

Un corrigé du concours Centrale-Supelec Maths-1- 2016 Filière MP

Mr : HAMANI Ahmed

I. Si $\rho(A) < 1$, alors $\lim A^m = 0$

I.A- Deux exemples de normes sous-multiplicatives

I.A-1) • Notons $L_1(A), \dots, L_n(A)$ les lignes d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1$.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $N(A) = 0$, alors $\forall i \in [1, n], \|L_i(A)\|_1 = 0$, donc les lignes de A sont nulles, ce qui assure la nullité de A .

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}, A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $N(\lambda A) = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(\lambda A)\|_1 =$
 $= \max_{1 \leq i \leq n} \|\lambda L_i(A)\|_1 = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i(A)\|_1 = |\lambda| N(A)$.

• Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\forall i \in [1, n], \|L_i(A+B)\|_1 = \|L_i(A) + L_i(B)\|_1 \leq$
 $\leq \|L_i(A)\|_1 + \|L_i(B)\|_1 \leq N(A) + N(B)$ et le passage au sup donne $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.
 On conclut que N est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $i \in [1, n], A, B \in M_n(\mathbb{K}), L_i(AB) = \sum_{j=1}^n [AB]_j = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| =$
 $= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right) |a_{i,k}| \leq N(B) \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \leq N(B) N(A)$, ce qui donne par passage au sup,
 $N(AB) \leq N(A) N(B)$.

I.A-2) • Pour $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, l'application $A \mapsto Q^{-1}AQ$ est un isomorphisme, donc $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{K})$.

• Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Par sous-multiplicativité de N , on obtient :
 $\|AB\| = N(Q^{-1}ABQ) = N(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ) \leq N(Q^{-1}AQ)N(Q^{-1}BQ) = \|A\| \|B\|$.

I.B- Une conséquence de l'inégalité $\rho(A) < 1$

On se donne A dans $M_n(\mathbb{C})$, avec $\rho(A) < 1$. On veut montrer que $\lim A^m = 0$.

I.B-1) • $\hat{T}$ est triangulaire supérieure comme produit de matrices triangulaires supérieures.

• On trouve $[\hat{T}]_{i,j} = \begin{cases} \delta^{j-i} t_{i,j} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$.

• $N(\hat{T}) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\hat{t}_{i,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=i}^n |t_{i,j}| \delta^{j-i} \leq N(T) \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=i}^n \delta^{j-i} = N(T) \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1 - \delta^{n-i+1}}{1 - \delta}$.

On choisit $\delta < 1$, on aura $N(\hat{T}) \leq \frac{1}{1 - \delta}$.

Le choix $\delta < \min(1, 1 - N(T))$ entraîne que $N(\hat{T}) < 1$.

I.B-2) • $\|A\| = \|PTP^{-1}\| = N(Q^{-1}PTP^{-1}Q) = N(\Delta^{-1}T\Delta) = N(\hat{T}) < 1$.

• $\|A\| < 1$ et $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative dans $M_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc $\sum_n A^n$ est
 absolument convergente, ce qui entraîne la convergence de $(A^m)_m$ vers 0.

II. Chemins dans les matrices positives

Dans cette partie, A désigne une matrice positive de $M_n(\mathbb{R})$.

II.A- Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire

• Soit $i \neq j$ et soit $i = i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = j$ un chemin dans A .

- Si ce chemin est élémentaire, c'est fini.

- Si non, il existe $1 \leq p < q \leq m$ tel que $i_p = i_q$, alors on considère le chemin
 $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_p \rightarrow i_{q+1} \rightarrow \dots \rightarrow i_m = j$ qui de longueur $< m$.

- Si ce chemin est élémentaire, c'est fini.

- Si non on répète le même procédé qui s'arrête par avoir un chemin élémentaire dans A de longueur $\leq n-1$, puisque ces éléments appartiennent à $\{1, \dots, n\}$ et sont distincts.

• Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et soit $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = i$ un circuit dans A . On applique le premier point au chemin $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m-1}$.

II.B- Une caractérisation de l'existence d'un chemin de i à j

On va procéder par récurrence sur $m \geq 1$.

- Pour $m = 1$, par définition $i \mapsto j$ est un chemin de longueur 1 si, et seulement si, $a_{i,j} > 0$.

- Supposons l'équivalence est aisé au rang m .

