

**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)**

première composition de mathématiques

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude de propriétés de majoration et de minoration de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre.

$I = [\alpha, \beta]$ désigne un intervalle de \mathbf{R} . On note $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur I . Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $C^p(I)$ le sous-espace de $C(I)$ formé des fonctions p fois continûment dérivables et $C_0^p(I)$ le sous-espace de $C^p(I)$ formé des fonctions nulles en α et β .

Trois fonctions u, v et w appartenant à $C(I)$ étant fixées, on leur associe le problème différentiel **(P)** suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Étant donné } (\lambda, \mu, f) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times C(I), \text{ trouver } y \in C^2(I) \text{ vérifiant :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in I, \quad u(t)y''(t) + v(t)y'(t) + w(t)y(t) = f(t), \\ y(\alpha) = \lambda, \quad y(\beta) = \mu. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On dira que **(P)** vérifie la propriété **(P.M)** si :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Il existe des fonctions positives } a \in C(I) \text{ et } b \in C(I) \text{ et des réels positifs } A \text{ et } B \text{ tels que,} \\ \text{quelle que soit la donnée } (\lambda, \mu, f), \text{ toute solution } y \text{ de } (\mathbf{P}) \text{ vérifie :} \\ \forall t \in I, \quad y(t) \leq a(t) \max(A\lambda, B\mu, \sup_{s \in I} (b(s)f(s))). \end{array} \right.$$

I. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS CONSTANTS

On pose $I = [0, 1]$ et on considère le problème différentiel **(P₁)** associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, avec $c > 0$.

I.1. Résolution de l'équation homogène.

Montrer que les fonctions Y_0 et Y_1 définies par $Y_0(t) = \text{sh}(ct)$ et $Y_1(t) = \text{sh}(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2y = 0$.

1ère composition 2/5

I.2. Résolution du problème (P₁).

I.2.1. Une fonction $f \in C(I)$ étant fixée, déterminer en fonction de Y_0 et Y_1 les solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = f(t)$. [On pourra utiliser la méthode de variation des constantes. On rappelle que $\text{sh}(p+q) = \text{sh}(p)\text{ch}(q) + \text{ch}(p)\text{sh}(q)$].

I.2.2. Montrer que (P₁) a une unique solution qui se met sous la forme :

$$y(t) = \frac{\text{sh}(ct)}{\text{sh}c} \left[\mu + \frac{1}{c} \int_t^1 f(s) \text{sh}(c(1-s)) ds \right] + \frac{\text{sh}(c(1-t))}{\text{sh}c} \left[\lambda + \frac{1}{c} \int_0^t f(s) \text{sh}(cs) ds \right].$$

I.3. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème (P₁).

On note M la borne supérieure de f sur I .

I.3.1. Utiliser le résultat du I.2.2. pour établir l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, \quad y(t) \leq \frac{\text{sh}(c(1-t)) + \text{sh}(ct)}{\text{sh}c} \max(\lambda, \mu) + \left(1 - \frac{\text{sh}(c(1-t)) + \text{sh}(ct)}{\text{sh}c} \right) \frac{M}{c^2}.$$

I.3.2. Exprimer $\text{sh} p + \text{sh} q$ en fonction de $\text{sh} \left(\frac{p+q}{2} \right)$ et $\text{ch} \left(\frac{p-q}{2} \right)$ ainsi que $\text{sh}(2p)$ en fonction de $\text{sh} p$ et $\text{ch} p$.

I.3.3. Pour $t \in I$, montrer que $\frac{\text{sh}(c(1-t)) + \text{sh}(ct)}{\text{sh}c}$ reste compris entre 0 et 1. En déduire que (P₁) vérifie la propriété (P.M) avec $a = 1$, $b = \frac{1}{c^2}$, $A = B = 1$.

I.3.4. Étant donné une fonction $h \in C(I)$, comparer $\inf_{s \in I} (-h(s))$ avec $\sup_{s \in I} (h(s))$. En déduire une propriété de minoration des solutions de (P₁) sur le modèle de (P.M).

I.4. Extension à un intervalle quelconque.

On considère plus généralement un problème différentiel (\hat{P}_1) de même type, avec $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, mais défini sur $I = [\alpha, \beta]$.

Montrer, en faisant le changement de variable affine $t = \alpha + (\beta - \alpha)s$, que (\hat{P}_1) vérifie (P.M).

II. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

On prend $I =]\alpha, \beta[$, avec $0 < \alpha < \beta$, et on considère le problème différentiel (P_2) associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -t^2, v(t) = -2t$ et $w(t) = 1$.

II.1. Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème (P_2) .

II.1.1. Déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que, si y est solution de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = f(t),$$

alors la fonction z définie par $z(x) = e^{-\gamma x} y(e^x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $-z'' + c^2 z = g(x)$. On précisera la valeur de la constante c et la relation entre les fonctions f et g .

II.1.2. Dédurre du I.4. que le problème (P_2) vérifie (P.M) (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B).

II.1.3. Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de (P_2) .

II.2. Solution développable en série entière.

On cherche à déterminer et à majorer les solutions de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = \arctan t$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

II.2.1. On suppose qu'une solution y de l'équation différentielle est, sur un intervalle $] -R, R[$, somme

d'une série entière $\sum_{p \geq 0} a_p t^p$.

Montrer que $a_{2k} = 0$ et exprimer a_{2k+1} en fonction de k .

II.2.2. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?

Conclure sur l'existence d'une solution développable en série entière au voisinage de 0.

