

# Mines 2025 maths 2 – Proposition de correction

Si vous détectez une erreur, merci de me la signaler à [sergelaurent@sergial.org](mailto:sergelaurent@sergial.org)

## Partie A

1 – Pour  $x$  non nul on a :  $x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} = \sum_{p=0}^n a_{n-p} x^p = p_0(x)$  :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = p_0(x)}$$

On déduit des hypothèses sur  $p$  que  $p = a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ . Par suite pour  $x$  non nul :

$$p_0(x) = x^n a_n \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{x} - \alpha_k\right) = a_n \prod_{k=1}^n (1 - x\alpha_k)$$

Cette relation polynomiale étant valide pour une infinité de valeurs, on en déduit :

$$\boxed{p_0 = a_n \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k X)}$$

2 – Ainsi  $p$  et  $p_0$  sont scindés. De là ils sont premiers entre eux si, et seulement si, ils ont une racine commune.

- 0 n'est pas racine commune car l'égalité ci-dessus montre  $p_0(0) \neq 0$ .
- Si  $\alpha_k \neq 0$ , on a  $p_0(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k^n p\left(\frac{1}{\alpha_k}\right) = 0 \Leftrightarrow p\left(\frac{1}{\alpha_k}\right) = 0$ .

On vient de montrer que  $\alpha$  est racine commune équivaut à  $\alpha$  est une racine stable de  $p$ . Ainsi :

$$\boxed{p \wedge p_0 = 1 \Leftrightarrow (\text{Il existe une racine stable à } p)}$$

3 – Il résulte de ce qui précède que  $\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$  sont  $n$  racines distinctes de  $p_0$  qui est de degré  $n$  avec la non-nullité des  $\alpha_k$ . Donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $p_0 = \lambda a_n \prod_{k=1}^n \left(X - \frac{1}{\alpha_k}\right)$ . Or  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est

bijjective de  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  dans  $\left\{\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}\right\}$ , donc  $p_0 = \lambda a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) = \lambda p$ . On regarde alors les coefficients constants et de  $X^n$  : on obtient  $a_n = \lambda a_0$  et  $a_0 = \lambda a_n$ , donc  $a_n = \lambda^2 a_n$  avec  $a_n \neq 0$ , d'où  $\lambda = \pm 1$ . Finalement :  $\boxed{\exists \lambda \in \{-1, 1\}, p_0 = \lambda p}$ .

4 – On dérive sur  $\mathbb{R}^*$  la relation  $x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = p_0(x)$  et on obtient  $p_0'(x) = nx^{n-1} p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} p'\left(\frac{1}{x}\right)$ . Sachant  $p_0 = \lambda p$  on tire  $\lambda x p'(x) = nx^n p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-1} p'\left(\frac{1}{x}\right) = np_0(x) - x^{n-1} p'\left(\frac{1}{x}\right)$ . Sachant  $p'$  de degré  $n-1$  on a  $x^{n-1} p'\left(\frac{1}{x}\right) = (p')_0(x)$  et donc  $\lambda h(x) = np_0(x) - (p')_0(x)$  et avec  $\lambda^2 = 1$  on obtient l'égalité sur  $\mathbb{R}^*$  :  $h(x) = np(x) - \lambda (p')_0(x)$ . Cette égalité polynomiale étant valide pour une infinité de valeurs on a alors :  $\boxed{h = np - \lambda (p')_0}$ .

Comme  $\deg(h) = n$  on a pour  $x$  non nul :

$$h_0(x) = x^n h\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(np\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda (p')_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) = np_0(x) - \lambda x^n (p')_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or  $(p')_0\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{n-1}} p'(x)$  et  $p_0 = \lambda p$ , donc :  $h_0(x) = n\lambda p(x) - \lambda x p'(x)$ , et on conclut de la même façon :  $h_0 = \lambda(np - Xp')$ .

