

I Fonction caractéristique :

Q 1 . Par la formule de transfert, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left(\cos \left(\frac{t}{2^k} \varepsilon_k \right) \right) = \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) + \cos \left(-\frac{t}{2^k} \right) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) \\ \mathbb{E} \left(\sin \left(\frac{t}{2^k} \varepsilon_k \right) \right) = \sin \left(\frac{t}{2^k} \right) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) + \sin \left(-\frac{t}{2^k} \right) \cdot \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \mathbb{E} \left(\cos \left(\frac{t}{2^k} \varepsilon_k \right) \right) = \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) \\ \mathbb{E} \left(\sin \left(\frac{t}{2^k} \varepsilon_k \right) \right) = 0 \end{cases}$$

Par suite

$$\mathbb{E} \left(e^{i \frac{t}{2^k} \varepsilon_k} \right) = \cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{itX_n} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{it \left(\sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n e^{i \frac{t}{2^k} \varepsilon_k} \right) \end{aligned}$$

Mais par indépendance des variables aléatoires ε_k et donc des $e^{i \frac{t}{2^k} \varepsilon_k}$, on a

$$\mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n e^{i \frac{t}{2^k} \varepsilon_k} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left(e^{i \frac{t}{2^k} \varepsilon_k} \right)$$

D'où l'égalité :

$$\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E} \left(e^{itX_n} \right) = \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$$

Q 2 . Par une simple récurrence, on montre que pour tout $n \geq 1$, $\sin \left(\frac{t}{2^n} \right) \cdot \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \frac{\sin(t)}{2^n}$; puis on conclut par la question précédente.

Q 3 . Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Comme $\frac{t}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left| \frac{t}{2^n} \right| < \pi$; en particulier $\forall n \geq n_0$, $\sin \left(\frac{t}{2^n} \right) \neq 0$ et par la question précédente,

$$\begin{aligned} \Phi_{X_n}(t) &= \frac{\sin(t)}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{t}{2^n} \right)} \\ &= \frac{\sin(t)}{t} \cdot \frac{\frac{t}{2^n}}{\sin \left(\frac{t}{2^n} \right)} \end{aligned}$$

Donc $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \sin c(t)$. D'autre part, $\Phi_{X_n}(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin c(0)$. Donc la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\sin c$.

Q 4 . La limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_n$ est la fonction $\sin c$ qui est visiblement continue sur $\mathbb{R}$.

Q 5 . Pour tout $k \geq 1$, les variables aléatoires ε_k et $-\varepsilon_k$ ont même loi puisque

$$\begin{cases} \mathbb{P}(-\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(-\varepsilon_k = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

En particulier les variables aléatoires $\frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $-\frac{\varepsilon_k}{2^k}$ ont aussi même loi.

Mais les variables aléatoires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont supposé indépendants ; donc il en est de même pour

les variables aléatoires $\frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ et $-\frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, -\frac{\varepsilon_n}{2^n}$. Donc $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $-X_n$ ont même loi.

Q 6 . Pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \mathbb{E}(\cos(tX_n)) \\ &= \mathbb{E}\left(\operatorname{Re}\left(e^{itX_n}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\mathbb{E}\left(e^{itX_n}\right)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\zeta_{X_n}(t)\right) \end{aligned}$$

Mais d'après Q.1, $\zeta_{X_n}(t)$ est réel, donc $\operatorname{Re}(\zeta_{X_n}(t)) = \zeta_{X_n}(t)$. D'où $\varphi_n(t) = \zeta_{X_n}(t)$. Donc la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\sin c$.

Q 7 . On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \varphi_n(2^{n+1}\pi) &= \zeta_{X_n}(2^{n+1}\pi) \\ &= \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \cos(2^{n+1-k}\pi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et donc

$$\varphi_n(2^{n+1}\pi) - \sin c(2^{n+1}\pi) = 1 - \frac{\sin(2^{n+1}\pi)}{2^{n+1}\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

D'où $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$

II Ecriture binaire

Q 8 Si $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \{0, 1\}^n$, alors $\Phi_n((x_j)_{1 \leq j \leq n}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2^{n-j}$ est un entier naturel, de plus

$$\Phi_n((x_j)_{1 \leq j \leq n}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2^{n-j} \leq \sum_{j=1}^n 2^{n-j} = 2^n - 1$$

Par suite, $\operatorname{Im}(\Phi_n) \subset \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$.

Q 9 $\operatorname{Im}(\Phi_n) = A_n$.

