}.$$
 La matrice du système linéarisé devient ici

$$\begin{pmatrix} 1 - d_u \frac{n^2}{4} & -1 \\ 4 & -2 - d_v \frac{n^2}{4} \end{pmatrix}, \text{ et la condition de stabilité asymptotique}$$

$$\frac{d_u d_v}{16} n^4 + \frac{2d_u - d_v}{4} n^2 + 2 > 0.$$

Si  $d_u = d_v = \frac{1}{10}$ ,  $\frac{d_u d_v}{16} n^4 + \frac{2d_u - d_v}{4} n^2 + 2 = \frac{1}{1600} n^4 + \frac{1}{40} n^2 + 2 > 0$ .

Si  $d_u = \frac{1}{10}, d_v = \frac{12}{10}$ ,  $\frac{d_u d_v}{16} n^4 + \frac{2d_u - d_v}{4} n^2 + 2 = \frac{3}{400} n^4 - \frac{1}{4} n^2 + 2$ , qui est négatif pour  $n=4$ .

b) a) Cas  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Pour respecter les conditions aux bords, on doit envisager des perturbations

de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(4nx) \\ \beta_0 \cos(4nx) \end{pmatrix}$ . La matrice du système linéarisé devient ici

$\begin{pmatrix} 1-16d_u n^2 & -1 \\ 4 & -2-16d_v n^2 \end{pmatrix}$ , et la condition de stabilité asymptotique

$$256d_u d_v n^4 + 16(2d_u - d_v)n^2 + 2 > 0.$$

Si  $d_u = d_v = \frac{1}{10}$ ,  $256d_u d_v n^4 + 16(2d_u - d_v)n^2 + 2 = \frac{64}{25}n^4 + \frac{8}{5}n^2 + 2 > 0$ .

Si  $d_u = \frac{1}{10}, d_v = \frac{12}{10}$ ,  $256d_u d_v n^4 + 16(2d_u - d_v)n^2 + 2 = \frac{768}{25}n^4 - 16n^2 + 2$ , qui est négatif

pour  $\sqrt{\frac{5}{24}} \leq n \leq \sqrt{\frac{5}{16}}$ , ce qui n'est pas possible,  $n$  étant entier.