5 – Pour  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $p$  est continue sur  $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ , dérivable sur  $] \alpha_k, \alpha_{k+1}[$  et  $p(\alpha_k) = p(\alpha_{k+1}) = 0$ . Par application du théorème de Rolle il existe  $\beta_k \in ] \alpha_k, \alpha_{k+1}[$  tel que  $p'(\beta_k) = 0$ . L'enchevêtrement  $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n$  montre qu'on a trouvé  $n-1$  racines distinctes au polynôme  $p'$  qui est de degré  $n-1$ . Donc  $p'$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

S'il existait une racine commune  $\beta$  à  $h$  et  $h_0$ . Comme 0 n'est pas racine de  $h_0$  (cf l'expression de la question 1), on a  $\beta \neq 0$  et sachant  $h = Xp'$ ,  $\beta$  est racine de  $p'$  et l'enchevêtrement des racines ci-dessus montre que  $\beta$  n'est pas racine de  $p$ . Or en évaluant en  $\beta$  la relation  $h_0 = \lambda(np - Xp')$  on obtient  $n\lambda p(\beta) = 0$  puis  $p(\beta) = 0$  : absurde.

Or  $h$  est scindé (car  $p'$  l'est) et n'a pas de racine commune avec  $h_0$ , ce qui amène  $h \wedge h_0 = 1$ . Si  $p'$  avait une racine stable  $\beta$ , alors  $\beta$  serait non nul et  $\frac{1}{\beta}$  serait racine de  $p'$ . Ainsi  $\beta$  et  $\frac{1}{\beta}$  seraient racines de  $h$  et  $\beta$  serait une racine stable de  $h$ , donc une racine commune à  $h$  et  $h_0$ , ce qui contredit  $h \wedge h_0 = 1$ . Donc  $p'$  n'a pas de racine stable.

## Partie B

6 – Sous les hypothèses de l'énoncé :

- Si  $j \leq i$ , alors sachant  $k > i$ ,  $(1 - \alpha_k X)$  est l'un des facteurs de  $f_j$  et donc  $f_j(\alpha_i) = 0$
- Si  $i < j$  alors  $(X - \alpha_i)$  est l'un des facteurs de  $f_j$  et  $f_j(\alpha_i) = 0$ .

Dans tous les cas :  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_j(\alpha_i) = 0$ .

Par ailleurs, les  $f_j$  sont tous de degré  $n-1$  et multiples de  $X - \alpha_j$ . Donc  $1 \notin \text{Vect}\left(\left(f_j\right)_{1 \leq j \leq n}\right)$  d'où l'inclusion stricte entre  $\text{Vect}\left(\left(f_j\right)_{1 \leq j \leq n}\right)$  et  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , et  $\dim\left(\text{Vect}\left(\left(f_j\right)_{1 \leq j \leq n}\right)\right) < n$  :

La famille de  $n$  vecteurs  $\left(f_j\right)_{1 \leq j \leq n}$  ne peut donc être libre

7 – La linéarité de  $P_j$  est immédiate.

Comme  $\alpha_j$  n'est pas une racine stable,  $\alpha_j$  n'est pas un pôle de  $f$  et  $(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)$  est nul en  $\alpha_j$ . De là  $(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)$  se factorise par  $(X - \alpha_j)$  et  $\alpha_j$  n'est pas un pôle de  $P_j(f)$ . Les seuls pôles de  $P_j(f)$  sont donc les pôles de  $f$  qui ne sont pas inverses de racines de  $p$  (car  $f \in E$ ). Ceci montre que  $P_j(f) \in E$ .

Soit  $f \in \ker(P_j)$ . Alors  $f = \frac{(1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)}{1 - \alpha_j X}$ , et il existe un réel  $\lambda$  tel que  $f = \frac{\lambda}{1 - \alpha_j X}$ .

Réciproquement, si  $f = \frac{\lambda}{1 - \alpha_j X}$ , alors  $(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j) = \lambda - \lambda = 0$  et  $P_j(f) = 0$ .

$$P_j \text{ est un endomorphisme de } E \text{ et } \ker(P_j) = \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right)$$

8 – On a  $P_j\left(\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right) = \frac{1}{X-\alpha_j}\left((1-\alpha_j X)\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X} - (1-\alpha_j^2)\times 0\right)$  d'où :

$$P_j\left(\frac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right) = g$$

9 – Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0$  et donc  $\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j = 0$ .