$\Rightarrow$ Si $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m \rightarrow i_{m+1} = j$ est un chemin dans A de longueur $m+1$, alors $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m$
 est un chemin dans A de longueur m , donc par hypothèse de récurrence $\alpha_{i,i_m}^{(m)} > 0$, donc

$$a_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} \geq a_{i,i_m}^{(m)} a_{i_m,j}, \text{ or } a_{i_m,j} > 0 \text{ par définition du chemin, donc } a_{i,j}^{(m+1)} > 0.$$

$\Leftrightarrow$ Supposons que $a_{i,j}^{(m+1)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} > 0$, alors $\exists k \in [[1, n]]$ tel que $a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} > 0$, donc $a_{i,k}^{(m)} > 0$ et $a_{k,j} > 0$, ce qui entraîne par hypothèse de récurrence l'existence d'un chemin dans A $i \rightarrow \dots \rightarrow k$ de longueur m , donc $i \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow j$ est un chemin dans A , de longueur $m + 1$.

II.C- Chemins dans une puissance de A

$\Rightarrow$ Soit $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_l = j$ un chemin dans A^m de longueur l , alors pour $k \in [[0, l-1]]$ $a_{i_k, i_{k+1}}^{(m)} > 0$, ce qui entraîne par II – B l'existence d'un chemin dans A d'origine i_k et d'extrémité i_{k+1} de longueur m . En superposant ces chemins, on obtient un chemin dans A de i vers j de longueur ml .

$\Leftarrow$ Soit $i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_{ml} = j$ un chemin dans A de longueur ml , alors pour tout $k \in [[0, l-1]]$, $i_{km} \rightarrow \dots \rightarrow i_{(k+1)m}$ est un chemin dans A de longueur m , donc $a_{i_{km}, i_{(k+1)m}}^{(m)} > 0$, ce qui assure que, $i = i_0 \rightarrow i_m \rightarrow i_{2m} \rightarrow \dots \rightarrow i_{lm} = j$ est un chemin dans A^m de longueur l .

III. Matrices primitives et indice de primitivité

Dans toute la suite, matrice primitive signifie matrice carrée positive primitive.

III.A- Chemins élémentaires dans une matrice primitive

A étant une matrice primitive, donc $\exists m \geq 1$ tel que $A^m > 0$.

- Soit $i \neq j$, alors $a_{i,j}^{(m)} > 0$, ce qui entraîne par II – B, puis par II – A qu'il existe dans A un chemin élémentaire de i à j de longueur $l \leq n-1$.
- Soit $i \in [[1, n]]$, alors $a_{i,i}^{(m)} > 0$, donc comme précédemment, il existe dans A un circuit élémentaire passant par i de longueur $l \leq n$.

III.B- Puissances d'une matrice primitive

$$\text{III.B-1) Soit } A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ définie par } a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \text{ ou } j = n \\ 0 & \text{si non} \end{cases} . A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors A est positive sans l'être strictement et A^2 est telle que $a_{i,j}^{(2)} = 1$ si $(i, j) \neq (n, n)$ et $a_{i,j}^{(2)} = 1$ si non, donc $A^2 > 0$.

III.B-2) Soit $i \in [[1, n]]$.

$$[Bx]_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} x_j, \text{ or } x \neq 0, \text{ donc } \exists k \text{ tel que } x_k > 0 \text{ et par suite}$$

$$[Bx]_i \geq b_{i,k} x_k > 0, \text{ ce qui assure que } Bx > 0.$$

III.B-3) • Les colonnes de A ne sont pas nulles. En effet s'il existe j tel que $c_j = 0$, alors $Ae_j = 0$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Donc $A^m e_j = 0$, ce qui contredit $A^m > 0$.

• On a $A^m > 0$, et $\forall j$, $c_j = Ae_j$ n'est pas nul, donc d'après la question précédente, $A^{m+1} e_j = A^m Ae_j > 0$, c'est à dire $A^{m+1} > 0$. (ces colonnes sont strictement positives). et par une récurrence évidente $\forall p \geq m$, $A^p > 0$.

III.B-4) Si A est primitive, $\exists m \geq 1$ tel que $A^m > 0$ et par la question précédente, on aura $\forall k \geq 1$, $A^{km} = (A^m)^k > 0$, donc A^k est primitive.

III.B-5) Si $\rho(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$, donc A est nilpotente et par suite $A^n = 0$, ce qui est en contradiction avec la question III – B – 4 qui dit que A^p est primitive.

