

Correction de l'épreuve :

ENS – MP – 2023 – sujet A

I Préliminaires

1.a) Pour montrer que \mathbb{H} est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que :

- (i) l'élément neutre E de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \times)$ est dans \mathbb{H} ,
- (ii) $\forall A, B \in \mathbb{H}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, A + \lambda B \in \mathbb{H}$,
- (iii) $\forall A, B \in \mathbb{H}, AB \in \mathbb{H}$.

D'après l'énoncé, les points (i) et (ii) sont acquis. Pour le point (iii), étant donnée la structure d'espace vectoriel de \mathbb{H} , il suffit de le vérifier pour $A, B \in \mathcal{B}$ où \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{H} , donnée par l'énoncé. Or,

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E \in \mathbb{H}, IJ = -JI = K \in \mathbb{H}, JK = -KJ = I \in \mathbb{H}, KI = -IK = J \in \mathbb{H}.$$

Donc le point (iii) est acquis. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}.$$

De plus, $E^* = E, I^* = -I, J^* = J, K^* = -K$, donc :

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est stable par l'automorphisme } Z \mapsto Z^* \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}.$$

1.b) Si $Z = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$, alors $Z^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$ et $ZZ^* = (|z_1|^2 + |z_2|^2)E$.

Retenons que :

$$\forall Z \in \mathbb{H}, ZZ^* = N(Z)E.$$

Or dès que $Z \neq 0, N(Z) \neq 0$, donc Z est inversible d'inverse $\frac{1}{N(Z)}Z^*$.

$$\boxed{\text{Tout élément non nul de } \mathbb{H} \text{ est inversible}}.$$

1.c) Si $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$, alors Z est colinéaire à E donc centralise tout $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc \mathbb{H} .

Réciproquement, si $Z = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ commute avec tout élément de \mathbb{H} , alors :

$$* ZI = IZ, \text{ donc } \begin{pmatrix} iz_1 & i\bar{z}_2 \\ iz_2 & -i\bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 & -i\bar{z}_2 \\ -iz_2 & -i\bar{z}_1 \end{pmatrix}, \text{ donc } z_2 = 0$$

$$* ZJ = JZ, \text{ donc } : \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 & \bar{z}_1 \\ -z_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}, \text{ donc } z_1 \in \mathbb{R}.$$

Donc, $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$. Finalement,

$$\boxed{\text{le centre de } \mathbb{H} \text{ est } \mathbb{R}_{\mathbb{H}}}.$$

2.a) Remarquons que $N(Z) = \det(Z)$.

Le déterminant étant un homomorphisme de groupes de $\mathcal{G}l_2(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C}^* , il vient :

$$\boxed{\forall Z, Z' \in \mathbb{H}, N(ZZ') = N(Z)N(Z')}.$$

2.b) Tout $A \in S$ est non nul, donc appartient à \mathbb{H}^\times d'après la question **1.b**).

Pour tous $A, B \in S$, $N(AB) = N(A)N(B) = 1$, donc $AB \in S$.

Pour tout $A \in S$, $A^{-1} = A^*$, puisque $AA^* = N(A)E$ d'après la question **1.b**), or $N(A^*) = N(A) = 1$, donc $A^{-1} \in S$.

Ainsi, S est un sous-groupe de \mathbb{H}^\times .

Pour tout $Z \in \mathbb{H}^\times$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $N(\lambda Z) = \det(\lambda Z) = \lambda^2 \det(Z)$.

Il suffit alors de poser $\lambda = \frac{1}{\sqrt{N(Z)}}$ pour obtenir que $N\left(\frac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z\right) = 1$. Ainsi :

$$\forall Z \in \mathbb{H}^\times, \frac{1}{\sqrt{N(Z)}}Z \in S.$$

3.a) Posons $z_1 = x + iy$, $z_2 = z + it$ de sorte que $xE = yI + zJ + tK = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$N(xE + yI + zJ + tK) = N(Z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

3.b) Si $U \in \mathbb{H}^{\text{im}}$, alors $U^* = -U$.

On en déduit d'après le résultat intermédiaire de la question **1.b**) que :

$$\forall U \in \mathbb{H}^{\text{im}}, U^2 = -UU^* = -N(U)E.$$

Réciproquement, soit $Z = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$.

Notons $U = yI + zJ + tK$ de sorte que $Z = xE + U$.

Alors $Z^2 = x^2E + 2xU + U^2 = (x^2 - N(U))E + 2xU$.

Supposons que $Z^2 \in]-\infty, 0]E$. Alors $xU = 0$, donc $x = 0$ ou $U = 0$.

Si $U = 0$, alors $N(U) = 0$, puis $x^2 \leq 0$, donc $x = 0$.

Donc dans les deux cas, $x = 0$. Donc $Z = U \in \mathbb{H}^{\text{im}}$. Ainsi :

$$\mathbb{H}^{\text{im}} = \{U \in H ; U^2 \in]-\infty, 0]E\}.$$

4. La partie S de \mathbb{H} est l'image par ψ de la sphère unité Σ dans \mathbb{R}^4 .

Tout d'abord, ψ est continue car linéaire en dimension finie.

Or Σ est connexe par arcs donc S est connexe par arcs.

De même, Σ est compacte, donc S est compact, donc en particulier, fermée.

$$S \text{ est une partie fermée et connexe par arcs de } \mathbb{H}.$$

5.a) Notons $U = xI + yJ + zK$ et $V = x'I + y'J + z'K$.

Alors $UV = -(xx' + yy' + zz')E + (yz' - zy')I + (zx' - xz')J + (xy' - yx')K$.

Donc $VU = -(xx' + yy' + zz')E - (yz' - zy')I - (zx' - xz')J - (xy' - yx')K$.