Pour  $j$  entre 2 et  $n$  :  $g_j = \frac{a_n}{1-\alpha_j X} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{X-\alpha_k}{1-\alpha_k X} = \frac{X-\alpha_1}{1-\alpha_1 X} \underbrace{\left(\frac{a_n}{1-\alpha_j X} \prod_{k=2}^{j-1} \frac{X-\alpha_k}{1-\alpha_k X}\right)}_{\in E}$ , donc :

$$P_1(g_j) = \frac{a_n}{1-\alpha_j X} \prod_{k=2}^{j-1} \frac{X-\alpha_k}{1-\alpha_k X}$$

De la même façon,  $P_2 \circ P_1(g_j) = \frac{a_n}{1-\alpha_j X} \prod_{k=3}^{j-1} \frac{X-\alpha_k}{1-\alpha_k X}$ , puis  $P_{j-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1(g_j) = \frac{a_n}{1-\alpha_j X}$  et avec la question 7 :  $P_j \circ \dots \circ P_2 \circ P_1(g_j) = 0$ .

De là, en composant  $\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j = 0$  par  $P_{n-1} \circ \dots \circ P_1$  on obtient  $\lambda_n \frac{a_n}{1-\alpha_n X} = 0$  puis  $\lambda_n = 0$ . En itérant le procédé, on obtient successivement  $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_2 = 0$  et il reste  $\lambda_1 g_1 = 0$ , et comme  $g_1 \neq 0$  on a  $\lambda_1 = 0$ , ce qui achève de montrer : La famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

### Partie C

10 – On a  $S^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (0) \\ 1 & 0 & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $s$  l'endomorphisme associé à  $S^T$  et  $(e, \dots, e_n)$  la base

canonique de  $\mathcal{K}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a  $s(e_i) = e_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et  $s(e_n) = 0$ . En notant que  $U = e_1$  on a pour  $0 \leq i \leq n-1$  :  $(S^T)^i U = s^i(e_1) = e_{1+i}$ , donc  $\left((S^T)^i U\right)_{0 \leq i \leq n-1} = (e_1, \dots, e_n)$  :

$$\text{La famille } \left((S^T)^i U\right)_{0 \leq i \leq n-1} \text{ est la base canonique de } \mathcal{K}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$11 - \text{Posons : } \begin{cases} q_j = (1 - \alpha_j X) f_j = \prod_{i=1}^{j-1} (X - \alpha_i) \prod_{i=j}^n (1 - \alpha_i X) \\ r_j = (X - \alpha_j) f_j = \prod_{i=1}^j (X - \alpha_i) \prod_{i=j+1}^n (1 - \alpha_i X) \end{cases}$$

On remarque que  $r_j = q_{j+1}$ , donc en évaluant en  $S$  et  $S^T$  on obtient :

$$f_j(S)^T (C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(S) = q_j(S)^T q_j(S) - r_j(S)^T r_j(S) = q_j(S)^T q_j(S) - q_{j+1}(S)^T q_{j+1}(S)$$

Puis par télescopage :  $\sum_{j=1}^n (f_j(S)^T (C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(S)) = q_1(S)^T q_1(S) - q_{n+1}(S)^T q_{n+1}(S)$ . Or

$$q_{n+1} = p \text{ et } q_1 = p_0 \text{ donc : } \boxed{\sum_{j=1}^n (f_j(S)^T (C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(S)) = J(p)}$$

12 – On calcule d’abord :

$$\begin{aligned} C_j^T C_j - B_j^T B_j &= (I_n - \alpha_j S^T)(I_n - \alpha_j S) - (S^T - \alpha_j I_n)(S - \alpha_j I_n) \\ &= (1 - \alpha_j^2)(I_n - S^T S) \end{aligned}$$

Avec les notations de la question 12 et en appelant  $\sigma$  l’endomorphisme associé à  $S$ , on a :

$$S^T S e_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ S^T e_{i-1} = e_i & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que  $S^T S = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$  puis que  $I_n - S^T S = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ . Par ailleurs on vérifie aisément que  $UU^T = \text{diag}(1, 0, \dots, 0) = I_n - S^T S$  et donc :

$$\boxed{C_j^T C_j - B_j^T B_j = (1 - \alpha_j^2) UU^T}$$

13 – On déduit des questions 11 et 12 :

$$J(p) = \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k^2) f_k(S)^T UU^T f_k(S) = \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k^2) V_k V_k^T$$

De là le coefficient d’indice  $(i, j)$  de  $J(p)$  est :  $\sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k^2) v_{i,k} v_{j,k}$ .