III.C- La matrice de Weilandt

III.C-1) • W_n^T est la matrice compagnon associée au polynôme $X^n - X - 1$, donc $\chi_{W_n} = \chi_{W_n^T} = X^n - X - 1$.

$$\bullet W_n^{n^2-2n+1} = (W_n^n)^{n-2} \cdot W_n = (W_n + 1)^{n-2} \cdot W_n = \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k W_n^{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} W_n^k.$$

$$\bullet W_n^{n^2-2n+2} = W_n^{n^2-2n+1} \cdot W_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} W_n^{k+1} = \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} W_n^k = \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} W_n^k + W_n^n = I_n +$$

$$W_n + \sum_{k=2}^{n-1} C_{n-2}^{k-2} W_n^k.$$

III.C-2) • Le plus court circuit dans W_n passant par 1 est, $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$ qui est de longueur n .

• Montrons que $\forall k \in [[1, n-1]]$, $[W_n^k]_{1,1} = 0$.

Supposons qu'il existe $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que $[W_n^k]_{1,1} > 0$, alors d'après II – B, il existe un circuit dans W_n de longueur k passant par 1, ce qui contredit la minimalité de n comme longueur minimale des circuits dans W_n passant par 1.

On obtient donc $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} 0 = 0$, ce qui assure que $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.

III.C-3) • Soit $i \neq j$.

Du cycle donné à la question III – C – 2, on obtient :

Si $i < j$, le chemin $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow j$ est dans W_n de longueur $j-i \leq n-1$.

Si $i > j$, le chemin $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow j$ est dans W_n de longueur $n-(i-j) \leq n-1$.

• On vient de montrer que $\forall i \neq j$ il existe un chemin dans W_n de i à j de longueur un certain $k \leq n-1$, donc d'après la question II – B, $[W_n^{(k)}]_{i,j} > 0$, donc

$$[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,j} = [W_n]_{i,j} + \sum_{p=2}^{n-1} C_{n-2}^{p-2} [W_n^p]_{i,j} \geq C_{n-2}^{k-2} [W_n^k]_{i,j} > 0.$$

De plus pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,i} \geq [I_n]_{i,i} = 1$.

On conclut que $W_n^{n^2-2n+2} > 0$, donc W_n est primitive d'indice de primitivité $n^2 - 2n + 2$.

III.D- Indice de primitivité maximum

Dans toute cette sous-partie, A est une matrice primitive donnée dans $M_n(\mathbb{R})$.

III.D-1) • L'hypothèse $l = n$ entraîne que tout circuit élémentaire dans A est de longueur n .

Soit $C : i = i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = i$ un circuit de longueur m , la division euclidienne de m par n donne l'existence de q, r tel que $m = nq + r$ avec $0 \leq r < n$.

- Montrons que $i_n = i$.

Déjà $i_0, \dots, i_{n-1}$ sont distincts, car si non on aura un circuit dans A de longueur $< n$, ce qui contredit la minimalité de n .

Si $i_n \neq i$, alors $i_n = j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, on aura donc un circuit dans A passant par j de longueur $< n$, ce qui contredit la minimalité de n .

Le même raisonnement aboutit à $i_n = i_{2n} = \dots = i_{qn} = i$, alors $i = i_{qn} \rightarrow i_{qn+1} \rightarrow \dots \rightarrow i_m = i$ est un circuit dans A de longueur $r \in [0, n-1]$, donc par minimalité de n , $r = 0$ et par suite $m = qn$.

• On va montrer que $\forall i, [A^{kn+1}]_{i,i} = 0$.

Supposons qu'il existe i tel que $[A^{kn+1}]_{i,i} > 0$, alors d'après II – B, il existe dans A un circuit passant par i est de longueur $kn+1$, ce qui contredit que cette longueur doit être un multiple de n .

On conclut que A^{kn+1} est de diagonale nulle.

• A étant une matrice primitive, donc d'après III – B – 3, $A^{kn+1} > 0$ pour k assez grand, ce qui contredit que sa diagonale est nulle.

III.D-2) a) Montrons qu'il existe dans A un chemin d'origine i de longueur $n-l$ et d'extrémité $k \in \{1, 2, \dots, l\}$.

• Cas où $i \in \{1, \dots, l\}$.

On fait la division euclidienne de $n-l$ par l , on a donc $n-l = ql + r$ avec $0 \leq r < l$.

Notons C le chemin $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow l \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow i-1$ qui est de longueur l .

C' le chemin extrait de C , de longueur r , $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow r$, alors en superposant successivement le chemin C q - fois puis le chemin C' , on obtient le chemin

$C \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow C'$ qui est dans A et de longueur $n-l = ql + r$.

