# e3a PSI 2006
# épreuve B : corrigé

## Exercice 1.

1. Par un développement par rapport à la dernière colonne, o voit que la fonction $f : x \mapsto V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ est polynomiale de degré $\leq n$, le coefficient de $x^n$ étant $V(a_1, \dots, a_{n-1})$. Par ailleurs, $\forall i \in [1..n-1]$, $f(a_i) = 0$ (deux colonnes égales). Distinguons deux cas.

   - Si $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont deux à deux distincts alors on peut factoriser $f(x)$ par chaque $x - a_i$ et, connaissant degré et coefficient de $x^n$, on a donc
   $$f(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$$
   - Sinon, l'identité reste vrai $(0 = 0)$.

   Dans tous les cas, on a bien
   $$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (a_n - a_i)$$
   On prouve alors par récurrence sur $n$ que
   $$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$
   - $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$ et le résultat est vrai au rang 2.
   - Soit $n \geq 3$ tel que le résultat est vrai au rang $n-1$. On l'obtient au rang $n$ avec la première partie de la question.

2. La famille proposée est de cardinal $n+1$ et $E$ est de dimension $n+1$. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que la famille proposée est libre. Pour cela, on montre que le déterminant des $n+1$ polynômes $P_i = (X - \lambda_i)^n$ est nul. Quand on l'exprime dans la base $(X^n, \dots, X, 1)$ de $\mathbb{C}^n$, ce déterminant a pour coefficient générique (intersection des ligne $i$ et colonne $j$)
   $$\binom{n}{i-1} \lambda_{j-1}^{i-1}$$
   On factorise la ligne $i$ par $\binom{n}{i-1}$ et le déterminant vaut donc
   $$V(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}$$
   Les $\lambda_k$ étant deux à deux distincts, ce déterminant est non nul et on peut conclure.

3.a. Pour $\alpha$ assez petit, les $n$ réels $\alpha x_i$ sont dans $]-\pi, \pi[$ (il suffit de choisir $\alpha = \frac{\pi}{2} \min\{1/|x_i|/ \ i \in [1..n]\}$). Comme $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est injective sur $]-\pi, \pi[$, on a alors $e^{i\alpha x_1}, \dots, e^{i\alpha x_n}$ deux à deux distincts.

3.b. Il suffit de choisir
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\alpha x_1} & e^{i\alpha x_2} & \dots & e^{i\alpha x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{i\alpha(n-1)x_1} & e^{i\alpha(n-1)x_2} & \dots & e^{i\alpha(n-1)x_n} \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice dont le terme à l'intersection des ligne $k$ et colonne $j$ vaut $e^{i\alpha(k-1)x_j}$. On a

$$\det(A) = V(e^{i\alpha x_1}, e^{i\alpha x_2}, \dots, e^{i\alpha x_n})$$

qui est non nul (les $e^{i\alpha x_k}$ étant deux à eux distincts) et $A(t)$ est donc inversible.

3.c. Chaque coordonnée de $Y(t)$ tend vers $L$ quand $t \to +\infty$. Or $X(t) = A^{-1}Y(t)$ et donc chaque coordonnée de $X(t)$ admet aussi une limite quand $t \to +\infty$ (la $i$-ème admet pour limite $L$ fois la somme des coefficients de la ligne $i$ de $A^{-1}$. $X(t)$ a donc une limite quand $t \to +\infty$.
Soit $h_k : t \mapsto e^{ix_k t}$. On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ h_k\left(\frac{2p\pi}{x_k}\right) = 1,\ h_k\left(\frac{2p\pi + \pi/2}{x_k}\right) = i$$

Si $c_k \neq 0$, $c_k h_k$ n'admet donc pas de limite en $+\infty$ (on a deux suites qui tendent vers $+\infty$ et dont les images par $h_k$ tendent vers des limites différentes).
Comme ici $\forall k,\ c_k h_k$ a une limite en l'infini, c'est que tous les $c_k$ sont nuls.