Alors $VU = -UV \iff xx' + yy' + zz' = 0$. Autrement dit :

$$\forall U, V \in \mathbb{H}^{\text{im}}, \langle U, V \rangle = 0 \iff UV + VU = 0.$$

Dans ce cas, en reprenant les notations précédentes,

$$UV = (yz' - zy')I + (zx' - xz')J + (xy' - yx')K \in \mathbb{H}^{\text{im}}.$$

Alors, en développant le déterminant selon la dernière colonne,

$$\det_{(I,J,K)}(U, V, UV) = \begin{vmatrix} x & x' & yz' - zy' \\ y & y' & zx' - xz' \\ z & z' & xy' - yx' \end{vmatrix} = (yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 \geq 0.$$

5.b) En reprenant les notations précédentes, on constate que :

$$\langle U, UV \rangle = xyz' - xy'z + x'yz - xyz' + xy'z - x'yz = 0.$$

De façon symétrique, $\langle U, VU \rangle = 0$, donc $\langle U, UV \rangle = 0$.

Ainsi, (U, V, UV) est une famille orthogonale.

Si de plus, $N(U) = N(V) = 1$, alors $N(UV) = N(U)N(V) = 1$.

Et puisque $\det_{(I,J,K)}(U, V, UV) \geq 0$,

$$\boxed{(U, V, UV) \text{ est une b.o.n. directe de } \mathbb{H}^{\text{im}}.}$$

II Automorphismes de \mathbb{H} et rotations

6. Pour tous $(u, v), (u', v') \in S$ et $Z \in \mathbb{H}$,

$$\alpha(u, v) \circ \alpha(u', v')(Z) = u(u'Zv'^{-1})v^{-1} = (uu')Z(vv')^{-1} = \alpha((u, v) \times (u', v')),$$

donc $\alpha(u, v) \circ \alpha(u', v') = \alpha((u, v) \times (u', v'))$, donc :

$$\boxed{\alpha(u, v) \text{ est bien un morphisme de groupes.}}$$

Etudions le noyau : Si $(u, v) \in \text{Ker}(\alpha)$, alors :

$$uE = Ev, uI = Iv, uJ = Jv, uK = Kv.$$

On en déduit que $v = u$,

puis, sachant cela, que u est dans le centre de \mathbb{H} , donc que $u \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ d'après la question 1.c).

Donc $u \in \{\pm E\}$ et $\text{Ker}(\alpha) \subset \{(E, E), (-E, -E)\}$.

La réciproque est évidente, donc :

$$\boxed{\text{Ker}(\alpha) = \{(E, E), (-E, -E)\}}.$$

7. Pour tout $v \in S$, $v^{-1} = v^*$, puisque $vv^* = N(v)E = E$, d'après la question 1.b).

Remarquons que l'application $v \in H \mapsto v^*$ est linéaire.

$$\begin{aligned} \text{Notons } L : H^2 &\longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{H}) & \text{et } R : H^2 &\longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{H}) \\ (u, v) &\longmapsto \{Z \mapsto uZ\} & (u, v) &\longmapsto \{Z \mapsto Zv^*\} \end{aligned}$$

Les applications L et R sont linéaires en dimension finie, donc continues.

$$\begin{aligned} \text{Notons } (L, R) : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{H})^2, & \text{continue car chacune de ses composantes l'est.} \\ (u, v) &\longmapsto (L(u, v), R(u, v)) \end{aligned}$$

Soit $\gamma : \text{End}(\mathbb{H})^2 \longrightarrow \text{End}(\mathbb{H})$ continue car bilinéaire en dimension finie.

$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \circ \psi$$

Or $\alpha = (\gamma \circ (L, R))|_{S \times S}$, donc $\boxed{\alpha \text{ est continue}}$ comme composée d'applications continues.

$$\begin{aligned} \text{Soit } (u, v) \in S \times S. \text{ Notons } L_u : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \in \text{End}(\mathbb{H}). \\ Z &\longmapsto uZ \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sqrt{N(uZ)} = \sqrt{N(u)N(Z)} = \sqrt{N(Z)},$$

donc L_u préserve la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } L_u \in \mathcal{O}(\mathbb{H}). \text{ De même, } R_v : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \in \mathcal{O}(\mathbb{H}). \\ Z &\longmapsto Zv^* \end{aligned}$$

$$\text{Or } \alpha(u, v) = L_u \circ R_v, \text{ donc } \boxed{\alpha(u, v) \in \mathcal{O}(\mathbb{H})}.$$

Soit $L : \mathbb{H} \rightarrow \text{End}(\mathbb{H})$, continue car linéaire en dimension finie.

$$A \mapsto \{L_A : Z \mapsto AZ\}$$

D'après la question 4.a), S est connexe par arcs,

donc il existe un chemin continu $c \in \mathcal{C}([0, 1], S)$ tel que $c(0) = E$ et $c(1) = u$.

Puisque c est à valeurs dans S , $L \circ c$ est à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.

Donc $\det \circ L \circ c$ est continue et à valeurs dans $\{\pm 1\}$, donc est constante.

Donc $\det(L_u) = \det(L_E) = 1$ car $L_E = \text{id}_{\mathbb{H}}$.

De même, $\det(R_v) = \det(R_E) = 1$ car $R_E = \text{id}_{\mathbb{H}}$.

Or $\alpha(u, v) = L_u \circ R_v$, donc $\det(\alpha(u, v)) = 1$. Donc :

$$\boxed{\forall (u, v) \in S^2, \alpha(u, v) \in \mathcal{SO}(H)}.$$

8.a) Remarquons que $\mathbb{H} = \mathbb{R}E \oplus \mathbb{H}^{\text{im}}$, donc par le théorème de Pythagore,

$$N(u) = N(\cos \theta E) + N(\sin \theta v) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Donc $\boxed{u \in S}$.