Par ailleurs le coefficient d’indice  $(i, j)$  de  $VDV^T$  est :  $\sum_{k=1}^n v_{i,k} (DV^T)_{k,j} = \sum_{k=1}^n v_{i,k} (1 - \alpha_k^2) v_{j,k}$

On a bien :  $\boxed{J(p) = VDV^T}$ .

14 – Si  $p$  possède une racine stable  $\alpha$ .

1<sup>er</sup> cas : si  $\alpha \notin \{-1, 1\}$ . Alors  $\frac{1}{\alpha}$  est une racine de  $p$  autre que  $\alpha$  et les hypothèses de la question 6 sont vérifiées. Ainsi  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée et il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , non tous nuls, tels

que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$ . On en déduit  $\left( \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(S^T) \right) U = 0$  puis  $\sum_{k=1}^n \lambda_k V_k = 0$  : les colonnes de

$V$  sont donc liées et  $V$  n’est pas inversible et par suite  $J(p) \notin GL_n(\mathbb{R})$ .

2<sup>ième</sup> cas : si  $\alpha \in \{-1, 1\}$ , alors  $D$  n’est pas inversible et à nouveau  $J(p) \notin GL_n(\mathbb{R})$ .

Dans tous les cas :  $\boxed{\text{Si } p \text{ possède une racine stable, alors } J(p) \notin GL_n(\mathbb{R})}$ .

### Partie D

15 – On suppose  $A = P^T B P$  avec  $P$  inversible. Soit alors  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  vérifiant  $C(A)$ . Alors pour  $X$  non nul dans  $F$  on a  $X^T P^T B P X > 0$  ou encore  $(P X)^T B (P X) > 0$  et  $\{P X, X \in F\}$  vérifie  $C(B)$ . Or par inversibilité de  $P$ , l'application linéaire  $X \mapsto P X$  est injective sur  $F$  et  $\dim\{P X, X \in F\} = \dim(F)$ . On en déduit  $d(A) \leq d(B)$ .

Or par inversibilité on a  $B = (P^{-1})^T A P^{-1}$ , ce qui permet d'en déduire  $d(B) \leq d(A)$  et finalement :  $\boxed{d(A) = d(B)}$ .

16 – Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . Il existe alors une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs propres de  $M$ ,  $e_i$  étant associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

Quitte à permuter les vecteurs de  $(e_1, \dots, e_n)$ , on peut supposer  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  et  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \leq 0$  ; on a ainsi  $\pi(M) = k$ .

Soit  $F_M = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . On a alors pour  $X = \sum_{i=1}^k x_i e_i \in F_M$  :  $X^T M X = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \geq 0$ . Si on impose de plus  $X \neq 0$  alors l'un au moins des  $x_i$  est non nul et  $X^T M X > 0$ . Donc  $F_M$  vérifie  $C(M)$  et  $\dim(F_M) = k = \pi(M)$ . Donc  $\boxed{d(M) \geq \pi(M)}$ .

17 – On suppose donc que  $G$  vérifie  $C(M)$  et  $\dim(G) > \dim(F_M)$ . On a :

$$n \geq \dim(F_M^\perp + G) = \underbrace{n - \dim(F_M) + \dim(G)}_{> n+1} - \dim(F_M^\perp \cap G)$$

On en déduit  $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$ . On dispose alors d'un  $X$  non nul dans  $F_M^\perp \cap G$ . Comme  $X \in G$

on a  $X^T M X > 0$ , et comme  $X \in F_M^\perp$ ,  $X$  s'écrit  $X = \sum_{i=k+1}^n x_i e_i$  et  $X^T M X = \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i^2 \leq 0$  :

contradiction. Donc  $\dim(G) \leq \pi(M)$  et finalement :  $\boxed{\text{pour } M \in S_n(\mathbb{R}), d(M) = \pi(M)}$ .

18 – On suppose  $J(p)$  inversible. Par contraposée du résultat de la question 14,  $p$  n'a pas de racine stable. Par ailleurs,  $J(p)$  est clairement symétrique donc  $d(J(p)) = \pi(J(p))$ .