Q 10 - Soit $k \in \{0, \dots, 2^1 - 1\} = \{0, 1\}$, alors on vérifie que $\Phi_1(k) = k$, donc $k \in \text{Im}(\Phi_1)$. Donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

- Soit $n \geq 1$ et supposons

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}, k \in \text{Im}(\Phi_n)$$

Et soit $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$.

* Si $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, alors par hypothèse de récurrence, $k \in \text{Im}(\Phi_n)$. Donc il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $k = \Phi_n(x_1, \dots, x_n)$; donc

$$\begin{aligned} k &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2^{n+1-(j+1)} \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} \cdot 2^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot 2^{n+1-i} \end{aligned}$$

où on a posé

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{si } 2 \leq i \leq n+1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

Donc $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$ et $k = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot 2^{n+1-i} = \Phi_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \text{Im}(\Phi_{n+1})$.

* Supposons maintenant $k \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Donc $0 \leq k - 2^n \leq (2^{n+1} - 1) - 2^n = 2^n - 1$; donc par hypothèse de récurrence, $k - 2^n \in \text{Im}(\Phi_n)$. Soit alors $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $k - 2^n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n)$; donc

$$\begin{aligned} k &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2^{n-j} + 2^n \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \cdot 2^{n+1-(j+1)} + 2^n \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} x_{i-1} \cdot 2^{n+1-i} + 2^n \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot 2^{n+1-i} \end{aligned}$$

où on a posé

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} & \text{si } 2 \leq i \leq n+1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

Donc $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}$ et $k = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \cdot 2^{n+1-i} = \Phi_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \text{Im}(\Phi_{n+1})$.

D'où l'hérédité. On conclut donc par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}, k \in \text{Im}(\Phi_n).$$

Q 11 La surjection de Φ_n découle de la question précédente ; d'autre part les ensembles de départ et d'arrivé $\{0, 1\}^n$ et $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ ont même cardinal 2^n . Donc Φ_n est bijective.

Q 12 Soit $n \geq 1$ et $x = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} \in D_n$, avec $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. Donc $x = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{y_j}{2^j}$ avec

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{si } 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

. Donc $x \in D_{n+1}$. Par suite $D_n \subset D_{n+1}$. D'où la croissance de la suite $(D_n)_{n \geq 1}$.

D'autre part, $D \subset [0, 1[$, en effet, soit $x \in D$ et $n \geq 1$ tel que $x \in D_n$. Alors il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j}$; en particulier $0 \leq x \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Donc $0 \leq x < 1$; donc $x \in [0, 1[$.

On a donc l'inclusion : $D \subset [0, 1[$

Q 13 Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Comme $2^n x - 1 \leq [2^n x] \leq 2^n x$, alors après division par 2^n , on obtient $x - \frac{1}{2^n} \leq \frac{[2^n x]}{2^n} \leq x$. Donc $x - \frac{1}{2^n} \leq \pi_n(x) \leq x$ ou encore

$$\pi_n(x) \leq x \leq \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

Q 14 Soit $x \in [0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors on a successivement les égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j} &= \sum_{j=1}^k \frac{2^j (\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x))}{2^j} \\ &= \sum_{j=1}^k (\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)) \\ &= \pi_k(x) - \pi_0(x) \end{aligned}$$

Or $x \in [0, 1[$, donc $\pi_0(x) = [x] = 0$. Par suite $\sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j} = \pi_k(x)$.

Q 15 Soit $(x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, alors d'une part,

$$d_j(x) = 2^j (\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)) = [2^j x] - 2 [2^{j-1} x] \in \mathbb{Z}$$

D'autre part compte tenu de Q-13, on a

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2^j} \leq \pi_j(x) \leq x \\ x - \frac{1}{2^{j-1}} \leq \pi_{j-1}(x) \leq x \end{cases}$$

Donc $\left(x - \frac{1}{2^j}\right) - x \leq \pi_j(x) - \pi_{j-1}(x) \leq x - \left(x - \frac{1}{2^{j-1}}\right)$ ou encore $-\frac{1}{2^j} \leq \pi_j(x) - \pi_{j-1}(x) \leq \frac{1}{2^{j-1}}$. Donc

$$-1 \leq d_j(x) = 2^j (\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x)) \leq 2.$$

Par suite $d_j(x) \in \{0, 1\}$.

Q 16 On a $x \in D_n$ ssi $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j}$ ssi $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que

$2^n x = \sum_{j=1}^n 2^{n-j} x_j = \sum_{j=1}^n 2^{n-j} x_j$ ssi $2^n x \in \text{Im } \Phi_n$. Mais on a vu que $\text{Im } \Phi_n = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. D'où

l'équivalence entre $x \in D_n$ et $2^n x \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. En particulier l'application noté h_n définie sur $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, par $h_n(k) = \frac{k}{2^n}$ est une bijection de $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ dans D_n .