Notons $\tilde{u} = \cos \theta E - \sin \theta v$. Alors :

$$\begin{aligned} u\tilde{u} &= \cos^2 \theta E - \sin^2 \theta v^2 \\ &= \cos^2 \theta E + \sin^2 \theta N(v)E \quad \text{car } v \in \mathbb{H}^{\text{im}} \text{ donc } v^2 = -N(v)v \\ &= E \quad \text{car } N(v) = 1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{u^{-1} = \tilde{u} = \cos \theta E - \sin \theta v}$.

8.b) $\mathcal{M}_{(v,w,vw)}(C_u) = \mathcal{M}_{(v,w,vw)}(uvu^{-1}, uvu^{-1}, uvwu^{-1})$.

Or $u \in \text{Vect}(E, v)$, donc $uv = vu$, donc $uvu^{-1} = v$.

$$\begin{aligned} uvwu^{-1} &= (\cos \theta E + \sin \theta v)w(\cos \theta E - \sin \theta v) \\ &= \cos^2 \theta w + \cos \theta \sin \theta (vw - \underbrace{wv}_{-vw}) - \sin^2 \theta v \underbrace{wv}_{-vw} \\ &= \cos^2 \theta w + 2 \cos \theta \sin \theta vw - \sin^2 \theta w \quad (\text{car } v^2 = -E) \\ &= \cos(2\theta)\theta w + \sin(2\theta)vw \end{aligned}$$

Et

$$uvwu^{-1} = v(\cos(2\theta)\theta w + \sin(2\theta)vw) = -\sin(2\theta)w + \cos(2\theta)vw.$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{M}_{(v,w,vw)}(C_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}}.$$

Ainsi, C_u est une rotation dans le plan $\text{Vect}(E, v)^\perp$ d'angle 2θ .

9. Pour tous $u, v \in S$ et tout $Z \in \mathbb{H}^{\text{im}}$,

$$C_u(C_v(Z)) = uvZv^{-1}u^{-1} = (uv)Z(uv)^{-1} = C_{uv}Z,$$

donc $\boxed{\text{l'application } C : u \mapsto C_u \text{ est un morphisme de groupes}}$.

Etudions son noyau. D'une part $\{\pm E\} \subset \text{Ker}(C)$.

Soit $u \in S \setminus \{\pm E\}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{H}^{\text{im}}$ tel que $u = \cos \theta E + \sin \theta v$.

D'après la question **8.b**), C_u est une rotation dans le plan $\text{Vect}(E, v)^\perp$ d'angle $2\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
Donc C_u n'est pas l'identité. Donc $\boxed{\text{Ker}(C) = \{\pm E\}}$.

Étudions son image.

D'après la question **8.b**), pour tout $u \in S$, dans une base orthonormée adaptée de \mathbb{H}^{im} , la matrice de C_u est dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Donc $C_u \in \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

Réciproquement, soit $r \in \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

Alors r est une rotation d'angle θ dans un plan de \mathbb{H}^{im} orthogonal à un certain vecteur $v \in S$.

En posant $u_\varepsilon = \cos(\frac{\theta}{2})E + \varepsilon \sin(\frac{\theta}{2})v$ avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$,

$C_{u_{+1}}$ et $C_{u_{-1}}$ sont les deux rotations d'angle θ dans le même plan, d'après la question **8.b**).

Donc on atteint r et :

$$\boxed{\text{Im}(C) = \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})}.$$

10.a) Nous avons vu au cours de la question **7** que pour tout $q \in S$, l'application $Lq : Z \mapsto qZ$ appartient à $\mathcal{SO}(\mathbb{H})$ ($Lq = \alpha(q, E)$).

Donnons-nous une application $\rho \in \mathcal{SO}(\mathbb{H})$. Notons $q = \rho(E)^{-1} \in S$.

Alors $Lq \circ \rho \in \mathcal{SO}(\mathbb{H})$ et $Lq \circ \rho(E) = E$.

Puisque $Lq \circ \rho \in \mathcal{SO}(\mathbb{H})$ et que $E^\perp = \mathbb{H}^{\text{im}}$, il vient que $Lq \circ \rho(\mathbb{H}^{\text{im}}) = \mathbb{H}^{\text{im}}$.

Notons $(Lq \circ \rho)_{\mathbb{H}^{\text{im}}}$ l'induit de $Lq \circ \rho$ sur \mathbb{H}^{im} ; il appartient à $\mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

D'après la question **9**, il existe $u \in S$ tel que C_u coïncide avec $(Lq \circ \rho)_{\mathbb{H}^{\text{im}}}$.

Alors $Lq \circ \rho = \alpha(u, u)$, puis $\rho = L_{q^{-1}} \circ \alpha(u, u) = \alpha(q^{-1}u, u)$.

Ainsi,

$$\boxed{\alpha(S, S) = \mathcal{SO}(\mathbb{H})}.$$

10.b) La partie $S \times \{E\}$ est un sous-groupe de $S \times S$.

Or α est un morphisme de groupes de $S \times S$ dans $\mathcal{SO}(\mathbb{H})$,

donc la partie $\boxed{N = \alpha(S \times \{E\})}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbb{H})$.

Soit $n \in N$. Il existe donc $q \in S$ tel que pour tout $Z \in \mathbb{H}$, $n(Z) = qZ$.

Soit $g \in \mathcal{SO}(\mathbb{H})$. D'après la question **10.a**), il existe $(u, v) \in S^2$ tel que $g = \alpha(u, v)$.

