

CCP - PC - 2005 - math 2

Corrigé par Sylvie Darrieu-Bonnet

I.1 Les équations E_λ et $E_{-\lambda-1}$ sont égales, ce qui autorise à restreindre l'étude à $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

I.2 On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme S soit solution de E_λ sur $] -R, R[$.

S est de classe C^2 sur $] -R, R[$ et dérivable terme à terme à tout ordre sur $] -R, R[$:

$$\forall x \in] -R, R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

S est solution de E_λ sur $] -R, R[$ si et seulement si

$$\forall x \in] -R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \left([n(n+1) - \lambda(\lambda+1)] a_n + (n+1)^2 a_{n+1} \right) x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle sur $] -R, R[$, ces assertions

$$\text{sont équivalentes à : } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{(\lambda + n + 1)(\lambda - n)}{(n+1)^2} a_n$$

I.3.1 Une solution polynomiale de degré d est développable en série entière, ses coefficients sont nuls à partir du rang $d+1$ et son coefficient d'indice d est non nul. D'après la question précédente, une condition nécessaire pour que E_λ admette des solutions polynomiales de degré d est $(\lambda + d + 1)(\lambda - d) = 0$ et $a_d \neq 0$.

On montre que cette condition est suffisante (par récurrence sur $n \geq d$, « $a_n = 0$ » et par récurrence sur $n \leq d$, « $a_n \neq 0$ »).

Le rayon de convergence d'une telle série entière est infini, ce qui achève de prouver que E_λ admet des solutions polynomiales de degré d si et seulement si $\boxed{\lambda = d}$.

En effet, le terme $\lambda + d + 1$ ne peut pas s'annuler pour $d \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

I.3.2 Lorsque $\lambda = d$, les solutions développables en série entière sont les fonctions polynomiales déterminées par $\forall x \in] -\infty, \infty[, P(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$ avec

$$\forall n \leq d-1, a_{n+1} = \frac{(d+n+1)(d-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

Pour que $P(0)=1$, il faut et il suffit que $a_0 = 1$.

On montre alors par récurrence sur $n \leq d$ que $\forall n \leq d, a_n = \binom{n+d}{n} \binom{d}{n}$.

Il existe donc une unique solution polynomiale de degré d telle que $P(0)=1$. Il s'agit de φ_d

définie par $\boxed{\forall x \in] -\infty, \infty[, \varphi_d(x) = \sum_{n=0}^d \binom{n+d}{n} \binom{d}{n} x^n}$

I.3.3 En particulier $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = 1 + 2x}$.

$$\textbf{I.3.4} \quad \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1} \text{ et } \frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}$$

φ_1 est une solution de E_1 qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. On peut donc chercher les solutions de E_1 sous la forme : $y = z\varphi_1$.

On trouve que les solutions de E_1 sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions

$$x \rightarrow k_1 \left(2 + (2x+1) \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right) + k_2 (2x+1), \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes réelles arbitraires.}$$

I.4.1 Il faut comprendre que y est une solution développable en série entière de E_λ , non identiquement nulle, et donc que ses coefficients vérifient la condition établie en **I.2**. Après avoir montré par récurrence sur n que les coefficients de la série entière sont non nuls dès que $a_0 \neq 0$, on peut appliquer à cette série entière la règle de d'Alembert. Son rayon de convergence est égal à 1. Il est donc strictement positif, et ceci achève de prouver que E_λ admet des solutions développables en série entière au voisinage de zéro.

I.4.2 D'après **I.4.1** et **I.2**, les solutions développables en série entière de E_λ sont les

$$\text{fonctions déterminées par } \forall x \in]-1, 1[, y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{(\lambda + n + 1)(\lambda - n)}{(n+1)^2} a_n.$$

Pour qu'une telle fonction prenne la valeur 1 en 0, il faut et il suffit que $a_0 = 1$.

Il existe donc une unique solution de E_λ développable en série entière telle que $y(0) = 1$, et

$$c'est la fonction définie sur $] -1, 1[$ par : $x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=-(n-1)}^n (\lambda + k)$.$$

$$\textbf{I.4.3} \text{ En particulier, } \forall x \in]-1, 1[, \varphi_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2} \right)^2. \text{ On}$$

$$\text{peut aussi écrire } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right)^2$$

$$\text{Et } \forall x \in]-1, 1[, \varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=-n+1}^n \left(k + \frac{1}{2} \right). \text{ On peut aussi écrire}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2.$$

II.1 $\psi(x)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.

La fonction $g : \begin{cases} [-1, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \rightarrow \sqrt{1 + x \sin^2 t} \end{cases}$ est continue. Pour tout $b \in [-1, +\infty[$, on a l'hypothèse

de domination :

$$\forall (x, t) \in [-1, b] \times \left[0, \frac{\pi}{2} \right], 0 \leq \sqrt{1 + x \sin^2(t)} \leq \sqrt{1 + b \sin^2(t)}$$

La fonction $t \rightarrow \sqrt{1 + b \sin^2 t}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

La fonction ψ est donc continue sur tout segment $[-1, b] \subset [-1, +\infty[$, donc continue sur $[-1, +\infty[$.

II.2 La fonction g est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\forall (x, t) \in]-1, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x, t) = (-1)^{k-1} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (2j-1)}{2^k} \cdot \frac{\sin^{2k}(t)}{(1+x \sin^2(t))^{k-\frac{1}{2}}}. \quad (\text{démonstration}$$

par récurrence sur k).