• Cas où $i \in \{l+1, \dots, n\}$.

$n-l \leq n-1$, donc d'après III – A, il existe dans A un chemin élémentaire C d'origine i et de longueur $n-l$, or tout chemin élémentaire inclu dans $[[l+1, n]]$ est de longueur $\leq n-l-1$, donc C passe nécessairement par un élément $j \in \{1, \dots, l\}$.

On a donc le chemin $C : i \rightarrow \dots \rightarrow j$, soit $p \leq n-l$ sa longueur. On applique le cas précédent à $j \in \{1, \dots, l\}$, il existe dans A un chemin C' d'origine j et d'extrémité $k \in \{1, \dots, l\}$ de longueur $n-l-p$.

On conclut que $C \rightarrow C'$ est un chemin dans A d'origine i et d'extrémité k de longueur $n-l-p+p = n-l$.

b) • Pour tout $p \in \{1, \dots, l\}$, le circuit

$p \rightarrow p+1 \rightarrow \dots \rightarrow l \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow p$ est dans A de longueur l , donc d'après II – B, $[A^l]_{p,p} > 0$, en particulier puisque $k \in \{1, \dots, l\}$, $[A^l]_{k,k} > 0$.

- Si $k = j$, le chemin $k \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow k$ est dans A^l de longueur $n-1$. (k est répété $(n-1)$ - fois).

- Si $k \neq j$, La question III – B – 4 assure que A^l est aussi primitive, donc d'après III – A, il existe dans A^l un chemin d'origine k et d'extrémité j , de longueur $n-1$. ($n-1 \leq n-1$).

- c) D'après a), il existe dans A un chemin de i à k , $i \rightarrow \dots \rightarrow k$, de longueur $n - l$, et d'après b), il existe dans A un chemin de k à j , $k \rightarrow \dots \rightarrow j$ de longueur $l(n - 1)$, donc le chemin $i \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow j$ est un chemin dans A de i à j de longueur $n - l + l(n - 1) = n + l(n - 2)$, donc d'après II - B, $[A^{n+l(n-2)}]_{i,j} > 0$ et ceci pour tout couple (i, j) , ce qui assure que $A^{n+l(n-2)} > 0$.
 Or $l \leq n - 1$, donc $(n^2 - 2n + 2) - (n + l(n - 2)) \geq (n^2 - 2n + 2) - (n + (n - 1)(n - 2)) = 0$, ceci montre que $n^2 - 2n + 2 \geq n + l(n - 2)$, ce qui entraîne par II - B - 3 que $A^{n^2-2n+2} > 0$.

IV. Étude des puissances d'une matrice primitive

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive A de $M_n(\mathbb{R})$.

IV.A- Puissances de la matrice $B = A - rL$

IV.A-1) Il suffit de montrer que $y \in H^\perp$.

Soit $z \in H = \text{Im}(A - rI_n)$, alors $\exists t \in \mathbb{R}^n$ tel que $z = (A - rI_n)t$, donc $(y|z) = (y|At - rt) = (y|At) - (ry|t) = (y|At) - (A^T y|t) = 0$, donc $y \in H^\perp$.

IV.A-2) • $L^2 = xy^T xy^T = x(y^T x)y^T = (y^T x)(xy^T) = 1xy^T = L$, donc L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

• $(A - rI_n)L = (A - rI_n)xy^T = 0y^T = 0$, donc $\text{Im}(L) \subset \text{Ker}(A - rI_n)$, de plus $(x|y) \neq 0$, donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$, ce qui assure que $L = xy^T \neq 0$ et par suite $1 \leq \dim(\text{Im}(H)) \leq \dim(D) = 1$ d'où $\text{Im}(L) = D$.

• $L(A - rI_n) = xy^T(A - rI_n) = x((A^T - rI_n)y)^T = x0 = 0$, donc $\text{Im}(A - rI_n) = H \subset \text{Ker}(L)$ avec égalité de dimensions, donc $\text{Ker}(L) = H$.

On vient de montrer que L est la projection sur $\text{Im}(L) = D$ parallèlement à $\text{Ker}(L) = H$.

IV.A-3) • $\text{rg}(L) = \text{rg}(xy^T) \leq \min(\text{rg}(x), \text{rg}(y)) \leq 1$, de plus $L \neq 0$, donc $\text{rg}(L) = 1$.

