

Durée : 4 heures

## NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Soit  $E$  l'espace préhilbertien des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles ou complexes ; le produit scalaire est défini par :

$$(f|g) = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée  $\|\cdot\|_2$ .

On définit aussi, pour tout élément  $f$  de  $E$ , la norme uniforme notée  $\|\cdot\|_\infty$  où  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ .

On dit qu'un sous-espace vectoriel  $E'$  de  $E$  est dense dans  $E$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_2$  [respectivement à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ] si, pour tout élément  $f$  de  $E$ , il existe une suite  $(\varphi_n)$  d'éléments de  $E'$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$  [respectivement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$ ].

On note  $\mathcal{P}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des fonctions polynômiales.

Pour tout  $\alpha \geq 0$ , on désigne par  $e_\alpha$  l'élément de  $E$  défini par  $e_\alpha(t) = t^\alpha$ .

Étant donnée une suite strictement croissante  $A$  de nombres réels positifs  $\alpha_k$ ,  $k \geq 1$ , on appelle  $V_A$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les fonctions  $e_{\alpha_k}$  lorsque  $k$  parcourt  $\mathbb{N}^*$ .

L'objectif du problème est de caractériser les suites  $A$  telles que  $V_A$  soit dense dans  $E$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_2$ , ce qui fait l'objet de la partie III, la partie IV étudiant le même problème relativement à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Dans la partie I, on établit d'abord que  $\mathcal{P}$  est dense dans  $E$  pour chacune des normes et, dans la partie II, on étudie la distance d'un élément de  $E$  à un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . La partie II et la partie III, à part la question III 6, sont indépendantes de la première partie.

## PARTIE I

Soit  $F$  l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodiques, à valeurs complexes. Pour tout élément  $g$  de  $F$ , on définit la norme uniforme de  $g$  par  $\|g\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $T_n$  le sous-espace vectoriel de  $F$  engendré par les fonctions  $t \mapsto e^{ikt}$ , où les nombres entiers  $k$  vérifient  $-n \leq k \leq n$ .

1. Soit  $\varphi_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi_n(t) = a_n \left( \cos \frac{t}{2} \right)^{2n}$ , le réel  $a_n$  étant tel que  $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt = 1$ .

(a) Montrer que  $\varphi_n$  est un élément de  $T_n$ .

(b) Prouver que, pour tout élément  $u$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos^2 u \geq 1 - \sin u$ . En déduire que, pour tout entier  $n$ ,

$$\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1} du \geq \frac{1}{n+1}, \text{ puis que } a_n \leq \frac{n+1}{4}.$$

(c) Soit  $\delta$  un réel tel que  $0 < \delta < \pi$ ; montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t) = 0$ .

2. Soit  $g$  un élément de  $F$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $Q_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)g(u-t) dt.$$

(a) Établir la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t)g(t) dt.$$

En déduire que  $Q_n$  appartient à  $T_n$ .

(b) Soit toujours  $\delta$  un réel tel que  $0 < \delta < \pi$ ; montrer l'inégalité :

$$|g(u) - Q_n(u)| \leq \sup_{|t| \leq \delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t).$$

- (c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$ .
- (d) On suppose que  $g$  est une fonction paire; montrer que  $Q_n$  est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément  $P_n$  de  $\mathcal{P}$ , de degré au plus égal à  $n$ , tel que  $Q_n(u) = P_n(\cos u)$ .
3. (a) Soit  $f$  un élément de  $E$ . Prouver qu'il existe une suite  $(P_n)$  d'éléments de  $\mathcal{P}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$ .  
On prolongera  $f$  en une fonction paire, notée  $\tilde{f}$ , et on introduira  $g(u) = \tilde{f}(\cos u)$ .  
En déduire que  $\mathcal{P}$  est dense dans  $E$  relativement à la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ .
- (b) Montrer que, pour tout élément  $f$  de  $E$ , on a l'inégalité  $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ . En déduire que  $\mathcal{P}$  est également dense dans  $E$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_2$ .
4. On se propose de prouver que le sous-espace vectoriel  $W$  de  $E$  engendré par  $e_0, e_2, e_4, \dots, e_{2k}, \dots$  est également dense dans  $E$  relativement à la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  (donc relativement à la norme  $\|\cdot\|_2$ ).
- (a) Soit  $\psi$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par  $\psi(u) = 1 - \sqrt{1 - u}$ . Écrire le développement en série entière de  $\psi$  sur  $] -1, 1[$  :  $\psi(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n u^n$ .
- (b) Montrer que la suite  $(n^{3/2} b_n)$  admet une limite finie strictement positive lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . À cet effet, on posera  $c_n = \ln(n^{3/2} b_n)$  et on étudiera la série de terme général  $c_{n+1} - c_n$ .  
En déduire que la série de terme général  $b_n u^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .
- (c) Prouver que  $e_1$  est limite d'une suite d'éléments de  $W$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On observera que, sur  $[0, 1]$ ,  $t = 1 - \sqrt{1 - t^2}$ .
- (d) En déduire que  $W$  est dense dans  $E$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

## PARTIE II

Étant donnés des éléments  $g_1, g_2, \dots, g_p$  de  $E$ , on note  $G_p(g_1, g_2, \dots, g_p)$  le déterminant de la matrice d'éléments  $(g_i | g_j)$  où  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq p$ .