Reste à déterminer  $d(J(p))$ . On sait que  $J(p) = V D V^T$ , et  $V$  est inversible par inversibilité de  $J(p)$ . La question 15 nous indique alors que  $d(J(p)) = d(D)$  et par symétrie de  $D$  on a alors  $d(J(p)) = \pi(D)$  avec  $D = \text{diag}(1 - \alpha_1^2, \dots, 1 - \alpha_n^2)$ . Donc  $\pi(D)$  est le nombre de  $\alpha_i$  appartenant à  $] -1, 1[$ , c'est-à-dire  $\sigma(p)$ . On a montré :  $\boxed{\pi(J(p)) = \sigma(p)}$ .

## Partie E

19 – On suppose  $J(p)$  non inversible et que  $p$  n'a pas de racine stable.

Alors 1 et  $-1$  ne sont pas racines de  $p$  et la matrice  $D$  est inversible. On déduit alors de  $J(p) = VDV^T$  que  $V$  n'est pas inversible. Il existe donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que

$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(S^T)U = 0$ . Soit alors  $q$  le polynôme  $q = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ . On a  $q(S^T)U = 0$  et comme les  $f_j$

sont de degré  $n-1$  on a  $\deg(q) \leq n-1$ . Enfin la liberté de la famille  $(f_1, \dots, f_n)$  établie à la question 9 (dont l'hypothèse d'absence de racine stable est bien vérifiée) entraîne que  $q \neq 0$  car

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ . On a montré :  $\boxed{\exists q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (q \neq 0 \text{ et } q(S^T)U = 0)}$ .

20 – La partie directe a été établie à la question 18.

Réciproquement, on suppose que  $p$  n'admet pas de racine stable. Si  $J(p)$  n'était pas inversible on serait dans le cadre de la question précédente et on aurait  $q(S^T)U = 0$  avec  $q \neq 0$  et

$q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i X^i$ . Or (question 10) :  $\left( (S^T)^i U \right)_{0 \leq i \leq n-1}$  est libre et  $\sum_{i=0}^{n-1} q_i (S^T)^i U = 0$ , ce qui entraîne la

nullité des  $q_i$  et celle de  $q$  : absurde. On a bien établi :

$\boxed{J(p) \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ équivaut à } p \text{ n'a pas de racine stable}}$

## Partie F

21 – Soit  $\alpha$  une racine non nulle de  $h$ . Alors  $\alpha$  est racine de  $p'$  qui n'a pas de racine stable (question 5 dont les hypothèses sont vérifiées), donc  $\frac{1}{\alpha}$  n'est pas racine de  $h = Xp'$  et  $h$  n'a pas de racine stable. D'après le critère de la question 20,  $J(h)$  est inversible.

22 – Soit, pour  $0 < r < 1$ ,  $q_r = p(rX)$ .

• On sait que  $p$  s'écrit  $p = a_n \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ , les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  étant deux à deux distincts. Donc

$q_r = a_n r^n \prod_{k=1}^n \left( X - \frac{\alpha_k}{r} \right)$ . Les  $\frac{\alpha_1}{r}, \dots, \frac{\alpha_n}{r}$  sont également deux à deux distinctes et  $q_r$  est scindé

à racines simples.

• On remarque d'abord que pour toute racine  $\alpha$  de  $p$  vérifiant  $|\alpha| \geq 1$ , on a  $\left| \frac{\alpha}{r} \right| > |\alpha| \geq 1$ .

Par suite si  $\sigma(p) = 0$  on a  $\sigma(q_r) = 0$ . Dans le cas contraire, soient  $\beta_1 < \dots < \beta_{\sigma(p)}$  les racines de  $p$  contenues dans  $] -1, 1[$ . Les seules racines de  $q_r$  susceptibles d'appartenir à  $] -1, 1[$  sont alors

$\frac{\beta_1}{r}, \dots, \frac{\beta_{\sigma(p)}}{r}$ . On pose  $\delta = \min \left\{ 1 + \beta_1, 1 - \beta_{\sigma(p)}, \frac{1}{2} \right\} \in ] 0, 1[$ , alors pour chaque  $i$  on a

$-1 + \delta \leq \beta_i \leq 1 - \delta$  avec  $1 - \delta > 0$ , puis  $\left| \frac{\beta_i}{r} \right| \leq \frac{1 - \delta}{r}$ . Si on s'impose de plus  $r > 1 - \delta$  alors on a

$\left| \frac{\beta_i}{r} \right| < 1$  pour chaque  $i$  et  $\sigma(q_r) = \sigma(p)$ .