## Exercice 2.

1. On a

$$E_{a,b}E_{i,j} = \delta_{b,i}E_{a,j}$$

où $\delta_{u,v}$ vaut 0 si $u \neq v$ et 1 si $u = v$. On en déduit que

$$CE_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{k,i}E_{k,j} \quad \text{et} \quad E_{i,j}C = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}E_{i,k}$$

Autrement dit, les colonnes de $CE_{i,j}$ sont toutes nulles sauf la $j$-ème où l'on trouve la $i$-ème de $C$. et les lignes de $E_{i,j}C$ sont toutes nulles sauf la $i$-ème où l'on trouve la $j$-ème de $C$.
Si $\forall M,\ CM = MC$ alors $\forall i, j,\ CE_{i,j} = E_{i,j}C$. Le calcul précédent indique alors que

$$\forall i, j,\ \sum_{k=1}^{n} c_{k,i}E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}E_{i,k}$$

Les $E_{u,v}$ formant une famille libre, on a donc $c_{i,i} = c_{j,j}$ et $\forall k \neq i,\ c_{k,i} = 0$. $C$ est donc une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux égaux. Elle est du type $aI_n$.

2. On a

$$tr({}^tMN) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}n_{i,j}$$

$< .|. >$ correspond donc au produit scalaire canonique quand on identifie $E$ et $\mathbb{R}^{(n^2)}$.

3. Pour tous $M$ et $N$ de $E$, on a (en utilisant $tr(UV) = tr(VU)$)

$$< f(M)|N >= tr({}^tB{}^tM{}^tAN) = tr({}^tM{}^tAN{}^tB) =< M|{}^tAN{}^tB >$$

Par définition de l'adjoint, on a donc

$$f^*(N) = {}^tAN{}^tB$$

4.a. On suppose $f$ orthogonal et on a donc $f^* \circ = Id$. Ainsi

$$\forall M \in E,\ {}^tAAMB{}^tB = M$$

En prenant $M = I_n$, on obtient que ${}^tAAB^tB = I_n$ c'est à dire que ${}^tAA$ et $B^tB$ sont inversibles et que l'une est l'inverse de l'autre.
On a donc
$$\forall M \in E,\ {}^tAAM = M(B^tB)^{-1} = M^tAA$$
et la question 2 indique l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAA = aI_n$. En passant à la trace, on voit que
$$a = \frac{1}{n}\|A\|^2 > 0$$
On a alors $B^tB = ({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{a}I_n$.

4.b. - Si $A = \lambda\Omega_1$ et $B = \frac{1}{\lambda}\Omega_2$ avec $\lambda > 0$ et $\Omega_i \in O_n(\mathbb{R})$ alors
$${}^tAA = \lambda^2 I_n \text{ et } B^tB = \frac{1}{\lambda^2}I_n$$
On en déduit que
$$\forall M \in E,\ {}^tAAMB^tB = M$$
c'est à dire $f^* \circ f = Id$ et $f$ est un endomorphisme orthogonal.

- Réciproquement, si $f$ est un endomorphisme orthogonal alors on a vu qu'il existe $a > 0$ tel que
$${}^tAA = aI_n \text{ et } B^tB = \frac{1}{a}I_n$$
Posons $\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}A$ et $\Omega_2 = \sqrt{a}B$. Ce sont des matrices orthogonales qui vérifient $A = \lambda\Omega_1$ et $B = \frac{1}{\lambda}\Omega_2$

# Exercice 3.

1.a. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Elle présente des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$. Par croissances comparées, $g_x(t) = o_{+\infty}(1/t^2)$ et $g_x$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. En outre, $g_x(t) \sim_0 t^{x-1}$ et $g_x$ est intégrable au voisinage de 0 ssi $x > 0$. $g_x$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ssi $x > 0$. Enfin, comme $g_x$ est positive, intégrabilité et existence d'intégrale sont des notions équivalentes et le domaine de $\Gamma$ est donc $\mathbb{R}^{+*}$.
Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

1.b. $\exp'' = \exp$ est positive et exp est donc convexe sur $\mathbb{R}$. Son graphe reste au dessus de la tangente en $(0,1)$ et on a donc
$$\forall u \in \mathbb{R},\ e^u \geq 1 + u$$
Montrons maintenant que l'on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour étudier la suite de terme général $\int_0^\infty f_n$.

- Pour tout $n$, $f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit $t > 0$. Pour $n$ assez grand $f_n(t) = \exp(n\ln(1 - t/n))t^{x-1} \to e^{-t}t^{x-1}$ quand $n \to +\infty$. Ainsi, $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ qui est elle aussi continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- On a (en utilisant la première partie de la question et la croissance de $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}^+$)
$$\forall t \in ]0,n],\ |f_n(t)| \leq t^{x-1}e^{-t}$$
et la majoration reste valable sur $[n, +\infty[$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (question 1).