• $x > 0$ et $y > 0$, donc pour tous i, j , $[L]_{i,j} = x_i y_j > 0$, ce qui assure que $L > 0$.

• $L^T y = (xy^T)^T y = yx^T y = 1y = y$.

IV.A-4) • $AL = Axy^T = rxy^T = rL$.

• $LA = xy^T A = x(A^T y)^T = x(ry^T) = rL$.

• Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $m = 1$, rien à montrer.

- Supposons que $(A - rL)^m = A^m - r^m L$ pour un certain m , alors $(A - rL)^{m+1} = (A - rL)^m(A - rL) = A^{m+1} - rA^m L - r^m LA + r^{m+1} L^2$, or $AL = LA = rL$, donc par récurrence $A^m L = r^m L$, de plus $r^m LA = r^{m+1} L$ et $r^{m+1} L^2 = r^{m+1} L$, donc $(A - rL)^{m+1} = A^{m+1} - r^{m+1} L$, ce qui achève la récurrence.

IV.B- La matrice $B = A - rL$ vérifie $\rho(B) < r$

Dans cette question, on pose $B = 1 - rL$ et on prend λ une valeur propre non nulle de B et z un vecteur propre associé.

IV.B-1) • Soit $\lambda \in \text{Sp}(B)$ non nulle, alors $z = \frac{1}{\lambda} Bz$, donc $Lz = \frac{1}{\lambda} LBz = \frac{1}{\lambda} (LA - rL)z = 0$.

• $\lambda z = Bz = Az - rLz = Az$.

• On vient de montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(B)$ non nulle, $\lambda \in \text{Sp}(A)$, donc $\forall \lambda \in \text{Sp}(B) \setminus \{0\}$, $|\lambda| \leq \rho(A) = r$ et par passage au max, on aura $\rho(B) \leq r$.

IV.B-2) • On a $|\lambda||z| = |\lambda z| = |Az| \leq A|z|$, donc $t = A|z| - |\lambda||z| \geq 0$.

On va montrer que ce vecteur est nul.

Si ce vecteur est non nul, alors en considérant $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$, on aura d'après III - B - 2), $A^m t = A(A^m |z|) - |\lambda| A^m |z| > 0$, or $z \neq 0$ comme vecteur propre, donc $A^m |z| > 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A(A^m |z|) - |\lambda| A^m |z| > \varepsilon A^m |z|$, donc $A(A^m |z|) > (\varepsilon + |\lambda|) A^m |z|$, ce qui entraîne par récurrence simple que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $A^p(A^m |z|) > (\varepsilon + |\lambda|)^p A^m |z|$.

On pose $C = \frac{1}{|\lambda| + \varepsilon} A$. On obtient $C^p(A^m |z|) > A^m |z|$, or $\rho(C) = \frac{|\lambda|}{\varepsilon + |\lambda|} < 1$, donc $C^p \rightarrow 0$ et le passage à la limite dans l'inégalité $C^p(A^m |z|) > A^m |z|$ aboutit à l'absurdité $0 \geq A^m |z|$.

On vient de montrer que $|Az| = A|z|$, donc si on note $z = (z_1, \dots, z_n)$, alors $\forall i$, $[|Az|]_i = |\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j| =$

$\sum_{j=1}^n a_{i,j} |z_j|$, c'est une égalité de l'inégalité triangulaire, alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall j, z_j = e^{i\theta} |z_j|$, donc

$z = e^{i\theta} |z|$ et par suite $\lambda z = Az = e^{i\theta} A|z| = re^{i\theta} |z| = rz$ et $z \neq 0$, donc $\lambda = r$.

• $\lambda = r$, donc $z \in D = \text{Vect}(x)$ et puisque $D = \text{Im}(L)$, on aura $Lz = z$, mais $Lz = 0$, donc $z = 0$ ce qui contredit le fait que z est un vecteur propre.

On conclut donc que $\rho(B) < r$.

IV.B-3) $(A - rL)^m = B^m = r^m \left(\left(\frac{1}{r}A \right)^m - L \right)$, donc $\left(\frac{1}{r}B \right)^m = \left(\frac{1}{r}A \right)^m - L$, or $\rho(B) < r$, donc $\rho\left(\frac{1}{r}B\right) < 1$,
ce qui entraîne que $\lim \left(\frac{1}{r}B \right)^m = 0$, c'est à dire $\left(\frac{1}{r}A \right)^m \rightarrow L$.

IV.C- Le rayon spectral de A est une valeur propre simple

V. Matrices carrées positives irréductibles

Dans toute la suite, matrice irréductible signifie matrice carrée positive irréductible.