Remarquons qu'utilisant le morphisme α , $g^{-1} = \alpha(u^{-1}, v^{-1})$.

Alors pour tout $Z \in \mathbb{H}$,

$$gng^{-1}(Z) = u(qu^{-1}Zv)v^{-1} = (uqu^{-1})Z.$$

Donc $gng^{-1} = \alpha(uqu^{-1})$, $E) \in N$. Ainsi, :

$$\boxed{\forall g \in \mathcal{SO}(\mathbb{H}), \forall n \in N, gng^{-1} \in N}.$$

Remarquons que $\text{id} = \alpha(E, E) \in N$ et $-\text{id} = \alpha(-E, E) \in N$.

A l'inverse, $\alpha(I, E) \in I$, et envoie $\alpha(I, E)(E) = I$ donc $\boxed{\{\pm \text{id}\} \not\subseteq N}$.

Soit $g = \alpha(I, I)$. Alors $g(E) = E$ et $g(J) = -J$.

Or le seul élément g' de N vérifiant $g'(E) = E$ est l'identité. Donc $\boxed{N \not\subseteq \mathcal{SO}(\mathbb{H})}$.

Un sous-groupe N d'un groupe G tel que pour tout $g \in G$, $gNg^{-1} = N$ est dit « normal » ou « distingué ».

Il est courant de chercher les sous-groupes distingués des groupes.

Un sous-groupe d'un groupe peut être réalisé comme le noyau d'un morphisme de groupes si et seulement s'il est distingué.

11. Tout d'abord, $\text{Aut}(\mathbb{H})$ est par définition inclus dans $\mathcal{GL}(\mathbb{H})$, contient $\text{id}_{\mathbb{H}}$ et pour tous $f, g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, $f \circ g^{-1}$ est encore un automorphisme de \mathbb{H} . Donc :

$$\boxed{\text{Aut}(\mathbb{H}) \text{ est un sous-groupe de } \mathcal{GL}(\mathbb{H})}.$$

Soit $u \in S$. Bien sûr, $\alpha(u, u) \in \mathcal{GL}(\mathbb{H})$. De plus :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \alpha(u, u)(\lambda E) &= \lambda u^{-1} E u = \lambda E, \\ \forall Y, Z \in \mathbb{H}, \alpha(u, u)(YZ) &= u Y Z u^{-1} = u Y u^{-1} u Z u^{-1} = \alpha(u, u)(Y) \alpha(u, u)(Z). \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall u \in S, \alpha(u, u) \in \text{Aut}(\mathbb{H})}.$$

12. Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$. Remarquons que $f(I)^2 = f(-E) = -E$ et de même, $f(J)^2 = f(K)^2 = -E$. Donc, d'après la question **3.b** (deuxième partie), $f(I), f(J), f(K) \in \mathbb{H}^{\text{im}}$.

Alors, d'après la question **3.b** (première partie), puisque $f(I) \in \mathbb{H}^{\text{im}}$ et $f(I)^2 = -E$, on a : $N(f(I)) = 1$. De même, $N(f(J)) = N(f(K)) = 1$.

Ainsi, $f(I), f(J), f(K) \in \mathbb{H}^{\text{im}} \cap S$.

De plus $f(I)f(J) + f(J)f(I) = f(IJ + JI) = f(0) = 0$.

Donc d'après la question **5.a**, $(f(I), f(J))$ est une famille orthogonale.

Enfin, $f(I)f(J) = f(IJ) = f(K)$, donc d'après la question **5.b**,

$$\boxed{(f(I), f(J), f(K)) \text{ est une base orthonormée directe de } \mathbb{H}^{\text{im}}}.$$

13.a) Soit $f \in \text{Aut}(H)$.

Grâce à la caractérisation de \mathbb{H}^{im} donnée par la question **3.b**, f préserve \mathbb{H}^{im} .

(Cela découle également par linéarité de la question **12**.)

De plus, d'après la question **12**, f envoie la b.o.n. directe (I, J, K) de \mathbb{H}^{im} sur une b.o.n. directe de \mathbb{H}^{im} , donc $f_{\mathbb{H}^{\text{im}}} \in \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

On peut introduire alors le morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \theta : \text{Aut}(\mathbb{H}) &\longrightarrow \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}}) . \\ f &\longmapsto f_{\mathbb{H}^{\text{im}}} \end{aligned}$$

D'après la question **9**, l'application $u \in S \mapsto C_u$ est surjective dans $\mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

Autrement dit, $\theta(\{\alpha(u, u) ; u \in S\}) = \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$ donc θ est surjectif.

Enfin, soit $f \in \text{Ker}(\theta)$. Alors $f|_{\mathbb{R}\mathbb{H}} = \text{id}_{\mathbb{R}\mathbb{H}}$ et $f|_{\mathbb{H}^{\text{im}}} = \text{id}_{\mathbb{H}^{\text{im}}}$, donc $f = \text{id}_{\mathbb{H}}$.

Donc θ est injectif. Finalement,

$$\boxed{\begin{aligned} \text{l'application } \theta : \text{Aut}(\mathbb{H}) &\longrightarrow \mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}}) \text{ est un isomorphisme} . \\ f &\longmapsto f_{\mathbb{H}^{\text{im}}} \end{aligned}}$$

13.b) On a déjà vu, à la question **11**, que $\text{Aut}(\mathbb{H}) \supset \{\alpha(u, u) ; u \in S\}$.

On a vu à la question précédente que tout $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ préservait \mathbb{H}^{im} et induisait sur \mathbb{H}^{im} un élément de $\mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

D'après la question **9**, il existe u tel que $\alpha(u, u)$ induit ce même élément de $\mathcal{SO}(\mathbb{H}^{\text{im}})$.