L'interversion est donc licite et donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = \Gamma(x)$$

1.c. Le changement de variable $u = t/n$ donne

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int 0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\ du = n^x I_n(x)$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne (pour tout $a \in ]0,1]$)

$$\int_a^1 (1-t)^n t^{x-1}\ dt = \left[\frac{t^x}{x}(1-t)^n\right]_a^1 + \frac{n}{x}\int_a^1 (1-t)^{n-1} t^x\ dt$$

Pour $x > 0$, le terme tout intégré tend vers 0 quand $a \to 0$. Les intégrales admettent une limite (question 1) et le passage à la limite donne

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$$

1.d. Une récurrence assez aisée donne alors

$$\forall n \geq 0,\ I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n)$$

Or, $I_0(x+n) = \frac{1}{x+n}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} f_n = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$$

La question 1.$b$ indique alors que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

2.a. Un intégration par parties donne

$$a_n = [t(1-t^p)^n]_0^1 + np\int_0^1 t^p(1-t^p)^{n-1}\ dt$$

Le terme "tout intégré" est nul. En écrivant $t^p = t^p - 1 + 1$ dans l'intégrale, on obtient

$$a_n = np(a_{n-1} - a_n)$$

2.b. On a donc $a_n = \frac{np}{1+np}$ et une récurrence aisée donne

$$a_n = \frac{n!p^n}{\prod_{k=1}^n (1+kp)}$$

2.c. On transforme l'égalité précédente en factorisnt chaque terme du dénominateur par $p$ :

$$a_n = \frac{n!}{(1+1/p)(2+1/p)\dots(n+1/p)} = \frac{n! n^{1/p}}{(1/p)(1+1/p)(2+1/p)\dots(n+1/p)}\frac{1}{pn^{1/p}}$$

D'après 1.$d$, la première fraction tend vers $\Gamma(1/p)$ et on a donc

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{pn^{1/p}}$$

2.d. $\forall t \in [c,1],\ c^p \leq t^p$ et donc $0 \leq 1-t^p \leq 1-c^p$ et enfin (croissance de $u \mapsto u^n$ sur $\mathbb{R}^+$) $0 \leq (1-t^p)^n \leq (1-c^p)^n$. On en déduit que

$$0 \leq a_n - a_n(c) = \int_c^1 (1-t^p)^n\ dt \leq (1-c^p)^n \int_c^1\ dt \leq (1-c^p)^n$$

Comme $1-c^p \in [0,1[$, le majorant est, par croissances comparées, négligeable devant $n^{-1/p}$ quand $n \to +\infty$. On a donc $a_n - a_n(c) = o(a_n)$ (puisque $a_n = O(n^{-1/p})$) c'est à dire

$$a_n(c) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$$

3.a.i. La fonction $t \mapsto x^p$ étant de limite nulle en 0 (puisque $p > 0$), il existe $c_1 \in ]0,1[$ tel que $c_1^p \leq 1/\lambda_2$. La fonction $t \mapsto \lambda - \varepsilon(t)$ étant de limite $\lambda$ en 0, il existe $c_2$ tel que $\forall t \in [0,c_2],\ \lambda_1 \leq \lambda - \varepsilon(t) \leq \lambda_2$. On a alors $\forall t \in [0,c_2],\ 1-\lambda_2 t^p \leq g(t) \leq 1-\lambda_1 t^p$. Si on pose $c = \min(c_1,c_2)$ on a alors

$$\forall t \in [0,c],\ 0 \leq 1-\lambda_2 c^p \leq 1-\lambda_2 t^p \leq g(t) \leq 1-\lambda_1 t^p$$

3.a.ii. La fonction $v \mapsto v^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a alors

$$\forall t \in [0,c],\ (1-\lambda_2 t^p)^n \leq (g(t))^n \leq (1-\lambda_1 t^p)^n$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et $c$, il vient

$$\int_0^c (1-\lambda_2 t^p)^n\ dt \leq u_n - \int_c^1 (g(t))^n\ dt \leq \int_0^c (1-\lambda_2 t^p)^n\ dt$$

Par décroissance de $g^n$ (composée de $g$ décroissante et de $v \mapsto v^n$ croissante) on a $\int_c^1 (g(t))^n\ dt \leq (1-c)(g(c))^n \leq (g(c))^n$ et finalement

$$\int_0^c (1-\lambda_2 t^p)^n\ dt \leq u_n \leq (g(c))^n + \int_0^c (1-\lambda_1 t^p)^n\ dt$$