Q 17 On vérifie aisément que $\Psi_n = h_n \circ \Phi_n$ est composé de deux bijection. C'est donc une bijection de $\{0, 1\}^n$ dans D_n .

Q 18 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

* Si $n \leq k$, alors $x - \frac{1}{2^k} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} - \frac{1}{2^k} \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \right\rangle$.

* Si $k \leq n - 1$, alors $\sum_{j=k+1}^n \frac{x_j}{2^j} \leq \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k} \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right) \left\langle \frac{1}{2^k} \right\rangle$. Donc $\sum_{j=k+1}^n \frac{x_j}{2^j} - \frac{1}{2^k} \left\langle 0 \right\rangle$ et donc

$$x - \frac{1}{2^k} = \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{2^j} + \sum_{j=k+1}^n \frac{x_j}{2^j} - \frac{1}{2^k} \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \right\rangle$$

On a donc dans tous les cas, $x - \frac{1}{2^k} \left\langle \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \right\rangle$; mais par positivité des x_j , on a

$$\sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} = x.$$

Donc

$$x - \frac{1}{2^k} \left\langle \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \right\rangle \leq x$$

Donc $2^k \cdot \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} \leq 2^k x \left\langle 2^k \cdot \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} + 1 \right\rangle$. Or $2^k \cdot \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$ est entier; par suite $2^k \cdot \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} = [2^k x]$ ou encore

$$\sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j} = \frac{[2^k x]}{2^k} = \pi_k(x)$$

Q 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{U_k(\omega)}{2^k} = \Psi_n(U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)) \in \text{Im } \Psi_n.$$

Mais par Q-17, l'image $\text{Im } \Psi_n = D_n$. Donc $\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) \in D_n$. Mais $D_n \subset D$ et d'après Q-12, $D \subset [0, 1[$. Donc

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) \in [0, 1[$$

Donc $(Y_n \in [0, 1]) = \Omega$ et par suite

$$\mathbb{P}(Y_n \in [0, 1]) = 1.$$

Q 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$. D'après Q-16, $D_n = \left\{ \frac{p}{2^n}, 0 \leq p \leq 2^n - 1 \right\}$ en particulier $\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $x = \frac{k}{2^n}$ et puisque $Y_n(\Omega) = D_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{k}{2^n}\right) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) \quad (*)$$

Mais compte tenu du Q-17, on a pour tout $\omega \in \Omega$,

$$Y_n(\omega) = \frac{j}{2^n} \text{ssi } \Psi_n^{-1}(Y_n(\omega)) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

Mais $\Psi_n^{-1}(Y_n(\omega)) = (U_1(\omega), \dots, U_n(\omega))$. Donc

$$Y_n(\omega) = \frac{j}{2^n} \text{ssi } (U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

ou encore

$$Y_n(\omega) = \frac{j}{2^n} \text{ssi } (U_1(\omega), \dots, U_n(\omega)) = (a_1, \dots, a_n)$$

où on a posé $(a_1, \dots, a_n) = \Psi_n^{-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)$. On a donc l'égalité des événements

$$\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = ((U_1, \dots, U_n) = (a_1, \dots, a_n))$$

ou encore

$$\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = (U_1 = a_1) \cap \dots \cap (U_n = a_n)$$

Et par indépendance des variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$, on a

$$\mathbb{P}((U_1 = a_1) \cap \dots \cap (U_n = a_n)) = \mathbb{P}(U_1 = a_1) \dots \mathbb{P}(U_n = a_n)$$

Et comme chaque U_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, alors

$$\mathbb{P}(U_1 = a_1) = \dots = \mathbb{P}(U_n = a_n) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathbb{P}((U_1 = a_1) \cap \dots \cap (U_n = a_n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Par suite $\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc compte tenue de l'égalité (*) précédente, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{k}{2^n}\right) &= \sum_{j=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{k+1}{2^n} \\ &= \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= x + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = x + \frac{1}{2^n}$ ou encore $F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$.