On a également vu à la question précédente que la donnée de $f|_{\mathbb{H}^{\text{im}}}$ déterminait entièrement f .

Puisque $\alpha(u, u) \in \text{Aut}(H)$, on a donc : $f = \alpha(u, u)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{\alpha(u, u) ; u \in S\}.$$

Remarque. On ne déduit que le morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \text{Aut}(H) \text{ est surjectif.} \\ u &\longmapsto \alpha(u, u) \end{aligned}$$

Son noyau est $\{\pm E\}$, d'après la question 6.

III Normes euclidiennes sur \mathbb{R}^2

14.a) Remarquons que :

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; \Rightarrow \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq 1\}.$$

Donc \mathcal{K} est la boule unité fermée associée à la norme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ subordonnée aux normes $\|\cdot\|_2$ au départ et $\|\cdot\|$ à l'arrivée.

Donc, en tant que boule unité fermée d'un evn de dimension finie,

$$\boxed{\mathcal{K} \text{ est un compact convexe}}.$$

14.b) L'application \det est continue, donc bornée et atteint ses bornes sur le compact \mathcal{K} . Donc :

$$\boxed{\text{il existe } A \in \mathcal{K} \text{ tel que } \det A = \sup_{B \in \mathcal{K}} \det B}.$$

15. Reprenons la même norme $\|\cdot\|$ subordonnée aux normes $\|\cdot\|_2$ au départ et $\|\cdot\|$ à l'arrivée.

Soit $B = \frac{I_2}{\|I_2\|}$. Alors $\|B\| = 1$, donc $B \in \mathcal{K}$. De plus, $\det(B) = \|I_2\|^{-2} > 0$.

Or $\det(A) \geq \det(B)$, donc $\boxed{\det(A) > 0}$.

En voyant $y \mapsto \|Ay\|$ comme une application continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , elle atteint sa borne supérieure sur le compact \mathcal{C} . Donc :

$$\boxed{\text{il existe } x \in \mathcal{C} \text{ tel que } \|Ax\| = \sup_{y \in \mathcal{C}} \|Ay\|}.$$

Notons $\delta = \|Ax\|$. Puisque $A \in \mathcal{K}$, $\delta \leq 1$.

Or, si $\delta < 1$, alors $\frac{1}{\delta}A$ vérifierait :

$$* \forall y \in \mathcal{C}, \left\| \frac{1}{\delta}Ay \right\| \leq \frac{1}{\delta} \|Ax\| = 1, \text{ donc } \frac{1}{\delta}A \in \mathcal{K},$$

$$* \det\left(\frac{1}{\delta}A\right) = \frac{1}{\delta^2} \det(A) > \det(A), \text{ ce qui contredit la définition de } A. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\|Ax\| = 1}.$$

16.a) Du fait que $B \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, $\|By\|_2 = \|y\|_2$.

On en déduit que $AB \in \mathcal{K}$.

De plus, $\det(B) = 1$, donc AB maximise encore le déterminant sur \mathcal{C} .

L'introduction de B permet simplement de se ramener au cas où $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $AB \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ n'appartient pas à \mathcal{K} .

Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons le contraire.

Or, d'après la question 14.a), \mathcal{K} est convexe.

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, notons $C_\lambda = AB \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r-1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}-1 \end{pmatrix} \right)$.

Par convexité de \mathcal{K} , $C_\lambda \in \mathcal{K}$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Cette matrice C_λ a pour déterminant $P(\lambda) = (1 + \lambda(r-1))(1 + \lambda(\frac{1}{r}-1))$.

Or $P(0) = P(1) = 1$ et P est un polynôme du second degré de coefficient dominant négatif, donc pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $P(\lambda) > 1$.

Donc $\det(C_{\frac{1}{2}}) > \det(A)$: cela contredit la définition de A .

Donc la matrice $C_1 = AB \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ n'appartient pas à \mathcal{K} . Donc :

$$\boxed{\text{il existe } x - r \in \mathcal{C} \text{ tel que } \left\| AB \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} x_r \right\| > 1.}$$

16.b) Rappelons que $AB \in \mathcal{K}$. Donc

$$\left\| \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} x_r \right\|_2 \geq \left\| AB \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} x_r \right\| > 1.$$

On en déduit que : $r^2 y_r^2 + \frac{1}{r^2} z_r^2 > 1$.

Donc : $(\frac{1}{r^2} - r^2) z_r^2 > 1 - r^2$, puis, après simplification :

$$\boxed{z_r^2 > \frac{r^2}{1+r^2}.}$$

17. Pour tout $r \in]0, 1[$, il existe $x_r \in \mathcal{C}$ tel que $\left\| AB \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} x_r \right\| > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 1 - \frac{1}{n+2}$ et $u_n = x_{r_n}$.

Puisque $(u_n)_n \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ et que \mathcal{C} est compact, il existe une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge dans \mathcal{C} . Notons u la limite : $u \in \mathcal{C}$.

Pour tout $w \in \mathbb{R}^2$, notons $E_2^T w$ sa deuxième coordonnée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \geq \frac{1}{2}$, donc $\frac{r_n^2}{1+r_n^2} \geq \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_2^T u_n > \frac{1}{8}$ d'après la question **16.b)**.

Donc par continuité de l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $E_2^T u \geq \frac{1}{8}$.

$$w \mapsto E_2^T w$$

On déduit de ceci que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et u sont non colinéaires.

Notons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \begin{pmatrix} r_{\varphi(n)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_{\varphi(n)}} \end{pmatrix} x_{\varphi(n)}$.

Alors, puisque $r_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, il vient : $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|ABv_n\| > 1$, donc à la limite, $\|ABu\| \geq 1$.