II.2.3. La série est-elle uniformément convergente sur $] -1, 1[$? Les fonctions dérivées y' et y'' sont-elles sommes des séries dérivées sur $] -1, 1[$?

II.2.4. Pour n donné et $t \in]0, 1[$, trouver un majorant indépendant de t de l'erreur commise en

remplaçant $y(t)$ par la somme partielle $\sum_{0 \leq k \leq n} a_{2k+1} t^{2k+1}$. Déterminer une valeur de n qui assure que cette erreur reste inférieure à 10^{-5} . Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $\lambda = y\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\mu = y\left(\frac{2}{3}\right)$.

II.2.5. Utiliser II.1. pour obtenir un majorant et un minorant de y sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

1ère composition 4/5

III. UNE FAMILLE DE PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

On considère dans cette partie les problèmes différentiels (P) sur $I =]\alpha, \beta[$, pour lesquels les fonctions u et v sont définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et la fonction w est strictement positive. On notera (P₃) un tel problème.

III.1. Existence et unicité d'une solution d'un problème (P₃).

III.1.1. Justifier que l'équation différentielle $-y'' + w(t)y = 0$ admet une unique solution Y_0 définie sur I vérifiant $Y_0(\alpha) = 0$ et $Y_0'(\alpha) = 1$ ainsi qu'une unique solution Y_1 définie sur I vérifiant $Y_1(\alpha) = 1$ et $Y_1'(\alpha) = 0$.

III.1.2. Montrer, en étudiant l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} (-Y_0''(s) + w(s)Y_0(s))Y_0(s) ds$, que $Y_0(\beta)$ n'est pas nul.

III.1.3. Montrer que la fonction $Y_0 Y_1' - Y_1 Y_0'$ est constante sur I .

III.1.4. Soit $f \in C(I)$. Exprimer en fonction de Y_0 , Y_1 et f la solution générale de l'équation différentielle $-y'' + w(t)y = f(t)$.

III.1.5. Démontrer que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f) , le problème (P₃) a toujours une solution unique.

III.2. Démonstration de la propriété (P.M) pour un problème (P₃).

On note y la solution du problème (P₃) correspondant à une donnée (λ, μ, f) .

III.2.1. Montrer que, quelle que soit la fonction $z \in C_0^1(I)$, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} y'(s) z'(s) ds + \int_{\alpha}^{\beta} w(s) y(s) z(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(s) z(s) ds.$$

III.2.2. Soit G une fonction réelle, définie et de classe C^1 sur \mathbf{R} , nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Vérifier que $t G(t) \geq 0$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$. Montrer que, si la constante réelle K vérifie $K \geq \max(\lambda, \mu)$, alors la fonction z définie sur I par $z(t) = G(y(t) - K)$ appartient à $C_0^1(I)$.

III.2.3. Montrer que, si K vérifie $K \geq \max(\lambda, \mu)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} y'^2(s) G'(y(s) - K) ds + \int_{\alpha}^{\beta} w(s) (y(s) - K) G(y(s) - K) ds \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (f(s) - Kw(s)) G(y(s) - K) ds. \end{aligned}$$

En déduire que, si K est assez grand pour que $f(t) - Kw(t) \leq 0$ quel que soit $t \in I$, alors on a $y(t) \leq K$ quel que soit $t \in I$.

III.2.4. Démontrer que (P₃) vérifie (P.M) (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B). Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de (P₃).

III.3. D'autres problèmes vérifiant (P.M).

On considère dans cette question des problèmes différentiels (P) sur $I = [\alpha, \beta]$ pour lesquels les fonctions u et v sont toujours définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$, mais pour lesquels la fonction w est de signe quelconque. On note (P₁) un tel problème.

On fixe h une fonction strictement positive appartenant à $C^2(I)$ et telle que $h(\alpha) = h(\beta) = 1$. On note k une primitive de $\frac{1}{h^2}$, $\alpha' = k(\alpha)$ et $\beta' = k(\beta)$.

III.3.1. Justifier que k admet une fonction réciproque k^{-1} et faire dans (P₁) le changement de fonction défini par $y(t) = h(t)z(k(t))$.

III.3.2. Démontrer que, si h est telle que la fonction $-h'' + wh$ soit strictement positive, alors (P₁) vérifie (P.M) et a, quelle que soit la donnée (λ, μ, f) , une solution unique.

III.3.3. Application : on suppose que la fonction $w + \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ est strictement positive.

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que l'on ait simultanément $m < \frac{\pi}{\beta - \alpha}$ et $w + m^2 > 0$.

Montrer que la fonction h définie par $h(t) = \frac{\cos m \left(t - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos m \frac{\beta - \alpha}{2}}$ vérifie toutes les

conditions précédentes. Conclure.

IV. UNICITÉ DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

IV.1. Unicité des solutions.

Soit (P) un problème différentiel sur $I = [\alpha, \beta]$ vérifiant (P.M).

IV.1.1. On note y_1 et y_2 des solutions de (P) correspondant à des données (λ_1, μ_1, f_1) et (λ_2, μ_2, f_2) . Montrer que si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $\mu_1 \leq \mu_2$ et $f_1 \leq f_2$, on a alors $y_1 \leq y_2$.

IV.1.2. En déduire que si (P) a une solution pour une donnée (λ, μ, f) , alors cette solution est unique.

IV.2. Un contre-exemple.

Montrer que le problème différentiel (P) sur $I = [\alpha, \beta]$ associé aux fonctions u, v et w définies par

$u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = -\frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ ne vérifie pas (P.M).