

## MATHEMATIQUES 1

Durée 4 h

### Présentation du problème

Le but de ce problème est de répondre aux trois questions de géométrie euclidienne qui sont posées au début des parties B, C et E ; pour cela on a besoin de quelques résultats d'algèbre linéaire, auxquels sont consacrées les parties A et D. On peut commencer directement à la partie B, à condition de lire les définitions au début de la partie A et d'admettre les résultats qui s'ensuivent, essentiellement les égalités (5) et (6) ; de même on peut sauter la partie D, à condition d'admettre le théorème énoncé au début de cette partie. A l'opposé on peut aussi traiter les deux parties algébriques A et D avant de s'intéresser aux autres ; ces deux parties sont indépendantes.

### A) Quelques résultats d'algèbre linéaire.

On a préféré regrouper ici toutes les définitions et notations de nature algébrique. On part d'une matrice carrée  $A$  d'ordre  $(n + 1)$ , où  $n$  est un entier  $\geq 1$  ; ses éléments sont des nombres réels notés  $a_{ij}$ , et pour la commodité des notations on fait varier l'indice de ligne  $i$  et l'indice de colonne  $j$  de 0 à  $n$  ; le déterminant de  $A$  est noté  $\text{Det } A$  et le cofacteur d'un élément  $a_{ij}$  est noté  $a'_{ij}$  ; on rappelle que  $(-1)^{i+j} a'_{ij}$  est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne d'indice  $i$  et la colonne d'indice  $j$  de  $A$  ; on note  $A'$  la matrice des cofacteurs  $a'_{ij}$  et  $\text{Som } A'$  la somme des  $(n + 1)^2$  éléments de  $A'$ .

De cette matrice  $A$  on déduit la matrice rectangulaire  $B$  qui a pour éléments

$$(1) \quad b_{ij} = a_{ij} - a_{0j} \quad ;$$

l'indice de ligne  $i$  varie maintenant de 1 à  $n$ , et l'indice de colonne  $j$  toujours de 0 à  $n$ . On appelle  $S(B)$  le système d'équations linéaires associé à  $B$  :

$$\sum b_{ij} x_j = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad ;$$

sauf mention contraire (seulement dans la formule (5) ci-dessous), toutes les sommations  $\Sigma$  se font sur l'indice  $j$  variant de 0 à  $n$  ; l'espace vectoriel des solutions de  $S(B)$  est noté  $X(B)$  ; sa dimension est donnée par le rang de  $B$  grâce à l'égalité  $\dim X(B) = n + 1 - \text{rg } B$ .

On note  $B(z_0, z_1, \dots, z_n)$ , ou en abrégé  $B(z)$ , la matrice carrée d'ordre  $(n + 1)$  obtenue en ajoutant à  $B$  une ligne d'indice 0 formée par  $(n + 1)$  variables  $z_0, z_1, \dots, z_n$ , et l'on note  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  les cofacteurs de  $z_0, z_1, \dots, z_n$  dans  $B(z)$ , ce qui signifie que

$$(2) \quad \text{Det } B(z) = \sum \beta_j z_j.$$

La matrice  $B(1, 1, \dots, 1)$  obtenue en attribuant la valeur 1 à toutes les variables, sera notée  $B(1)$ .

Enfin, de cette matrice  $B$ , on déduit la matrice carrée  $C$  dont les éléments sont

$$(3) \quad c_{ij} = b_{ij} - b_{i0} \quad ;$$

les indices de ligne  $i$  et de colonne  $j$  varient maintenant tous les deux de 1 à  $n$  ; on peut évidemment passer directement de  $A$  à  $C$  :

$$(4) \quad c_{ij} = a_{ij} - a_{0j} - a_{i0} + a_{00}.$$

A1) Pour commencer on ne considère que la matrice B et les matrices carrées associées B(z), B(1) et C.

A1a) Démontrez que  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in X(B)$ .

A1b) Quels sont les éléments de  $X(B)$  lorsque  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  ne sont pas tous nuls ?

A1c) Trouvez une égalité simple reliant les rangs des matrices C et B(1).

A1d) Démontrez que  $\text{Det } C = \sum \beta_j$ .

