

Problème 1

Partie I

1. $\tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2} > 0$ donc \tanh strictement croissante. Or \tanh continue, donc \tanh bijection de \mathbb{R} sur $\tanh(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} \tanh, \lim_{+\infty} \tanh[=]-1, 1[$ (factoriser par e^x ou e^{-x}).
2. $\tanh' = 1 - \tanh^2$.
3. $\operatorname{arctanh}$ est définie sur $] - 1, 1[$ symétrique par rapport à 0. Soit $u \in] - 1, 1[$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $u = \tanh(x)$. $\operatorname{arctanh}(-u) = \operatorname{arctanh}(-\tanh(x)) = \operatorname{arctanh}(\tanh(-x)) = -x = -\operatorname{arctanh}(u)$ donc $\operatorname{arctanh}$ impaire.
4. $\operatorname{arctanh} = \tanh^{-1}$ donc $\forall u \in] - 1, 1[$, $\operatorname{arctanh}'(u) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{arctanh}(u))} = \frac{1}{1 - \tanh(\operatorname{arctanh}(u))^2} = \frac{1}{1 - u^2}$.
5. $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}$ et $\operatorname{arctanh}(u) = \int_0^u \operatorname{arctanh}'(t) dt$ pour $u \in] - 1, 1[$. Or $\operatorname{arctanh}(0) = 0$ (car $\tanh(0) = 0$), donc $\operatorname{arctanh}(u) = \frac{1}{2}(-\ln(|1-u|) + \ln(|1+u|)) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)$.
6. $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + (t^2)^2 + o(t^4)$ (car $\lim_0 u^2 = 0$), d'où $\operatorname{arctanh}(u) = \int_0^u (1 + t^2 + t^4 + o(t^4)) dt$, soit $\operatorname{arctanh}(u) = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + o(u^5)$.

Partie II

7. $(E) \iff y' = -\frac{3}{x}y - \frac{1}{x(1-x^2)}$ car $x \neq 0$ sur $]0, 1[$.

On a : $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{array}{l}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha e^{-3 \ln|x|} \end{array} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ solution de l'équation homogène $y' = -\frac{3}{x}y$ sur $]0, 1[$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y(x) = \frac{1}{x^3}g(x)$ pour $x \in]0, 1[$, avec $g \in \mathcal{D}^1(]0, 1[)$.

On trouve $g'(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1$. Soit donc $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) = \operatorname{arctanh}(x) - x$ et $y(x) = \frac{\operatorname{arctanh}(x) - x}{x^3}$.

On a : $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{array}{l}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y(x) + \frac{\alpha}{x^3} \end{array} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ solution de l'équation (E) sur $]0, 1[$.

Partie III

8. Soit $f = a \in \mathbb{R}$, $a = \frac{2a}{1+a^2} \iff a = 0$ ou $1 + a^2 = 2$, i.e. $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1$.
9. $f(0)$ vérifie l'équation précédente donc $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1+(f(\frac{x}{2}))^2}$. Or $a^2 + 1 - 2|a| = (|a| - 1)^2 \geq 0$ et $1 + a^2 > 0$ donc $\frac{2|a|}{1+a^2} \leq 1$, d'où $|f(x)| \leq 1$.
11. Soit $g = -f$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = -f(2x) = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2} = \frac{2g(x)}{1+g(x)^2}$ donc g solution.
12. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2 \tanh(x)}{1+\tanh(x)^2} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^2}{(2e^{2x} + 2e^{-2x})(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \tanh(2x)$.
13. $\lim(2^n) = +\infty$ donc $\lim(\frac{x_0}{2^n}) = 0$. Or f dérivable donc continue en 0, d'où $\lim(u_n) = f(0) = 1$.
14. $u_n = f(2\frac{x_0}{2^{n+1}}) = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$ et $1 + u_{n+1}^2 > 0$ donc le signe de u_n est celui de u_{n+1} .
On montre alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sgn}(u_n) = \operatorname{sgn}(u_0)$.
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}(u_{n+1}^2 - 1)}{1+u_{n+1}^2}$ et $1 - u_{n+1}^2 \geq 0$ (car, d'après la question 10), $|u_{n+1}| \leq 1$) donc $\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = -\operatorname{sgn}(u_{n+1}) = -\operatorname{sgn}(u_0)$, d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante si $u_0 \leq 0$ et décroissante sinon.
15. Soit $u_0 \geq 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et minorée par -1 (cf question 10) donc elle converge vers $l = \inf((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq u_0 = f(x_0) < 1$ absurde (cf question 13).
Un raisonnement analogue est à mener dans le cas $u_0 < 0$.
16. Soit $g = -f$, $g(0) = 1$ et g solution (cf question 11) donc on aboutit aussi à une contradiction.
17. Au vu de la question 9, on en déduit donc que la seule valeur possible est $f(0) = 0$.

18. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$ et définissons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme précédemment. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$, ceci étant vrai pour $n = 0$.
Si $u_n = 1$ alors $\frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = 1$ (cf question 14) d'où $u_{n+1} = 1$.
Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0) = 0$ (cf question 13) *absurde*.
Si $f(x_0) = -1$, on utilisera le raisonnement de la question 16 pour aboutir à une absurdité.
19. $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(2g(x)) = \frac{2 \tanh(g(x))}{1 + \tanh^2(g(x))}$ (cf question 12), or $\tanh(g(x)) = f(x)$ donc $\tanh(2g(x)) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2} = f(2x) = \tanh(g(2x))$; or \tanh injective (cf question 1), donc $2g(x) = g(2x)$.
20. f dérivable en 0 et $\operatorname{arctanh}$ dérivable sur $] -1, 1[$ donc en $f(0) = 0$ d'où, par composition, g dérivable en 0.
21. $g(0) = \operatorname{arctanh}(f(0)) = 0$ donc v_n vaut le taux d'accroissement de g en 0 évalué en $\frac{x}{2^n}$.
Or $\forall x \in \mathbb{R}, \lim \left(\frac{x}{2^n} \right) = 0$ donc $\lim(v_n) = g'(0)$ (car g dérivable en 0).
22. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, xv_n = 2^n g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$, ceci étant vrai pour $n = 0$.
Si le résultat est vrai pour n , alors $xv_{n+1} = 2^{n+1} g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^n g\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right)$ (cf question 19) d'où $xv_{n+1} = g(x)$, ce qui permet de conclure par récurrence.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, g(x) = xv_n$, d'où, en passant à la limite en n , $g(x) = xg'(0) = \lambda x$ avec $\lambda = g'(0)$.
 g est donc clairement linéaire.
23. On a montré : $\exists \lambda, \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctanh}(f(x)) = \lambda x$, d'où $f(x) = \tanh(\lambda x)$.
Réciproquement, il est aisé de vérifier (cf question 12) qu'une telle fonction est solution.

Problème 2

Partie I

1. $A(0) = 0$ donc 0 racine de A donc X divise A , d'où l'existence de B .
 $\deg(A) = \deg(X) + \deg(B)$ et $\deg(A) = 2n$ (car $A = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^k$) d'où $\deg(B) = 2n - 1$.
Le coeff. dominant du produit étant égal au produit des coeff. dominants et le coeff. dominant de A valant $C_{2n}^{2n} = 1$, le coeff. dominant de B vaut 1.
Même raisonnement pour le coeff. constant : $b_0 = C_{2n}^1 = 2n$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}, A(z) = 0 \iff z + 1$ racine $2n^e$ de l'unité $\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n - 1 \rrbracket, z = e^{i \frac{2k\pi}{2n}} - 1$.
On pose donc $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{2n}} - 1$ pour k entier entre 0 et $2n - 1$.
 $z_k = e^{i \frac{k\pi}{2n}} (e^{i \frac{k\pi}{2n}} - e^{-i \frac{k\pi}{2n}}) = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i \frac{k\pi}{2n}} = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) (i \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right))$.
3. Posons $j = 2n - k$, on a $P_n = \prod_{j=2n-1}^{j=n+1} \sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right) = \prod_{j=n+1}^{j=2n-1} \sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n}\right) = \prod_{j=n+1}^{j=2n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$.
On a donc $P_n^2 = P_n \times P_n = \prod_{j=1}^{j=2n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = Q_n$.
4. On a $B = \prod_{k=1}^{k=2n-1} (X - z_k)$ donc $(-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = b_0$, soit $\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = -b_0 = -2n$.
De plus, $\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{k=2n-1} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{i \frac{k\pi}{2n}} = 2^{2n-1} i^{2n-1} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{k=2n-1} k\right) \prod_{k=1}^{k=2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
d'où $\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = 2^{2n-1} \frac{(-1)^n}{i} \exp\left(\frac{2n-1}{2} i\pi\right) Q_n$; or $\exp\left(\frac{2n-1}{2} i\pi\right) = e^{i n \pi} e^{-i \frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^n}{i}$ d'où
 $Q_n = 2n \times 2^{1-2n} = \frac{n}{4^{n-1}}$ et $P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.
5. $\forall k \leq 2n - 1, \exists B_k \in \mathbb{R}[X], A = (X - z_k)B_k$ donc $A' = (X - z_k)B_k' + B_k$, d'où $B_k(z_k) = A'(z_k)$.
Or $\frac{1}{B_k(z_k)}$ est le coeff. de la partie polaire relative au pôle z_k de F et $A' = 2n(X + 1)^{2n-1}$ d'où
 $F = \sum_{k=0}^{k=2n-1} \frac{1}{A'(z_k)(X - z_k)} = \sum_{k=0}^{k=2n-1} \frac{2ne^{-i \frac{k\pi}{2n}}}{X - z_k}$.