Q 21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$. Procedons de la même manière que dans la question précédente : D'après Q-16, $D_n = \left\{\frac{p}{2^n}, 0 \leq p \leq 2^n - 1\right\}$ en particulier $\exists k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $x = \frac{k}{2^n}$ et puisque $Y_n(\Omega) = D_n$, alors

$$\mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{k}{2^n}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right)$$

Mais d'après ce qui précède, on a pour tout j , $\mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'où

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(Y_n = \frac{j}{2^n}\right) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc $\mathbb{P}\left(Y_n < \frac{k}{2^n}\right) = \frac{k}{2^n}$. Par suite, on a

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = x$$

Donc

$$G_n(x) = x$$

Q 22 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$, Alors $(Y_n = x) = (Y_n \leq x) \setminus (Y_n < x)$. Donc

$$\mathbb{P}(Y_n = x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) - \mathbb{P}(Y_n < x)$$

ou encore

$$\mathbb{P}(Y_n = x) = F_n(x) - G_n(x)$$

Et compte tenu des deux questions précédentes, on obtient donc $\mathbb{P}(Y_n = x) = (x + \frac{1}{2^n}) - x$. On a donc

$$\forall x \in D_n, \mathbb{P}(Y_n = x) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\text{card}(D_n)}$$

Donc Y_n suit la loi uniforme sur D_n .

Q 23 Soit $\omega \in \Omega$. Comme X_n suit une loi uniforme sur D_n , alors $X_n(\omega) \in D_n$. Et par bijectivité de Ψ_n , il existe un n -uplet $(V_1(\omega), \dots, V_n(\omega)) \in \{0, 1\}^n$ unique tel que $\Psi_n(V_1(\omega), \dots, V_n(\omega)) = X_n(\omega)$ ou encore $X_n(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{V_k(\omega)}{2^k}$.

Donc $V_1, \dots, V_n$ sont des variables aléatoires telles que $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{2^k}$ et chaque $V_k(\Omega) = \{0, 1\}$.

D'autre part, soit $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Alors d'après les formules qui donnent les lois marginales

$$\mathbb{P}(V_k = \varepsilon) = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{n-1}} \mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, \dots, V_n = \varepsilon_n)$$

Mais comme Ψ_n est bijective, alors pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{n-1}$,

$$\mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, \dots, V_n = \varepsilon_n) = \mathbb{P}(X_n = x)$$

où on a posé $x = \Psi_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$. Et comme X_n suit une loi uniforme sur D_n et ce dernier est de cardinal 2^n , alors $\mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{2^n}$. D'où $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{n-1}$, $\mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, \dots, V_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}$.
par suite

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{n-1}} \mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_{k-1} = \varepsilon_{k-1}, V_k = \varepsilon, V_{k+1} = \varepsilon_{k+1}, \dots, V_n = \varepsilon_n) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathbb{P}(V_k = \varepsilon) = \frac{1}{2}$. Et donc chaque V_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

De plus les variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$ sont indépendantes, puisque $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1, \dots, V_n = \varepsilon_n) &= \mathbb{P}(X_n = \Psi_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) \\ &= \frac{1}{2^n} \\ &= \mathbb{P}(V_1 = \varepsilon_1) \dots \mathbb{P}(V_n = \varepsilon_n)\end{aligned}$$

IV Développement dyadique, étude asymptotique

Q 24 Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les U_k sont positives, alors $Y_n \leq Y_{n+1}$. D'où les inclusions

$$\begin{cases} (Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x) \\ (Y_{n+1} \langle x) \subset (Y_n \langle x) \end{cases}$$

et par croissance d'une probabilité :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq x) \subset \mathbb{P}(Y_n \leq x) \\ \mathbb{P}(Y_{n+1} \langle x) \subset \mathbb{P}(Y_n \langle x) \end{cases}$$

. Donc $F_{n+1}(x) \leq F_n(x)$ et $G_{n+1}(x) \leq G_n(x)$. Donc les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes.

Q 25 Si $x \in \mathbb{R}$, alors d'après ce qui précède, les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes. De plus chacune de ces suites est minorée par 0, puisque $\forall n \geq 1, F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) \geq 0$ et $G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \langle x) \geq 0$. Donc chacune de ces deux suites est décroissante et minorée, donc converge. Donc les deux suites de fonctions convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

Q 26 Soit $x \in D \cup \{1\}$.

* Supposons $x = 1$ et soit $n \geq 1$.

D'après Q-19, $G_n(1) = \mathbb{P}(Y_n \langle 1) = 1$. Or $\mathbb{P}(Y_n \leq 1) \geq \mathbb{P}(Y_n \langle 1)$ puisque $(Y_n \langle 1) \subset (Y_n \leq 1)$. Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq 1) \geq 1$; et comme une probabilité est toujours ≤ 1 , alors $F_n(1) = \mathbb{P}(Y_n \leq 1) = 1$. Donc les suites $(F_n(1))_{n \geq 1}$ et $(G_n(1))_{n \geq 1}$ sont constantes égale à 1, donc convergent vers 1.

* Supposons $x \in D$. Donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in D_p$. Mais d'après Q-12, la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Donc $\forall n \geq p, x \in D_n$.