A2) On revient maintenant à la matrice A.

A2a) Démontrez l'égalité

$$(5) \quad \beta_j = \sum_{i=0}^n a'_{ij} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n.$$

On vous suggère de partir de la matrice B( $a_{00}$ ,  $a_{01}$ , ...,  $z_j$ , ...,  $a_{0n}$ ) obtenue en ajoutant à B la ligne d'indice 0 de A, à l'exception de  $a_{0j}$  dans la colonne d'indice j, à la place duquel on met la variable  $z_j$ ; le déterminant de cette matrice est une fonction  $\beta_j z_j + \delta_j$ , où  $\delta_j$  est une constante que l'on n'a pas besoin de calculer.

A2b) Concluez par les égalités

$$(6) \quad \text{Det } C = \sum \beta_j = \text{Som } A'.$$

A3) Lorsque  $n = 2$ , la matrice A que vous utiliserez plus tard dépendra de trois nombres réels positifs a, b, c selon l'égalité

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

A3a) Calculez la matrice A', les coefficients  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  et Det A.

A3b) Décomposez la fonction

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2)$$

en un produit de quatre facteurs non triviaux, et déduisez-en une expression factorisée de Som A'.

### B) Calcul d'aire ou de volume.

On considère un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  de dimension  $n \geq 1$ ; le cas où  $n = 1$  est inintéressant, mais peut vous permettre de vérifier vos calculs. On note E l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{E}$ ; donc tout couple (M, N) de points de  $\mathcal{E}$  détermine un vecteur  $\overrightarrow{MN}$  de E, et tout couple  $(M, \vec{u}) \in \mathcal{E} \times E$  détermine un point  $M + \vec{u}$ , image de M par la translation de vecteur  $\vec{u}$ . En outre, puisque E est un espace affine euclidien, E est muni d'un produit scalaire, qui sera noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ; la longueur du vecteur  $\overrightarrow{MN}$  sera notée MN.

Dans  $\mathcal{E}$  on se donne  $(n + 1)$  points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  et l'on pose

$$a_{ij} = \overrightarrow{P_i P_j} \cdot \overrightarrow{P_i P_j}$$

chaque fois que  $0 \leq i \leq n$  et  $0 \leq j \leq n$  ; la matrice  $A$  utilisée dans les trois parties géométriques B, C et E du problème sera celle formée par ces  $a_{ij}$ . On note  $r$  la dimension du sous-espace affine engendré par ces  $(n + 1)$  points ;  $r$  est aussi le rang du système des  $n$  vecteurs  $\overrightarrow{P_0 P_j}$  (avec  $1 \leq j \leq n$ ).

On se propose de calculer en fonction des  $a_{ij}$  le nombre  $V$  tel que  $n!V$  soit la valeur absolue du déterminant des  $n$  vecteurs  $\overrightarrow{P_0 P_j}$  dans une base orthonormée de  $E$ . Si  $n = 2$  et si  $P_0, P_1, P_2$  forment un triangle,  $V$  est l'aire de ce triangle ; si  $n = 3$  et si  $P_0, P_1, P_2, P_3$  forment un tétraèdre,  $V$  est le volume de ce tétraèdre.

**B1)** Démontrez l'égalité  $\overrightarrow{P_0 P_i} \cdot \overrightarrow{P_0 P_j} = \frac{1}{2} (a_{i0} + a_{0j} - a_{ij})$ .

**B2)** Soient  $(y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj})$  les composantes de  $\overrightarrow{P_0 P_j}$  dans une base orthonormée  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$  de  $E$ , et soit  $Y$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont la colonne d'indice  $j$  (pour  $j = 1, 2, \dots, n$ ) est formée par ces composantes ; calculez le produit  ${}^t Y Y$  (où  ${}^t Y$  est la matrice transposée de  $Y$ ), et déduisez-en une relation entre  $V$  et le déterminant d'ordre  $n$  des produits scalaires  $\overrightarrow{P_0 P_i} \cdot \overrightarrow{P_0 P_j}$ .