• Soit  $x$  une racine de  $q_r$  qu'on écrit sous la forme  $x = \frac{\alpha}{r}$  où  $\alpha$  est une racine de  $p$ .  $x$  est une racine stable de  $q_r$  lorsque  $x \neq 0$  et qu'il existe une racine  $y$  de  $q_r$ , qu'on écrit  $y = \frac{\beta}{r}$  avec  $\beta$  racine de  $p$ , telle que  $\frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{r}$ , c'est-à-dire  $r^2 = \alpha\beta$ , avec de plus  $\alpha \neq \beta$ . Par finitude des racines de  $p$ , ceci se produit un nombre au plus fini de fois et quitte à choisir  $\eta$  suffisamment petit, ceci ne se produit pas dans  $]1 - \eta, \eta[$ .

Ainsi en choisissant  $\eta$  suffisamment petit dans l'intervalle  $]0, \delta[$ , pour tout  $r \in ]1 - \eta, 1[$ , le polynôme  $q_r = p(rX)$  est scindé à racines simples, sans racine stable, et  $\sigma(q_r) = \sigma(p)$ .

23 – On part à la pêche aux informations dans les questions précédentes. On choisit d'abord un  $\eta$  comme ci-dessus et  $r \in ]1 - \eta, 1[$ . Alors  $J(p(rX))$  est inversible d'après la question 20 et avec la question 18 :  $\sigma(p(rX)) = \pi(J(p(rX)))$  puis avec la question 21 :  $\sigma(p(rX)) = \sigma(p)$  et finalement  $\pi(F(r)) = \sigma(p)$ . Or  $\frac{n}{2(r-1)} < 0$ , donc les valeurs propres strictement positives de  $\frac{n}{2(r-1)}F(r)$  sont les  $\frac{n}{2(r-1)}\lambda$  où les  $\lambda$  sont les valeurs propres strictement négatives de  $F(r)$ . Comme en outre 0 n'est pas valeur propre par inversibilité, il y en a donc  $n - \pi(F(r))$ . En résumé :  $\forall r \in ]1 - \eta, 1[$ ,  $\pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \pi(F(r)) = n - \sigma(p)$ , et *a fortiori* :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \sigma(p)$$

24 – On a en notant à nouveau  $q_r = p(rX) : F(r) = ((q_r)_0(S))^T (q_r)_0(S) - q_r(S)^T q_r(S)$ . Or pour  $x \neq 0 : (q_r)_0(x) = x^n q_r(\frac{1}{x}) = x^n p(\frac{x}{r}) = r^n (\frac{x}{r})^n p(\frac{x}{r}) = r^n p_0(\frac{x}{r}) = \lambda r^n p(\frac{x}{r})$  et donc :

$$F(r) = (\lambda r^n p(\frac{1}{r}S))^T (\lambda r^n p(\frac{1}{r}S)) - p(rS)^T p(rS) = r^{2n} p(\frac{1}{r}S)^T p(\frac{1}{r}S) - p(rS)^T p(rS)$$

Or  $p(rS) = \sum_{k=0}^n a_k r^k S^k$  donc en dérivant sur  $\mathbb{R}_*^+$  :  $\frac{d}{dr}(p(rS)) = \sum_{k=1}^n k a_k r^{k-1} S^k = p'(rS)S$  ; de la

même façon :  $p(\frac{1}{r}S) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{r^k} S^k$  et  $\frac{d}{dr}(p(\frac{1}{r}S)) = \sum_{k=1}^n -k \frac{a_k}{r^{k+1}} S^k = -\frac{1}{r^2} p'(\frac{1}{r}S)S$ . De là, avec la

linéarité de la transposition :

$$F'(r) = 2nr^{2n-1} p(\frac{1}{r}S)^T p(\frac{1}{r}S) - r^{2n-2} S^T p'(\frac{1}{r}S)^T p(\frac{1}{r}S) - r^{2n-2} p(\frac{1}{r}S)^T p'(\frac{1}{r}S)S - S^T p'(rS)^T p(rS) - p(rS)^T p'(rS)S$$

On évalue en 1 :  $F'(1) = 2np(S)^T p(S) - 2S^T p'(S)^T p(S) - 2p(S)^T p'(S)S$ .