Donc compte tenu de Q-20 et Q-21, on a $n \geq p, \begin{cases} F_n(x) = x + \frac{1}{2^n} \\ G_n(x) = x \end{cases}$. Par suite $\begin{cases} F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \\ G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \end{cases}$.

Q 27 Il suffit de traiter le cas $x \in [0, 1[\setminus D$. Soit donc $x \in [0, 1[\setminus D$ et $n \geq 1$. Alors $2^n x \notin 2^n D$, donc $[2^n x] \langle 2^n$, donc $2^n \cdot \pi_n(x) = [2^n x] \langle 2^n$, donc compte tenu de Q-16, on a $\pi_n(x) \in D_n$. Or d'après Q-13, $\pi_n(x) \leq x \langle \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$, donc $\pi_n(x) \langle x \langle \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$ puisque $x \notin D_n$. Mais comme Y_n est à valeurs dans D_n , alors $(Y_n \leq x) = (Y_n \leq \pi_n(x))$. Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_n \leq \pi_n(x))$ ou encore $F_n(x) = F_n(\pi_n(x))$; mais comme $\pi_n(x) \in D_n$, alors d'après Q-26, $F_n(\pi_n(x)) = \pi_n(x)$, donc $F_n(x) = \pi_n(x)$. On a donc montré que pour tout $n \geq 1, F_n(x) = \pi_n(x)$. Mais d'après Q-13, la suite $(\pi_n(x))_{n \geq 1}$ converge de limite x . D'où $F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Remarquons aussi que si $x \in [0, 1[\setminus D$, alors $\forall n \geq 1, (Y_n \langle x) = (Y_n \leq x)$ puisque Y_n est à valeurs dans D_n . Donc

$$\forall n \geq 1, G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \langle x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = F_n(x)$$

Donc

$$G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Q-28 Montrons le par exemple pour un intervalle semi-ouvert $I =]\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Alors on a $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \in I) &= \mathbb{P}(\alpha < Y_n \leq \beta) \\ &= \mathbb{P}((Y_n \leq \beta) \setminus (Y_n \leq \alpha)) \\ &= \mathbb{P}(Y_n \leq \beta) - \mathbb{P}(Y_n \leq \alpha) \\ &= G_n(\beta) - G_n(\alpha)\end{aligned}$$

Mais compte tenu de Q-27,

$$\begin{cases} G_n(\beta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta \\ G_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \end{cases}$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y_n \in I) = G_n(\beta) - G_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta - \alpha = l(I)$$

Pareille pour les autres cas

Q-29 Soit f une fonction réelle et continue sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on a d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \sum_{x \in D_n} f(x) \cdot \mathbb{P}(Y_n = x)$$

Mais d'après Q-22, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}(D_n)$. Donc pour tout $x \in D_n$, $\mathbb{P}(Y_n = x) = \frac{1}{2^n}$.
Donc l'égalité précédente devient

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in D_n} f(x)$$

Or d'après Q-16, $D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} / k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \right\}$. Donc

$$\mathbb{E}(f(Y_n)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

Mais comme f est supposé continue sur $[0, 1]$, alors d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Donc la sous-suite

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Finalement la suite $(\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n \geq 1}$ converge de limite $\int_0^1 f(t) dt$.

Q-30 On montre comme dans Q-16, que $X_n(\Omega) = \left\{ \frac{2k+1}{2^n} / -2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1} - 1 \right\}$ et ce dernier est aussi de cardinal 2^n et que X_n suit une loi uniforme sur l'ensemble $\left\{ \frac{2k+1}{2^n} / -2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1} - 1 \right\}$.
D'autre part, si $t \in \mathbb{R}^*$, alors par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(\cos(t.X_n)) = \sum_{-2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1}-1} \cos\left(t \cdot \frac{2k+1}{2^n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_n = \frac{2k+1}{2^n}\right)$$

Mais on a vu que X_n et $-X_n$ ont même loi, et donc compte tenu de la parité de la fonction $\cos$, la formule précédente devient :

$$\mathbb{E}(\cos(t.X_n)) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(t \cdot \frac{2k+1}{2^n}\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_n = \frac{2k+1}{2^n}\right)$$

ou encore puisque X_n suit une loi uniforme sur $X_n(\Omega)$ et ce dernier est de cardinal 2^n :

$$\mathbb{E}(\cos(t.X_n)) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(t \cdot \frac{2k+1}{2^n}\right)$$

Mais d'après le théorème sur les sommes de Riemann, $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(t \cdot \frac{2k+1}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(tx) \cdot dx$

Mais

$$\int_0^1 \cos(tx) \cdot dx = \frac{\sin t}{t}$$

Donc

$$\mathbb{E}(\cos(t.X_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{t} = \sin c(t)$$