Dans toute cette partie, A est une matrice positive donnée dans $M_n(\mathbb{R})$.

V.A- Premières propriétés des matrices irréductibles

V.A-1) A est irréductible si, et seulement si, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe dans A un chemin de i à j.

V.A-2) Dans cette question, on doit prendre $i \neq j$. (voir l'exemple de la question suivante).

Soit $i \neq j$, alors d'après la question II - A, il existe un chemin élémentaire de longueur $\leq n - 1$.

V.A-3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$, le circuit $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$ montre qu'il existe toujours un chemin

de i à j pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, donc A est irréductible.

$Ae_n = e_{n-1}$, $A^2e_n = e_{n-2}$, $A^{n-1}e_n = e_1$ et $A^n = I_n$, donc $A^m \in \{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$, or les égalités précédentes montrent que les matrices $A, A^2, \dots, A^{n-1}$ ne sont pas strictement positives, donc A^m n'est jamais strictement positive et par suite A n'est pas primitive.

V.A-4) Si A n'est pas irréductible, alors $\exists i, j$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}, a_{i,j}^{(m)} = 0$, donc $\forall m \in \mathbb{N}, [(a_{i,j}^{(2)})^{(m)}]_{i,j} = [a_{i,j}^{(2m)}]_{i,j} = 0$, c'est à dire A^2 n'est pas irréductible.

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = I_2$.

A est irréductible. En effet $a_{1,2} = a_{2,1} = 1 > 0$ et $a_{1,1}^{(2)} = a_{2,2}^{(2)} = 1 > 0$, mais A^2 n'est pas irréductible.

V.A-5) Soit A une matrice irréductible et supposons que $\rho(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$, donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{Sp}(A^m) = \{0\}$ et par suite $\text{Tr}(A^m) = 0$ et puisque $A^m \geq 0$, on aura $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall i, a_{i,i}^{(m)} = 0$, ce qui contredit que A est irréductible.

V.B- Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire

V.B-1) A irréductible $\implies B > 0$:

Soit i, j tel qu'il existe $m \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$, alors $[B]_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,j}^{(2)} + \dots + a_{i,j}^{(n-1)} \geq a_{i,j}^{(m)} > 0$, donc $B > 0$.

$B > 0 \implies C > 0$:

Supposons que $B > 0$, alors $C = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k A^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} A^k = B > 0$.

$C > 0 \implies A$ est irréductible :

Supposons que $C > 0$. Si A n'est pas irréductible, alors $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\forall m, a_{i,j}^{(m)} = 0$, donc

$c_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_{i,j}^{(k)} = 0$, ceci contredit le fait que $C > 0$.

V.B-2) • Supposons que A est irréductible et qu'il existe j tel que $c_j(A) = Ae_j = 0$, alors $\forall m, A^m e_j = 0$, c'est à dire $\forall j, a_{i,j}^{(m)} = 0$, ce qui contredit que A est irréductible.

• C'est clair que A est irréductible si, et seulement si, A^T est irréductible, donc le résultats précédent s'applique pour les lignes.

V.C- Deux conditions suffisantes de primitivité

Dans cette question, A est une matrice irréductible donnée.

V.C-1) Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$. A étant irréductible, donc $\exists m \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $a_{i,j}^{(m)} > 0$, d'où l'existence d'un chemin dans A, $i \rightarrow \dots \rightarrow j$ de longueur m.

- Si $m = n-1$, alors $a_{i,j}^{(n-1)} > 0$.

- Si $m < n-1$, alors vu que $a_{j,j} > 0$ par hypothèse on aura en ajoutant au chemin précédent $n-1-m$ termes égaux à j, le chemin $i \rightarrow \dots \rightarrow j \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow j$ qui est dans A et de longueur $n-1$.

Donc $\forall i, j, a_{i,j}^{(n-1)} > 0$, c'est à dire $A^{n-1} > 0$.

- V.C-2) • Soit $j, k \in \{1, \dots, n\}$, A étant irréductible, donc $\exists m_1, m_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\alpha_{j,i}^{(m_1)} > 0$ et $\alpha_{i,k}^{(m_2)} > 0$, ce qui assure l'existence des chemins $j \rightarrow \dots \rightarrow i$ de longueur m_1 et $i \rightarrow \dots \rightarrow k$ de longueur m_2 , alors le chemin $j \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow \dots \rightarrow k$ de longueur $m_1 + m_2$ de j à k et passant par i .
- Considérons m le maximum des longueurs de chemins ainsi obtenus, alors m ne dépend pas de j, k et le fait que $\alpha_{i,i} > 0$ nous permet de construire le chemin $j \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow i \rightarrow \dots \rightarrow k$ qui est de longueur m où on a ajouté des i au milieu. Donc $\alpha_{j,k}^{(m)} > 0$ ceci pour tous j, k , donc $A^m > 0$.