Or $AB \in \mathcal{K}$ et $u \in \mathcal{C}$, donc l'inégalité est une égalité : $\|ABu\| = 1$.

Au final, notons $(e_1, e_2) = (Bx, Bu)$. Ce couple (e_1, e_2) vérifie donc :

$$\boxed{\|Ae_1\| = \|Ae_2\| = 1, (e_1, e_2) \in \mathcal{C} \text{ et } e_2 \notin \mathbb{R}e_1.}$$

18. Soient $a, b \in T$ avec $b \notin \{-a, a\}$.

Alors T contient $\frac{a-b}{\|a-b\|_2}$ et $\frac{b-a}{\|b-a\|_2}$ opposés et $\frac{b+a}{\|b+a\|_2}$ perpendiculaire aux deux précédents.

Soit φ une isométrie de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$ sur \mathcal{C} envoyant $(1, -1, i)$ sur $(\frac{a-b}{\|a-b\|_2}, \frac{b-a}{\|b-a\|_2}, \frac{b+a}{\|b+a\|_2})$.

La condition sur T est traduite de la façon suivante pour $\varphi^{-1}(T)$:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} e^{i\alpha}, e^{i\beta} \in \varphi^{-1}(T), \\ \alpha \neq \beta \pmod{\pi} \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}, ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}, -ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \in \varphi^{-1}(T) \right).$$

Alors, $\varphi^{-1}(T)$ contient $(1, -1, i)$, puis à partir de $(1, i)$, on obtient également $e^{-i\pi/4}$.

Ceci nous permet de partager \mathbb{U} en trois secteurs angulaires d'amplitude angulaire inférieure strictement à l'angle plat et délimités par des éléments de $\varphi^{-1}(T)$: $-1, i, e^{i\pi/4}$.

Soit S un tel secteur angulaire. En utilisant le fait que :

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in (\varphi^{-1}(T) \cap S)^2 \Rightarrow e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \in \varphi^{-1}(T) \cap S,$$

on en déduit que $\varphi^{-1}(T)$ est dense dans S , puis par fermeture, recouvre S .

Ainsi, $\varphi^{-1}(T) = \mathbb{U}$, donc

$$\boxed{T = \mathcal{C}}.$$

19. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^2 vérifiant les hypothèses du théorème A.

Soit la matrice A obtenue à la question **14** et une base (e_1, e_2) de vecteurs normés obtenue à la question **17**.

Montrons que $\|Ax\| = 1$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Pour cela, notons :

$$T = \{x \in \mathcal{C} ; \|Ax\| = 1\}.$$

Alors T est fermé comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $x \mapsto \|Ax\|$.

Vérifions que T satisfait les deux hypothèses (i) et (ii) de la question **18**.

(i) Tout d'abord, grâce à la question **17**, on sait qu'il existe deux vecteurs normés $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires tels que $\|Ae_1\| = 1$ et $\|Ae_2\| = 1$, donc appartenant à \mathcal{C} .

(ii) Soit $x, y \in T$ avec $y \notin \{-x, x\}$.

D'après les hypothèses sur $\| \cdot \|$, puisque $\|Ax\| = \|Ay\| = 1$, il vient :

$$\|Ax + Ay\|^2 + \|Ax - Ay\|^2 \geq 4.$$

Alors :

$$\|x + y\|_2^2 \left\| A \frac{x+y}{\|x+y\|_2} \right\|^2 + \|x - y\|_2^2 \left\| A \frac{x-y}{\|x-y\|_2} \right\|^2 \geq 4. \quad (1)$$

Or $\frac{x+y}{\|x+y\|_2}$ et $\frac{x-y}{\|x-y\|_2}$ sont dans \mathcal{C} , donc par définition de la matrice A :

$$\left\| A \frac{x+y}{\|x+y\|_2} \right\| \leq 1 \text{ et } \left\| A \frac{x-y}{\|x-y\|_2} \right\| \leq 1. \quad (2)$$

Or la norme $\| \cdot \|_2$ étant euclidienne, par l'égalité du parallélogramme,

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2 = 4. \quad (3)$$

En confrontant les (in)égalités (1), (2) et (3), il vient que :

$$\left\| A \frac{x+y}{\|x+y\|_2} \right\| = 1 \text{ et } \left\| A \frac{x-y}{\|x-y\|_2} \right\| = 1.$$

Donc $\frac{x+y}{\|x+y\|_2}$ et $\frac{x-y}{\|x-y\|_2}$ appartiennent à T .

Donc T vérifie les hypothèses de la question **18**, donc conformément à sa conclusion, $T = \mathcal{C}$.

Cela signifie que :

$$\forall x \in \mathcal{C}, \|Ax\| = 1.$$

On en déduit par homogénéité de la norme $\| \cdot \|$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|Ax\| = \|x\|_2.$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = \|A^{-1}x\|_2.$$

Donc, en notant $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^2 (et donc associé à la norme $\| \cdot \|_2$),

$$\boxed{\| \cdot \| \text{ est une norme euclidienne associée au produit scalaire } \begin{array}{l} (\mathbb{R}^2)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (A^{-1}x | A^{-1}y) \end{array}}.$$

IV Algèbres valuées

20.a) Soit $x \in A$.

Puisque A est algébrique, x possède un polynôme minimal unitaire M dans $\mathbb{R}[X]$.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes unitaires tels que $M = PQ$.

Alors $P(x)Q(x) = 0$. Or A est sans diviseur de zéro, donc $P(x) = 0$ ou $Q(x) = 0$.

Par minimalité de M , cela revient à dire que $M = P$ ou $M = Q$.

Autrement dit, M est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Donc $\deg(M) \leq 2$. Donc :

$$\boxed{x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x}.$$

20.b) Soit $x \in A \setminus \mathbb{R}$.