Partie II

6. Soit $f = \alpha I_E$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $((\alpha + 1)^{2n} - 1)I_E = \Theta$, or aI_E inversible pour $a \neq 0$ donc on a $(\alpha + 1)^{2n} - 1 = 0$, i.e. f solution $\iff \exists k \in \llbracket 0; 2n - 1 \rrbracket, \alpha = z_k$.
7. $4^n = (1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{k=2n} C_{2n}^k$ et $0 = (-1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k C_{2n}^k = \sum_{k \text{ pair}} C_{2n}^k - \sum_{k \text{ impair}} C_{2n}^k$.
On a donc $S + S' = 4^n$ et $S - S' = 0$, d'où $S = S' = 2 \times 4^{n-1}$.
8. On a $s^2 = s \circ s = I_E$ et s et I_E commutent donc, d'après la formule du binôme,
 $(s + I_E)^{2n} - I_E = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k s^k I_E^{2n-k} - I_E = \sum_{k \text{ pair}} C_{2n}^k I_E^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \text{ impair}} C_{2n}^k s - I_E = S' s + (S - 1)I_E$.

On a donc s solution ssi $s = \frac{1-S}{S} I_E$ et s symétrie, ce qui impose $(\frac{1-S}{S})^2 = 1$ ($s^2 = I_E$).
On doit donc avoir $S = \frac{1}{2}$, or $S \in \mathbb{N}$! Il n'y a donc aucune symétrie solution.

Partie III

9. On a $G = \{aI + bJ \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc

$G = \text{vect}_{\mathbb{C}}(I, J)$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ e.v. donc G s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donc e.v.

(I, J) libre car, si $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $aI + bJ = O \implies M_{a,b} = O$ d'où $a = b = 0$ par identification des coeff. (I, J) étant libre et génératrice dans G , (I, J) base de G et $\dim(G) = 2$.

$M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{ac+2bd, ad+bc+bd} \in G$ donc G stable par produit matriciel.

10. On a $u : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ tel que $u(X) = MX$ (i.e. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = M$ avec \mathcal{B} base canonique de \mathbb{C}^3).

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $X \in E_1 \iff (M - (a+2b)I)X = 0 \iff \begin{cases} b(-2x + y + z) = 0 \\ b(x - 2y + z) = 0 \\ b(x + y - 2z) = 0 \end{cases}$.

Comme $b \neq 0$, $X \in E_1 \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow -2L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3)$

d'où $E_1 = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \text{vect}_{\mathbb{C}}(e'_1)$ avec $e'_1 = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ donc e'_1 base de E_1 .

11. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, $X \in E_2 \iff (M - (a-b)I)X = 0 \iff b(x + y + z) = 0$. Or $b \neq 0$ donc

$E_2 = \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{C}^2\} = \text{vect}_{\mathbb{C}}(e'_2, e'_3)$ où $e'_2 = (-1, 1, 0)$ et $e'_3 = (-1, 0, 1)$.

e'_2 et e'_3 n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E_2 , i.e. une base.

12. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{C}^3 , $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc \mathcal{B}' libre.

Or $\text{card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{C}^3) = 3$ donc \mathcal{B}' base de \mathbb{C}^3 .

13. on a $u(e'_1) = (a+2b)e'_1$, $u(e'_2) = (a-b)e'_2$, $u(e'_3) = (a-b)e'_3$ donc $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$,

14. On a $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En accolant I à P et en effectuant des transformations élémentaires sur les lignes jusqu'à ce que P

soit transformée en I , on obtient : $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. On a $D = P^{-1}MP$ (changement de bases) donc $M = PDP^{-1}$.

16. $M + I = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) + \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(I_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u + I_E)$ donc $(M + I)^{2n} - I = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}((u + I_E)^{2n} - I_E)$. De même, $(D + I)^{2n} - I = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}((u + I_E)^{2n} - I_E)$ d'où (changement de base) $(D + I)^{2n} - I = P^{-1}((M + I)^{2n} - I)P$.

Donc : $(M + I)^{2n} - I = O \iff (D + I)^{2n} - I = O$.

17. On a : $(D + I)^{2n} - I = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 \end{pmatrix}$, donc

D solution ssi $A(a+2b) = A(a-b) = 0$, i.e. $\exists(k, j) \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket^2$, $a+2b = z_j$ et $a-b = z_k$.

18. On en déduit : M solution de $(\star) \iff \exists(k, j) \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket^2$, $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2z_k + z_j & z_j - z_k & z_j - z_k \\ z_j - z_k & 2z_k + z_j & z_j - z_k \\ z_j - z_k & z_j - z_k & 2z_k + z_j \end{pmatrix}$

(et sous l'hypothèse générale : $M \in G$).