VI. Le coefficient d'imprimitivité

Soit $A = (a_{i,j})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, avec $A \geq 0$.

VI.A- Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive

- Soit A une matrice imprimitive de coefficient $p \geq 2$. Pour tout m non multiple de p , montrons que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $[A^m]_{i,i} = 0$.
- Si $\exists i$ tel que $[A^m]_{i,i} > 0$, alors $\text{tr}(A^m) > 0$. Le spectre $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est invariant par ω , donc $\text{Sp}(A) = \{\omega\lambda_1, \dots, \omega\lambda_n\}$, donc $\text{Tr}(A^m) = \omega^m \text{Tr}(A^m)$, donc $(1 - \omega^m) \text{Tr}(A^m) = 0$ et vu que $\text{Tr}(A^m) > 0$, on aura $\omega^m = 1$, ce qui exige la contradiction, m est multiple de p . On conclut donc que $\forall i$, $[A^m]_{i,i} = 0$.
- Si le résultats de IV – B – 3 tient encore avec A primitive, alors $\left(\frac{1}{r}A\right)^m \rightarrow L$ et par continuité de la trace, $\frac{1}{r^m} \text{Tr}(A^m) \rightarrow \text{Tr}(L) = 1$, or $\text{Tr}(A^m) = 0$, ce qui aboutit à l'absurdité $0 = 1$

VI.B- Une matrice de Weilandt " modifiée "

VI.B-1) Les deux cycles dans Z_n , à savoir

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n \rightarrow 2$
assurent que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un chemin dans Z_n de i à j , donc Z_n est irréductible.

VI.B-2) • $\chi_{Z_n} = \det(XI_n - Z_n)$.

Avec les opérations élémentaires, $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$, puis $L_n \leftarrow L_n + L_1$, on obtient

$$\chi_{Z_n} = \begin{vmatrix} X & -1 & & 0 \\ & X & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & -2 & & X \end{vmatrix} \quad \text{c'est le polynôme caractéristique de la transposée de la matrice compagnon}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \chi_{Z_n} = X^n - 2X.$$

• Ici $\rho(A) = 2^{1/n-1}$, les valeurs propres λ de Z_n tel que $|\lambda| = \rho(A)$ sont solutions de $\lambda^{n-1} = 2$, donc l'indice d'imprimitivité est $n-1$.

VI.B-3) • Par le théorème de Cayley-Hamilton, $Z_n^n = 2Z_n$, donc $Z_n^{n^2-2n+2} = (Z_n^n)^{n-2} \cdot Z_n^2 = (2Z_n)^{n-2} \cdot Z_n^2 = 2^{n-2} Z_n^n = 2^{n-1} Z_n$.

• L'égalité précédente assure que $Z_n^{n^2-2n+2}$ n'est pas strictement positive, donc d'après la conclusion de III – D, Z_n n'est pas primitive.

VI.C- Coefficient d'imprimitivité et polynôme caractéristique

Soit $A \geq 0$ dans $M_n(\mathbb{R})$ une matrice irréductible. On note r son rayon spectral.

Soit $p \geq 1$ le coefficient d'imprimitivité de A .

Soit $\chi_A(X) = X^n + c_{k_1} X^{n-k_1} + \dots + c_{k_s} X^{n-k_s}$ son polynôme caractéristique, écrit suivant les puissances décroissantes et en ne laissant apparaître que les coefficients c_k non nuls.

VI.C-1) Soit $k \in \{k_1, \dots, k_s\}$, le spectre est invariant par ω , donc

$$c_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega \lambda_{i_1} \dots \omega \lambda_{i_k} = c_k \omega^k \text{ d'où } (1 - \omega^k) c_k = 0$$

et vu que $c_k \neq 0$, on aura $\omega^k = 1$ et par suite p divise k .

VI.C-2) • Montrons que βr est racine de χ_A .

On pose pour $j \in \{1, \dots, s\}$, $k_j = m_j q p$, alors $(\beta r)^{n-m_j q p} = (\beta)^{n-m_j q p} r^{n-m_j q p} = \beta^n r^{n-m_j q p}$, donc $\chi_A(\beta r) = \beta^n \chi_A(r) = \beta^n 0 = 0$.