$\forall (a, b) \in]-1, +\infty[\times]-1, +\infty[$ tels que $a < b$, on a l'hypothèse de domination :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x, t) \right| \leq \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (2j-1)}{2^k} \cdot \frac{\sin^{2k}(t)}{(1+a \sin^2(t))^{k-\frac{1}{2}}} \text{ par une fonction continue}$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On montre ensuite par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, en appliquant le théorème de Leibniz à g pour

vérifier (HR_1) , puis à $\frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x, t)$ grâce à l'hypothèse de domination ci-dessus :

(HR_k) La fonction ψ est de classe C^k sur tout segment $[a, b] \subset]-1, +\infty[$ et

$$\forall t \in [a, b], \quad \psi^{(k)}(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x, t) dt.$$

Conclusion : La fonction ψ est donc de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.

II.3.1 Question de cours : DSE de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

II.3.2 Pour $x \in]-1, 1[$, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1+x \sin^2 t \in]-1, 1[$.

Donc : $\sqrt{1+x \sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n \sin^{2n}(t)$. C'est la somme d'une série

trigonométrique, dont on montre qu'elle est normalement convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En effet,

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n \sin^{2n}(t) \right| \leq \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} |x|^n.$$

Et la série $\sum \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n$ est absolument convergente, car c'est la série entière dont la somme est $-\sqrt{1-x}$ et que $x \in]-1, 1[$.

Donc $t \rightarrow \sqrt{1+x \sin^2(t)}$ est intégrable terme à terme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Finalement, } \forall x \in]-1, 1[, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) dt \right) x^n.$$

II.3.3 Calcul classique des intégrales de Wallis. $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

On en déduit $\forall x \in]-1, 1[, \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 x^n$

II.3.4 $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq 1$ car c'est un produit de termes compris entre 0 et 1.

II.3.5 Pour $x \in]-1, 1[, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } v_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 x^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}, v_n$ est intégrable sur $] -1, 1[$, car prolongeable par continuité sur $[-1, 1]$.

La série $\sum v_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$, et sa somme ψ est continue sur $] -1, 1[$.

Pour $n \geq 1, \int_{-1}^1 |v_n(x)| dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2n-1} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 |x|^n dx = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \frac{1}{2n-1} \frac{2}{n+1}$.

Donc $\forall n \geq 1, \int_{-1}^1 |v_n(x)| dx \leq \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{(2n-1)(n+1)}$ d'après **II.3.4**.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{(2n-1)(n+1)}$ est convergente car à termes tous positifs et équivalente à la série de

Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, donc de même nature que cette dernière par théorème de comparaison des

séries à termes tous positifs. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 |v_n(x)| dx$ est donc convergente par théorème de comparaison des séries à termes tous positifs.

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle de la somme d'une série de fonctions. On remarque que les termes d'indice impair sont nuls.

ψ est donc intégrable sur $] -1, 1[$ et $\int_{-1}^1 \psi(x) dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p} ((2p)!)^2} \right)^2$.

II.4 D'après la question **I.4.3**, comme $\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} \left((-1) \frac{2n-1}{2n-1} + \frac{2n+1}{2n-1} \right)$,

On en déduit : $\forall x \in]-1, 1[, \psi(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi_{-\frac{1}{2}}(x) + \varphi_{\frac{1}{2}}(x) \right)$

II.5 Compte tenu des symétries de l'ellipse, $l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t)} dt$.

Donc $l = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(t)} dt = 2a\pi\psi(-e^2) = a\pi \left[\varphi_{\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) \right] = \boxed{l}$

III.1 $f(t)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.

La fonction $h : \begin{cases} [-1,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{1+x \sin^2(t)} \end{cases}$ est continue. On a l'hypothèse de domination :

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}, \quad 0 \leq \frac{1}{2} \sqrt{1+x \sin^2 t} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ est continue sur $[-1,1]$ donc intégrable sur $[-1,1]$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique car $\sin$ est 2π -périodique.

III.2 La fonction h est également de classe C^1 sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$.

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) = \frac{1}{2} \frac{x \sin(t) \cos(t)}{\sqrt{1+x \sin^2(t)}}.$$

On a l'hypothèse de domination :

$$\forall (x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|x \sin(t) \cos(t)|}{\sqrt{1+x \sin^2(t)}} \leq \frac{|\sin(t) \cos(t)|}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = |\sin(t)| \leq 1.$$

La fonction $x \rightarrow 1$ est continue sur $[-1,1]$ donc intégrable sur $[-1,1]$.

La fonction f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.3 D'après le théorème de convergence normale des séries de Fourier, la fonction f , qui est 2π -périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, est égale à la somme de sa série de Fourier (qui converge normalement sur $\mathbb{R}$).

Or, la fonction f est également π -périodique, c'est-à-dire égale à sa translatée de π . Ses coefficients de Fourier vérifient donc : $c_n(f) = (-1)^n c_n(f)$ et donc ses coefficients de Fourier d'indices impairs sont nuls.

D'autre part, la fonction f est paire, ses coefficients de Fourier b_n sont nuls.

$$\text{Finalement, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} \cos(2nt), \quad \text{avec } a_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(pt) dt.$$

III.4 $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt$. On remarque que $\forall t \in [0, \pi], \quad f(\pi - t) = f(t)$.

$$\text{Donc } a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1+x \sin^2(t)} dx \right) dt.$$

La fonction $(x,t) \rightarrow \sqrt{1+x \sin^2(t)}$ est continue sur le pavé $[-1,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par théorème de

Fubini, $a_0 = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+x \sin^2(t)} dt \right) dx$, dans lequel on reconnaît l'intégrale de ψ sur $[-1,1]$.

$$\text{Finalement, d'après II.3.5, } a_0 = \int_{-1}^1 \psi(x) dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p} ((2p)!)^2} \right)^2$$

Fin du problème