Cette limite reste vraie pour $t = 0$ puisque $\forall n, \mathbb{E}(\cos(0.X_n)) = 1$. Donc la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\sin c$

Q-31 Pour $t \in]0, 1]$, on a successivement, les égalités

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(t^{Y_n}) &= \sum_{x \in D_n} t^x \cdot \mathbb{P}(Y_n = x) \text{ Formule de transfert} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x \in D_n} t^x \text{ car } Y_n \hookrightarrow \mathcal{U}(D_n) \end{aligned}$$

Donc par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n}) \cdot dt = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in D_n} \int_0^1 t^x \cdot dt$$

Mais pour chaque $x \in D_n$, on a $\int_0^1 t^x \cdot dt = \frac{1}{x+1}$ et d'autre part, d'après Q-16, $D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} / 0 \leq k \leq 2^n - 1 \right\}$.
Donc

$$\int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n}) \cdot dt = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\frac{k}{2^n} + 1}$$

Mais par le théorème sur les sommes de Riemann, $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\frac{k}{2^n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{x+1} \cdot dx$; et cette intégrale vaut $\ln 2$.

Donc la suite extraite $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\frac{k}{2^n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$. D'où $\int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n}) \cdot dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

D'autre part, en notant $h_n(t) = \mathbb{E}(t^{Y_n})$ pour $t \in]0, 1[$, alors d'après Q-29, appliqué à la fonction $f : x \rightarrow t^x$, on a

$$\mathbb{E}(t^{Y_n}) = \mathbb{E}(f(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \cdot dx$$

Mais

$$\int_0^1 f(x) . dx = \int_0^1 t^x . dx = \frac{t-1}{\ln t}$$

Donc la suite de fonctions $(h_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction $h : t \rightarrow \frac{t-1}{\ln t}$.
D'autre part, les fonctions h_n et h sont continues donc continues par morceaux sur $]0, 1[$.
Mais comme $Y_n \geq 0$, alors $\forall t \in]0, 1[$

$$0 \leq t^{Y_n} = e^{Y_n \ln t} \leq 1$$

Donc par croissance de l'espérance, on a

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0, 1[, |h_n(t)| = \left| \mathbb{E} \left(t^{Y_n} \right) \right| \leq 1$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée, on peut échanger limite et intégrale, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) . dt = \int_0^1 h(t) . dt$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mathbb{E} \left(t^{Y_n} \right) . dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} . dt$$

Mais d'après ce qui précède, la première limite vaut $\ln 2$. D'où $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} . dt = \ln 2$.

V Dénombrabilité

Q-32 Chaque D_n est un ensemble fini (de cardinal 2^n) donc au plus dénombrable et $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$ est une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, donc dénombrable.

Q-33 Comme f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors l'élément A de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ admet au moins un antécédant n par la bijection f . Alors ou bien $n \in A$ ou bien $n \notin A$. Et les deux cas sont impossible. En effet :

* Si $n \in A$, alors $n \notin f(n)$. mais $f(n) = A$, donc $n \notin A$; ce qui est impossible.

* Si $n \notin A$, alors $n \in f(n)$. mais $f(n) = A$, donc $n \in A$; ce qui est impossible.

Donc A n'admet pas d'antécédant par f ; ce qui contredit la bijection de f .

Q-34 Notons Γ l'application définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, par $\Gamma(f) = f^{-1}(\{1\})$. Alors Γ est bien définie de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et on vérifie que $\forall f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, (\Phi \circ \Gamma)(f) = f$ et $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), (\Gamma \circ \Phi)(A) = A$. Donc Φ est bijective et de bijection réciproque Γ .

Q-35 * Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ est convergente de somme 1.

Donc la série $\sum \frac{x_n}{2^{n+1}}$ converge et sa somme $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq 1$. Donc Ψ est bien définie.

* L'élément 1 a pour antécédant la suite constante égale à 1, puisqu'on a vu que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$.

Soit maintenant $x \in [0, 1[$. Alors d'après Q-14, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \pi_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j}$ ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \pi_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d_{j+1}(x)}{2^{j+1}}$$

Mais par l'encadrement du Q-13, $\pi_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Donc en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d_{j+1}(x)}{2^{j+1}}$$

Mais par Q-15, $\forall j \in \mathbb{N}, d_{j+1}(x) \in \{0, 1\}$ Donc $(d_{j+1}(x))_{j \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $x = \Psi((d_{j+1}(x))_{j \in \mathbb{N}})$. Donc x admet au moins un antécédent par Ψ . Et cette dernière est donc surjective. D'autre part, considérons les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ telles que $x_0 = 1, \forall n \geq 1, x_n = 0$ et $y_0 = 0, \forall n \geq 1, y_n = 1$. Alors $(x_n)_{n \geq 0} \neq (y_n)_{n \geq 0}$ et

$$\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \Psi((y_n)_{n \geq 0}) = \frac{1}{2}$$

Donc Ψ n'est pas injective.