25 – On a la formule de Taylor-Young :  $F(r) \underset{r \rightarrow 1}{=} F(1) + (r-1)F'(1) + o(r-1)$ . Or :

$$F(1) = J(p) = p_0(S)^T p_0(S) - p(S)^T p(S)$$

Sachant  $p = \lambda p_0$  et  $\lambda^2 = 1$  on obtient  $F(1) = 0$  d'où  $\frac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r \rightarrow 1}{=} \frac{n}{2}F'(1) + o(1)$ .

Par ailleurs avec la question 4 :

$$\begin{aligned}
J(h) &= h_0(S)^T h_0(S) - h(S)^T h(S) \\
&= (np(S) - Sp'(S))^T (np(S) - Sp'(S)) - (Sp'(S))^T (Sp'(S)) \\
&= n^2 p(S)^T p(S) - np(S)^T Sp'(S) - np'(S)^T S^T p(S)
\end{aligned}$$

Comme  $S$  commute avec  $p(S)$  et  $S^T$  avec  $p'(S^T) = p'(S)^T$ , on trouve  $J(h) = \frac{n}{2} F'(1)$  et

finalement : 
$$\boxed{\frac{n}{2(r-1)} F(r) \underset{r \rightarrow 1}{=} J(h) + o(1)}.$$

26 – On sait (Q21) que  $J(h)$  est inversible et donc 0 n'en est pas valeur propre. Avec le résultat de continuité admis, les valeurs propres des matrices symétriques  $M$  suffisamment proche de  $J(h)$  restent de signe constant et  $\pi$  est constant au voisinage de  $J(h)$  dans  $S_n(\mathbb{R})$ . Avec la limite ci-dessus on a donc :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \pi \left( \frac{n}{2r-1} F(r) \right) = \pi(J(h))$$

Puis avec la question 23, on obtient  $\pi(J(h)) = n - \sigma(p)$ . Comme  $J(h)$  est inversible on a (Q18)  $\pi(J(h)) = \sigma(h)$ . Or  $h = Xp'$ , donc  $\sigma(h) = 1 + \sigma(p')$  et  $1 + \sigma(p') = n - \sigma(p)$ . Mais avec les questions 5, 21 et 18 :  $\sigma(p') = \pi(J(p'))$  et finalement  $\boxed{\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))}$ .

## Partie G

27 – L'expression  $p_0 = a_n \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k X)$  montre que pour tout racine non nulle  $\alpha$  de  $p$  de multiplicité  $m$ ,  $\frac{1}{\alpha}$  est racine de  $p_0$  de même multiplicité. Ainsi dans le cas d'une racine stable,  $\alpha$  est également racine de  $p_0$  de même multiplicité, et  $(X - \alpha)^m$  divise  $f$  et par suite  $\alpha$  n'est pas racine de  $g$ . Il s'en suit immédiatement que  $g$  est sans racine stable et avec les questions 20 et 18 :  $\boxed{\sigma(g) = \pi(J(g))}$ .

28 – On note tout d'abord qu'on a  $\sigma(p) = \sigma(f) + \sigma(g) = \sigma(f) + \pi(J(g))$ .

Nous avons vu ci-dessus que  $f$  peut s'écrire comme produit de facteurs  $(X-1)$ ,  $(X+1)$  et  $(X-\alpha)(X+\frac{1}{\alpha})$  où  $\alpha$  est une racine stable autre que  $\pm 1$ . En nommant  $g_1, \dots, g_\ell$  ces facteurs on a  $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$  et  $\sigma(f) = \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i)$ . Avec la question 26 (les racines des  $g_i$  sont stables et simples) on a :

$$\sigma(g_i) = \deg(g_i) - 1 + \pi(J(g_i')) \text{ et } \sigma(p) = \pi(J(g)) - \ell + \deg(f) - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(J(g_i'))$$

Et finalement : 
$$\boxed{\sigma(p) = \pi(J(g)) - \ell + n - \deg(g) - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(J(g_i'))}.$$