3.a.iii. En posant $u = \lambda_2^{1/p} t$ dans la première intégrale ci-dessus et $u = \lambda_1^{1/p} t$ dans la seconde, on en déduit exactement que

$$\frac{1}{\lambda_2^{1/p}} a_n(c\lambda_2^{1/p}) \leq u_n \leq (g(c))^n + \frac{1}{\lambda_1^{1/p}} a_n(c\lambda_1^{1/p})$$

3.b. Etat donné un choix de $\lambda_1, \lambda_2$, on trouve un $c$ (dépendant des $\lambda_i$) comme ci-dessus et on a

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^{1/p} \frac{a_n(c\lambda_2^{1/p})}{a_n} \leq \frac{\lambda^{1/p} u_n}{a_n} \leq \frac{(g(c))^n \lambda^{1/p}}{a_n} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/p} \frac{a_n(c\lambda_1^{1/p})}{a_n}$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$.

- Comme $\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{1/p}$ tend vers 1 quand $\lambda_1$ s'approche de $\lambda$, on peut choisir $\lambda_1$ tel que cette quantité soit plus petite que $1+\varepsilon_1$.
- Comme $\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^{1/p}$ tend vers 1 quand $\lambda_2$ s'approche de $\lambda$, on peut choisir $\lambda_1$ tel que cette quantité soit plus grande que $1-\varepsilon_1$.

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ (et donc $c$) sont maintenant fixé.

- $\frac{a_n(c\lambda_1^{1/p})}{a_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$ (question 2.$d$) et il existe donc $n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ cette quantité soit plus petite que $1 + \varepsilon_1$.
- $\frac{a_n(c\lambda_2^{1/p})}{a_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$ (question 2.$d$) et il existe donc $n_1$ tel que pour $n \geq n_1$ cette quantité soit plus grande que $1 - \varepsilon_1$.
- Comme $g(t) - 1 \sim_0 -\lambda t^p$, $g$ est strictement inférieure à 1 sur un voisinage de 0 et donc aussi sur $]0, 1]$ par décroissance. Ainsi, $g(c) \in [0, 1[$ et par croissances comparées (compte-tenu de l'équivalent de 2.$c$) $\frac{(g(c))^n \lambda^{1/p}}{a_n} \to 0$. Pour $n \geq n_3$, cette quantité est plus petite que $\varepsilon_1$.

On a alors

$$\forall n \geq n_3,\ (1 - \varepsilon_1)^2 \leq \frac{\lambda^{1/p} u_n}{a_n} \leq \varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_1)^2$$

ou encore

$$\forall n \geq n_3,\ \varepsilon_1(-2 + \varepsilon_1) \leq \frac{\lambda^{1/p} u_n}{a_n} - 1 \leq \varepsilon_1(3 + \varepsilon_1)$$

Majorant et minorant pouvant être rendu aussi proche de zéro que l'on veut, on a donc la quantité centrale qui tend vers 0 c'est à dire

$$u_n \sim \frac{a_n}{\lambda^{1/p}} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p(n\lambda)^{1/p}}$$

4.a. $g : t \mapsto \left(\frac{t}{sh(t)}\right)^n$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Son intégrale sur le segment $[0, 1]$ est donc parfaitement définie.

4.b. On a $g$ (prolongée en 0 par la valeur 1) qui est continue sur $[0, 1]$. En outre

$$\frac{t}{sh(t)} = \frac{1}{1 + t^2/6 + o_0(t^2)} = 1 - \frac{t^2}{6} + o_0(t^2)$$

et on est donc dans le cadre de la question 3 avec $\lambda = 1/6$ et $p = 2$. Pour utiliser la question 3, il suffit de montrer que $g$ est décroissante. Or,

$$\forall t > 0,\ g'(t) = \frac{sh(t) - t.ch(t)}{sh^2(t)}$$

et, par concavité de $th$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall t \geq 0,\ th(t) \leq t$. On en déduit que $g'$ est négative sur $\mathbb{R}^+$ et donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, comme $g$ est de limite nulle en l'infini, elle reste positive sur $\mathbb{R}^+$ et $g$ va donc de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
La question 3 s'applique et donne

$$v_n \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n/6)^{1/2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}$$