• $\beta r \in \text{Sp}(A)$ et $|\beta r| = |r|$, donc $(\beta r)^p = r^p$, donc $\beta^p = 1 = e^{i2\pi/q}$, ce qui contredit que $q \geq 2$. On conclut donc que p est le pgcd des k_i , $i \in \{1, \dots, s\}$.

VI.D- Coefficient d'imprimitivité et longueur des circuits

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice irréductible. Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $L_i = \{m \in \mathbb{N}^*, a_{i,i}^{(m)} > 0\}$ l'ensemble (non vide) des longueurs des circuits de A qui passent par i , et on note d_i le pgcd des éléments de L_i .

VI.D-1) Soit $k \in \{0\} \cup L_j$.

- $a_{i,j}^{(r)} > 0$, $a_{j,j}^{(k)} > 0$ et $a_{j,i}^{(s)} > 0$, alors il existe dans A un circuit de longueur $r + k + s$ passant par i , donc $a_{i,i}^{(r+k+s)} > 0$, c'est à dire $r + k + s \in L_i$ et par suite d_i divise $r + k + s$.
 - De même $a_{i,j}^{(r)} > 0$ et $a_{j,i}^{(s)} > 0$, alors il existe dans A un circuit de longueur $r + s$ et passant par i , donc $a_{i,i}^{(r+s)} > 0$, c'est à dire $r + s \in L_i$ et par suite d_i divise $r + s$.
- On aura donc d_i divise $(r + k + s) - (r + s) = k$ et ceci $\forall k \in \{0\} \cup L_j$, donc d_i divise d_j et par symétrie d_j divise d_i , ce qui entraîne $d_i = d_j$. Notons dans la suite d cette valeur commune.

VI.D-2) A est primitive, donc $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m > 0$, d'où d'après III – B – 3), $A^{m+1} > 0$, ceci entraîne que $m, m+1 \in L_i$, c'est à dire d divise m et d divise $m+1$, donc d divise $m+1 - m = 1$ et par suite $d = 1$.

VI.D-3) Si d n'est pas multiple de p , alors d'après VI – A, A^d est à diagonale nulle, donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $d \notin L_i$. De même $2d, 3d, \dots, (p-1)d$ ne sont pas multiples de p , donc n'appartiennent pas à L_i pour tout i , et par suite le pgcd des éléments de L_i est $\geq pd \geq 2d$, ce qui contredit que d est le pgcd.

VI.D-4) 1 n'est pas multiple de p , donc d'après VI – A, la diagonale de A est nulle.

- a) - Si $j \notin H$, $\sigma(j) = j$, donc $[xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = [xI_n - A]_{j,j} = x$, donc $\prod_{j \notin H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = x^{n-h}$.
- Si $j \in H$, $\sigma(j) \neq j$, donc $[xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = -a_{j,\sigma(j)}$, donc $\prod_{j \in H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = (-1)^h \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$,
- ce qui entraîne que $\psi(\sigma) = \prod_{j \in H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} \cdot \prod_{j \notin H} [xI_n - A]_{j,\sigma(j)} = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$.
- b) • $\psi(\sigma) = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)} \neq 0$, donc $\forall j \in H$, $a_{j,\sigma(j)} > 0$, donc $j_1 \rightarrow j_2 \rightarrow \dots \rightarrow j_m \rightarrow j_1$ est un circuit dans A .
- On vient de montrer qu'il existe dans A un circuit de longueur m , donc $m \in L_{j_1}$, ce qui entraîne que d divise m .
 - Soit $\sigma = c_1 \dots c_p$ la décomposition en cycles disjoints où c_i de longueur $m_i \geq 2$ élément de H .
- On vient de montrer que d divise m_i , or $h = \sum_{i=1}^p m_i$, donc d divise h .
- c) • $\chi_A(x) = \sum_{\sigma/\psi(\sigma) \neq 0} \varepsilon(\sigma) (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in H} a_{j,\sigma(j)}$. Du fait que d divise h le polynôme s'écrit de la manière proposée où les α_i peuvent être nulles.
- D'après la question VI – C, p est le pgcd des qd , donc p est multiple de d .
- On conclut que le coefficient d'imprimitivité d'une matrice irréductible est le pgcd de l'ensemble des longueurs des circuits de A . C'est le théorème de Romanovsky.