Puisque $x \notin \mathbb{R}$, son polynôme minimal M est de degré 2.

Nous avons vu qu'il était irréductible. Donc M s'écrit :

$$M = X^2 + aX + b \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } a^2 - 4b < 0.$$

Soit $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ la racine de M .

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} + \mathbb{R}x . \\ P(\zeta) &\longmapsto P(x) \end{aligned}$$

- Cette application est bien définie car si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont tels que $P(\zeta) = Q(\zeta)$, alors M divise $P - Q$ car M est le polynôme minimal de ζ et $P - Q$ annule ζ .

Mais alors $P - Q$ est annulateur de x car $P - Q$ est multiple de M .

Donc $P(x) = Q(x)$.

- Cette application est automatiquement un morphisme de \mathbb{R} -algèbres, car $\varphi(1) = 1$ et φ préserve la somme, la \mathbb{R} -linéarité et le produit.

- Cette application est bijective :

elle est injective comme morphisme d'anneaux au départ d'un corps ;

elle est surjective puisqu'elle atteint x qui engendre $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$.

$$\boxed{\text{Si } x \in A \setminus \mathbb{R}, \mathbb{R} + \mathbb{R}x \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre isomorphe à } \mathbb{C} .}$$

21. Puisque l'on suppose que A n'est pas isomorphe à \mathbb{R} , il existe $x \in A \setminus \mathbb{R}$.

Alors, d'après la question **20.b)**, il existe un isomorphisme d'algèbres $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} + \mathbb{R}x$.

Soit $i_A = \varphi(i)$. D'après les propriétés de morphisme de φ ,

$$\boxed{i_A^2 = -1}.$$

22.a) L'application $-T$ est la conjugaison par i_A donc est un morphisme d'algèbres.

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x, y \in A, T(xy) = -T(x)T(y)}.$$

22.b) $T^2 = \text{id}$, donc T est une symétrie, donc on a la décomposition :

$$\boxed{A = \text{Ker}(T - \text{id}) \oplus \text{Ker}(T + \text{id})}.$$

23. Puisque 1 et i_A commutent avec i_A , $T|_U = -\text{id}_U$. Donc $\text{Ker}(T + \text{id}) \supset U$.

Montrons que $\text{Ker}(T + \text{id}) \subset U$.

Soit $y \in \text{Ker}(T + \text{id})$. Alors $i_A y i_A = -y$, autrement dit, y et i_A commutent.

Soit V la sous-algèbre de A engendrée par i_A et y .

C'est une algèbre commutative sans diviseurs de zéro.

Soit M le polynôme minimal de y . Il est de degré 2 car $y \notin \mathbb{R}$.

Soit $\{a \pm ib\}$ les deux racines dans \mathbb{C} dans M .

Alors $\{a \pm i_A b, y\}$ est un ensemble de racines de M dans V .

Admettons, ce que l'on démontrera ci-dessous, que :

(i) V est de dimension finie,

(ii) toute sous-algèbre de A commutative de dimension finie est un corps.

Alors V est un corps et M peut être vu comme un polynôme de $V[X]$.

En tant que tel, M ne peut avoir au plus que deux racines dans V .

Donc y est l'une des racines $\{a \pm i_A b\}$, donc $V = U$.

$$\boxed{\text{Ker}(T + \text{id}) = U}.$$

Comme nous avons supposé que A n'est pas isomorphe à \mathbb{C} , A n'est pas réduite à U . Donc :

$$\boxed{\text{Ker}(T - \text{id}) \neq \{0\}}.$$

• (i) Soit r le degré du polynôme minimal de y .

Alors $\text{Vect}(1, y, \dots, y^{r-1}, i_A, i_A y, \dots, i_A y^{r-1})$ est stable par produit.

Donc $\dim(V) \leq 2r$.

• (ii) Montrons que toute sous-algèbre commutative V de A de dimension finie est un corps.

Soit $x \in V \setminus \{0\}$. Considérons l'application $\varphi_x : V \rightarrow V$.

$$y \mapsto xy$$

Puisque x est un élément régulier, φ est injective.

De plus, c'est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie.

Donc c'est un isomorphisme.

Donc 1_A possède un antécédent, autrement dit, x est inversible dans V .

24.a) Soit $\gamma \in \text{Ker}(T - \text{id})$. Alors :

$$T(\beta\gamma) = i_A \beta \gamma i_A = -(i_A \beta i_A)(i_A \gamma i_A) = -\beta\gamma.$$

Donc $\beta\gamma \in \text{Ker}(T + \text{id})$. Donc :

$$\boxed{\text{l'application } x \mapsto \beta x \text{ envoie } \text{Ker}(T - \text{id}) \text{ dans } \text{Ker}(T + \text{id})}.$$

En particulier, puisque en prenant $\beta = \gamma$, puisque $\text{Ker}(T + \text{id}) = U$, on a :

$$\boxed{\beta^2 \in U}.$$

Donc Puisque $\beta \in \text{Ker}(T - \text{id})$, il vient $\beta U \subset \text{Ker}(T - \text{id})$.

Or $x \mapsto \beta x$ est un isomorphisme.

Donc $\dim(\text{Ker}(T - \text{id})) \leq \dim(\text{Ker}(T + \text{id})) = 2$.

Mais $\dim(\beta U) = 2$, donc :

$$\boxed{\text{Ker}(T - \text{id}) = \beta U}.$$

24.b) Rappelons que le polynôme minimal de β est irréductible, sans être de degré 1 car $\beta \notin \mathbb{R}$.

Le polynôme minimal de β est donc de la forme $X^2 + aX + b$ avec $a^2 - 4b < 0$.