Q-36 Notons

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \Psi((x_n)_{n \geq 0}) \in [0, 1[\setminus D^*\} \\ S_2 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \Psi((x_n)_{n \geq 0}) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n)_{n \geq 0} \text{ stationnaire à } 1\} \\ S_3 = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \Psi((x_n)_{n \geq 0}) \in D^* \text{ et } (x_n)_{n \geq 0} \text{ stationnaire à } 0\} \end{array} \right.$$

Et remarquons quelques résultats simples à montrer : $\frac{1}{2}.D_n \subset D_{n+1}$ et $2.D_n \subset D_{n-1}$. En particulier $\frac{1}{2}.D \subset D$ et $2.D \subset D$

*** Injectivité de Λ :**

Soient $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\Lambda((x_n)_{n \geq 0}) = \Lambda((y_n)_{n \geq 0})$. Alors les suites $(x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}$ sont toutes les deux dans l'un des ensembles S_i ($1 \leq i \leq 3$). En effet raisonnons par l'absurde et supposons par exemple $(x_n)_{n \geq 0} \in S_1$ et $(y_n)_{n \geq 0} \in S_2$.

Alors l'égalité $\Lambda((x_n)_{n \geq 0}) = \Lambda((y_n)_{n \geq 0})$ devient $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \frac{\Psi((y_n)_{n \geq 0})}{2}$. (*)

- Si $\Psi((y_n)_{n \geq 0}) = 1$, alors $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \frac{1}{2} \in D_1 \setminus \{0\}$. Donc $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) \in D^*$, et ceci contredit l'hypothèse $(x_n)_{n \geq 0} \in S_1$

- Soit maintenant $k \geq 1$ tel que $\Psi((y_n)_{n \geq 0}) \in D_k$, donc $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \frac{\Psi((y_n)_{n \geq 0})}{2} \in \frac{1}{2}D_k \subset D_{k+1}$. et $\Psi((y_n)_{n \geq 0}) \neq 0$ puisque $(y_n)_{n \geq 0} \in S_2$ Donc $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) \in D^*$, et ceci contredit l'hypothèse $(x_n)_{n \geq 0} \in S_1$. De même pour les autres cas.

Supposons donc $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ dans S_1 . Donc l'égalité $\Lambda((x_n)_{n \geq 0}) = \Lambda((y_n)_{n \geq 0})$ équivaut à $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \Psi((y_n)_{n \geq 0})$.

- Si $\Psi((y_n)_{n \geq 0}) = 0$, alors $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n = 0$. Donc $(x_n)_{n \geq 0} = (y_n)_{n \geq 0}$

- Si non, l'égalité précédente se traduit par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n$. En effet raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq y_n$ et soit p le plus petit parmi ces entiers ; alors l'égalité précédente, devient

$$\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

Mais $x_p \neq y_p$ et x_p, y_p sont dans $\{0, 1\}$. Supposons alors $x_p = 1$ et $y_p = 0$. Donc l'égalité précédente devient :

$$\frac{1}{2^{p+1}} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

En particulier

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{p+1}}$$

. Mais

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Donc

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{p+1}} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

ou encore

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1 - y_n}{2^{n+1}} = 0$$

et il s'agit d'une série à termes positifs, donc tous ses termes sont nuls, donc $\forall n \geq p+1, y_n = 1$.

Donc d'après la remarque 2) faite ci-dessus, $\Psi((y_n)_{n \geq 0}) \in D^*$. Ceci contredit le fait que $(y_n)_{n \geq 0} \in S_1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n$ ou encore

$$(x_n)_{n \geq 0} = (y_n)_{n \geq 0}.$$

Supposons maintenant $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ dans S_2 , alors l'égalité $\Lambda((x_n)_{n \geq 0}) = \Lambda((y_n)_{n \geq 0})$ devient $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \Psi((y_n)_{n \geq 0})$. De plus

$\Psi((y_n)_{n \geq 0}) \in D \cup \{1\}$ et les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ sont stationnaire à 1.