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_n$  des éléments de  $E$  et  $H$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par ces éléments.

Pour tout élément  $f$  de l'espace préhilbertien  $E$ , on note  $d_H(f)$  la distance de  $f$  à  $H$  :  $d_H(f) = \inf_{v \in H} \|f - v\|_2$ .

1. (a) Montrer que, si  $v$  est un élément de  $H$ ,  $G_{n+1}(f_1, f_2, \dots, f_n, v) = 0$ .  
(b) Montrer que, si  $u$  est orthogonal à  $H$ , alors  $G_{n+1}(f_1, f_2, \dots, f_n, u) = \|u\|_2^2 \cdot G_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .
2. Soit  $f$  un élément de  $E$ ;  $f$  s'écrit de manière unique sous la forme  $f = u + v$ , où  $u$  est orthogonal à  $H$  et  $v$  appartient à  $H$ .  
(a) Montrer que  $d_H(f) = \|u\|_2$ .  
(b) En déduire :  $G_{n+1}(f_1, f_2, \dots, f_n, f) = [d_H(f)]^2 \cdot G_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ .
3. Montrer également à l'aide de ce qui précède que les éléments  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sont indépendants si et seulement si  $G_n(f_1, f_2, \dots, f_n) \neq 0$ .

## PARTIE III

Soit  $A$  une suite strictement croissante de nombres réels positifs  $\alpha_k$ ,  $k \geq 1$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $V_n$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les éléments  $e_{\alpha_k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Un nombre réel  $\alpha$  positif ou nul, distincts des nombres  $\alpha_k$  étant donné, on se propose de calculer la distance  $d_{V_n}(e_\alpha)$  notée plus simplement  $d_n(e_\alpha)$  de l'élément  $e_\alpha$  au sous-espace vectoriel  $V_n$  et d'étudier la limite de cette distance lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

1. Montrer que la suite  $d_n(e_\alpha)$  est décroissante.
2. Calcul préliminaire. Soient  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  des suites de nombres réels strictement positifs. On note  $\Delta_n$  le déterminant de la matrice carrée d'ordre  $n$  d'éléments  $(a_i + b_j)^{-1}$ . La valeur de  $\Delta_1$  est  $(a_1 + b_1)^{-1}$ .  
Pour tout  $n \geq 2$ , montrer la relation :

$$\Delta_n \cdot \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j) = \prod_{i < j} (a_j - a_i) \prod_{i < j} (b_j - b_i).$$

3. Calculer  $G_n(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n})$ ; en déduire quelle est la dimension de  $V_n$ .
4. Calculer  $G_{n+1}(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}, e_\alpha)$ ; en déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $d_n(e_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}} \prod_{k=1}^n \frac{|\alpha - \alpha_k|}{\alpha + \alpha_k + 1}$ .
5. Recherche de la limite de  $d_n(e_\alpha)$  :
- (a) On suppose que la suite  $(\alpha_k)$  est bornée.  
Prouver que la suite  $(d_n(e_\alpha))$  converge vers 0.
- (b) On suppose que la suite  $(\alpha_k)$  n'est pas bornée.  
Montrer que la suite  $(d_n(e_\alpha))$  converge vers 0 si et seulement si la série de terme général  $(\alpha_k)^{-1}$  diverge.
- Pour cela, on pourra montrer que la série de terme général  $u_k = \ln \frac{|\alpha - \alpha_k|}{\alpha + \alpha_k + 1}$ , où  $k \geq 2$ , est de même nature que la série de terme général  $v_k = \frac{1}{\alpha_k}$ .
6. En déduire que le sous-espace vectoriel  $V_A$  engendré par les fonctions  $e_{\alpha_k}$ ,  $k \geq 1$ , est dense dans  $E$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_2$  si et seulement si la série de terme général  $(\alpha_k)^{-1}$  diverge.
- Dans le cas où cette série diverge, on établira d'abord que tout polynôme peut être approché par des éléments de  $V_A$  et on utilisera ensuite les résultats de la partie I.

#### PARTIE IV

On se propose de caractériser les suites  $A$  telles que  $V_A$  soit dense dans  $E$  relativement à la norme uniforme.

- (a) Préliminaire : Soit  $f$  un élément de  $E$ , continûment dérivable sur  $[0, 1]$  et tel que  $f(0) = 0$ .  
Montrer que, pour tout élément  $t$  de  $[0, 1]$ ,  $|f(t)| \leq \sqrt{t} \|f'\|_2$ . En déduire que  $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2$ .
- (b) Soit  $A$  une suite strictement croissante de nombres réels positifs  $\alpha_k$ ,  $k \geq 1$ .  
Supposons que  $\alpha_1 = 0$ , que la série de terme général  $(\alpha_k)^{-1}$  soit divergente et qu'à partir d'un certain rang  $p$ ,  $\alpha_k$  soit strictement supérieur à 1.  
Démontrer la propriété : soit  $P$  une fonction polynomiale de  $\mathcal{P}$ , pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un rang  $n$  et des coefficients  $d_i$  tels que :

$$\left\| P - d_1 e_{\alpha_1} - \sum_{i=p}^n d_i e_{\alpha_i} \right\|_\infty < \varepsilon.$$

En déduire que le sous-espace vectoriel  $V_A$  est dense dans  $E$  relativement à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**FIN DU PROBLÈME**