Alors $-a\beta - b = \beta^2$, donc $-a\beta - b \in U$. Donc $a = 0$.

Donc le polynôme minimal de β est $X^2 + b$ et $b < 0$. Donc :

$$\boxed{\beta^2 \in]-\infty, 0[.}$$

24.c) Soit A un \mathbb{R} -algèbre algébrique et sans diviseur de zéro, isomorphe ni à \mathbb{R} , ni à \mathbb{C} .

Les questions **21** à **24** s'appliquent.

Soit $\lambda > 0$ tel que $(\lambda\beta)^2 = -1$. Notons $j_A = \lambda\beta$, puis $k_A = i_A j_A$.

Alors $\text{Ker}(T + \text{id}) = \text{Vect}(1, i_A)$ et $\text{Ker}(T - \text{id}) = \text{Vect}(j_A, k_A)$, puis $A = \text{Vect}(1, i_A, j_A, k_A)$.

Notons $\Phi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, A)$ défini par $\Phi(E) = 1$, $\Phi(I) = i_A$, $\Phi(J) = j_A$, $\Phi(K) = k_A$.

C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

De plus, remarquons que $k_A^2 = (i_A j_A i_A) j_A = j_A^2 = -1$.

Puisque $j_A \in \text{Ker}(T - \text{id})$, $i_A j_A i_A = j_A$, donc $i_A j_A = -j_A i_A$.

De même, $k_A \in \text{Ker}(T - \text{id})$, $i_A k_A i_A = k_A$, donc $i_A k_A = -k_A i_A$.

On finit de vérifier les égalités :

$$i_A^2 = j_A^2 = k_A^2 = -1, \quad i_A j_A = -j_A i_A = k_A, \quad j_A k_A = -k_A j_A = i_A, \quad k_A i_A = -i_A k_A = j_A.$$

Alors, par linéarité, on en déduit que Φ est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres.

Donc A et \mathbb{H} sont isomorphes.

$\boxed{\text{Le théorème B est démontré.}}$

25. Soient $u, v \in V$. Alors :

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \|(u + v)^2\| + \|(u - v)^2\| && \text{car } \| \cdot \| \text{ est multiplicative} \\ &= \|u^2 + v^2 + 2uv\| + \|-u^2 - v^2 + 2uv\| \\ &\geq \|4uv\| && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\geq 4\|u\| \|v\| && \text{car } \| \cdot \| \text{ est multiplicative} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall u, v \in V, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \geq 4\|u\| \|v\|}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ un isomorphisme et $N : u \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|\varphi(u)\|$ une norme sur \mathbb{R}^2 . Alors,

$$\begin{aligned} (1, 0) &\mapsto x \\ (0, 1) &\mapsto y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathbb{R}^2, N(u) = N(v) = 1 &\Rightarrow \|\varphi(u)\| = \|\varphi(v)\| = 1 \\ &\Rightarrow \|\varphi(u) + \varphi(v)\|^2 + \|\varphi(u) - \varphi(v)\|^2 \geq 4\|\varphi(u)\| \|\varphi(v)\| \\ &\Rightarrow \|\varphi(u + v)\|^2 + \|\varphi(u - v)\|^2 \geq 4N(u)N(v) \\ &\Rightarrow N(u + v)^2 + N(u - v)^2 \geq 4. \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème A, N provient d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^2 :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, N(u)^2 = \langle u, u \rangle.$$

En partant de $x \in V$ et en posant $u = \varphi^{-1}(x)$, on obtient :

$$\forall x \in V, \|x\|^2 = \langle \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x) \rangle.$$

Ainsi,

$$\boxed{\| \cdot \| \text{ provient du produit scalaire : } \begin{array}{ll} V^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \langle \varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y) \rangle \end{array} .}$$

26. Soit $x \in A \setminus \mathbb{R}$ de norme 1.

Remarquons que $\| \cdot \|$ étant multiplicative, $\|1\| = 1$.

Alors, d'après la question **25**,

$$\|1 + x\|^2 + \|1 - x\|^2 \geq 4.$$

Mais comme la restriction de $\| \cdot \|$ à V provient d'un produit scalaire toujours d'après la question **25**, cette inégalité est une égalité (l'égalité du parallélogramme) :

$$\|1 + x\|^2 + \|1 - x\|^2 = 4.$$

Par multiplicativité de $\| \cdot \|$, il vient :

$$\|1 + x^2 + 2x\| + \|-1 - x^2 + 2x\|^2 = 4 = \|4x\|.$$

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, donc $1 + x^2 + 2x$ et $-1 - x^2 + 2x$ sont colinéaires :

il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $1 + x^2 + 2x = \lambda(1 + x^2 - 2x)$.

Puisque $2x \neq -2x$, $\lambda \neq 1$ et l'on obtient :

$$x^2 = \frac{1 - \lambda}{\lambda - 1} + \frac{2(1 + \lambda)}{\lambda - 1}x.$$

donc $x^2 \in \mathbb{R} + x\mathbb{R}$.

Ceci se généralise immédiatement aux éléments de A quelle que soit leur norme :

$$\boxed{\forall x \in A, x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x}.$$

27. Soit A un \mathbb{R} -algèbre pour laquelle il existe une norme multiplicative.

Nous avons montré à la question **26** que tous les éléments de A étaient algébriques.

Par ailleurs, pour tous $x, y \in A \setminus \{0\}$, $\|xy\| = \|x\| \|y\| \neq 0$, donc $xy \neq 0$.

Donc A est une algèbre sans diviseur de zéro.

Donc le théorème B s'applique et A est isomorphe à \mathbb{R} , \mathbb{C} ou \mathbb{H} .

$$\boxed{\text{Le théorème C est démontré.}}$$