- Si $\Psi((y_n)_{n \geq 0}) = 1$, alors $\begin{cases} \Psi((x_n)_{n \geq 0}) = 1 \\ \Psi((y_n)_{n \geq 0}) = 1 \end{cases}$. Donc $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_n = 1 \end{cases}$. Donc $(x_n)_{n \geq 0} = (y_n)_{n \geq 0}$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, x_n = y_n = 1$, alors l'égalité $\Psi((x_n)_{n \geq 0}) = \Psi((y_n)_{n \geq 0})$ devient

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{y_n}{2^{n+1}} + \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

ou encore après changement d'indices :

$$\sum_{n=1}^p \frac{x_{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^p \frac{y_{n-1}}{2^n}$$

Donc avec les notations de Q-17, $\Psi_p(x_0, \dots, x_{p-1}) = \Psi_p(y_0, \dots, y_{p-1})$ et donc par bijection de Ψ_p , on obtient $(x_0, \dots, x_{p-1}) = (y_0, \dots, y_{p-1})$. D'où $(x_n)_{n \geq 0} = (y_n)_{n \geq 0}$. L'autre cas se traite de la même manière.

Surjection de Λ : Soit $x \in [0, 1[$.

* Supposons $x \notin D^*$.

- Si $x = 0$, alors $x = \Psi((0)) = \Lambda((0)) \in \text{Im } \Lambda$

- Si $x \neq 0$. Comme Ψ surjective, alors il existe $(x_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $x = \Psi((x_n)_{n \geq 0})$ et $\Lambda((x_n)_{n \geq 0}) = \Psi((x_n)_{n \geq 0})$ puisque $x = \Psi((x_n)_{n \geq 0}) \in [0, 1[\setminus D^*$. Donc $x = \Lambda((x_n)_{n \geq 0}) \in \text{Im } \Lambda$

* Supposons maintenant $x \in D^*$ et soit p le plus petit entier naturel non nul, tel que $x \in D_p$.

- Si $p = 1$, alors $x = \frac{1}{2} = \frac{\Psi((y_n)_{n \geq 0})}{2} = \Lambda((y_n)_{n \geq 0})$ où $((y_n)_{n \geq 0})$ est la suite constante égale à 1.

Donc $x = \Lambda((y_n)_{n \geq 0}) \in \text{Im } \Lambda$

- Si $p \geq 2$, Donc x s'écrit $x = \sum_{j=1}^p \frac{x_j}{2^j}$, avec $x_p = 1$, sinon x serait dans D_{p-1} . Donc après changement

d'indices $x = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{x_{j+1}}{2^{j+1}}$ ou encore $x = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{y_j}{2^{j+1}}$, où on a posé $y_j = x_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq p-1$. On a en particulier $y_{p-1} = x_p = 1$. Distinguons alors deux cas : $y_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

Supposons $y_0 = 0$, donc

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{y_j}{2^{j+1}} \\ &= \sum_{j=1}^{p-2} \frac{y_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^p} \text{ car } y_{p-1} = 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{p-2} \frac{y_j}{2^j} + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{p-2} \frac{y_j}{2^j} + \sum_{j=p-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{p-3} \frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} + \sum_{j=p-1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z_j}{2^{j+1}} \end{aligned}$$

avec

$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = p-1 \\ y_{j+1} & \text{si } 0 \leq j \leq p-3 \\ 1 & \text{si } j \geq p-1 \end{cases}$$

Donc

$$x = \frac{1}{2} \Psi((z_n)_{n \geq 0})$$

Mais comme $x \in D$, alors $2x = \Psi((z_n)_{n \geq 0}) \in D$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ stationnaire à 1, donc $\frac{1}{2} \Psi((z_n)_{n \geq 0}) = \Lambda((z_n)_{n \geq 0})$. Donc $x = \Lambda((z_n)_{n \geq 0}) \in \text{Im } \Lambda$.

Supposons $y_0 = 1$, donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{y_j}{2^{j+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{y_j}{2^j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=0}^{p-2} \frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z_j}{2^{j+1}} \right) \end{aligned}$$

avec

$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq p-1 \\ y_{j+1} & \text{si } 0 \leq j \leq p-2 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{1}{2} (1 + \Psi((z_n)_{n \geq 0}))$. Mais d'après ce qui précède, $\Psi((z_n)_{n \geq 0}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z_j}{2^{j+1}} = \sum_{j=0}^{p-2} \frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} \in$

$D_{p-1} \in D$ et de plus $(z_n)_{n \geq 0}$ est stationnaire à 0. Donc $\frac{1}{2} (1 + \Psi((z_n)_{n \geq 0})) = \Lambda((z_n)_{n \geq 0})$ et par suite $x = \Lambda((z_n)_{n \geq 0}) \in \text{Im } \Lambda$.

On conclut donc que Λ est surjective. Donc bijective.

Q-37 D'après Q-34 et Q-36 les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $[0, 1[$ sont en bijection. Mais par Q-33, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable, d'où $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.