**B3)** Grâce aux résultats précédents, trouvez une relation entre  $V$  et  $\text{Det } C$ , et calculez la constante  $K_n$  telle que

$$V^2 = K_n \text{ Som } A'$$

**B4)** Dans la partie E on aura besoin de connaître le rang de la matrice  $C$  connaissant  $r$  (défini plus haut).

**B4a)** Démontrez que  $\text{rg}({}^t Y Y) \leq r$ .

**B4b)** Démontrez que  $\text{rg}({}^t Y Y) \geq r$ . Vous pouvez supposer les  $r$  vecteurs  $\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_r}$  linéairement indépendants, et considérer la sous-matrice de  ${}^t Y Y$  formée par les  $r$  premières lignes et les  $r$  premières colonnes.

**B4c)** Calculez  $\text{rg } C$  au moyen de  $r$ .

### C) Recherche des points équidistants.

On se propose de trouver les points  $G$  équidistants des  $(n + 1)$  points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ; puis on calculera dans le cas général la distance  $R$  d'un tel point  $G$  aux points  $P_j$ .

**C1)** Soit  $M$  un point de  $\mathcal{E}$  et soit  $G$  sa projection orthogonale sur le sous-espace affine engendré par  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ; démontrez que  $M$  est équidistant des  $(n + 1)$  points  $P_j$  si et seulement si  $G$  en est équidistant.

En prévision de ce qui suit, on rappelle que  $G$  est barycentre des points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  affectés de coefficients dépendant de  $G$ .

C2) Soit  $Q_i$  le milieu de  $P_0$  et  $P_i$  (lorsque  $1 \leq i \leq n$ ) et soit  $M$  un point quelconque de  $\mathcal{E}$ .  
Trouvez une égalité simple reliant  $MP_i^2 - MP_0^2$  et  $\overline{MQ_i} \cdot \overline{P_0P_i}$ .

C3) Soit  $G$  le barycentre des points,  $P_j$  affectés de coefficients  $x_j$  dont la somme  $\Sigma x_j$  est supposée non nulle ; donc pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$  on a  $\Sigma(x_j \overline{MP_j}) = (\Sigma x_j) \overline{MG}$ .

C3a) Démontrez que

$$(\Sigma x_j)(GP_i^2 - GP_0^2) = \Sigma(a_{ij} - a_{0j})x_j \quad (\text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n),$$

et déduisez-en que  $G$  est équidistant des  $(n + 1)$  points  $P_j$  si et seulement si  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X(B)$ .

C3b) D'après A1a et A2b, le système d'équations  $S(B)$  possède une solution  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$  telle que  $\Sigma \beta_j = \text{Som } A'$ . Quelle condition doivent satisfaire les points  $P_j$  pour que cette solution donne un point équidistant  $G$  ? Combien y a-t-il de points équidistants dans ce cas ?

C4) On suppose que la solution  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$  donne effectivement un point équidistant  $G$ , et l'on veut calculer la distance  $R$  de  $G$  aux points  $P_j$ .

C4a) Démontrez que pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$  on a

$$\Sigma(\beta_j MP_j^2) = (\Sigma \beta_j) MG^2 + \Sigma(\beta_j GP_j^2).$$

C4b) Calculez  $R$  en choisissant judicieusement le point  $M$  ; ce calcul doit vous permettre d'aboutir à une égalité

$$(VR)^2 = K'K_n \text{ Det } A,$$

où  $K'$  est une constante que vous calculerez.

C5) Si vous avez traité A3, vous écrirez ici sans commentaires les égalités qui permettent, lorsque  $n = 2$ , de calculer  $V^2$  et  $VR$  en fonction de  $a = P_1P_2$ ,  $b = P_2P_0$  et  $c = P_0P_1$ .

#### D) Encore un peu d'algèbre linéaire.

On revient aux hypothèses de la partie A, où  $A$  est une quelconque matrice carrée d'ordre  $(n + 1)$ . On veut démontrer que si  $\text{Det } A$  et  $\text{Som } A'$  sont nuls, la somme des  $a'_{jj}$  est déjà nulle, ou bien dans toutes les colonnes de  $A'$ , ou bien dans toutes les lignes de  $A'$ , les deux éventualités ne s'excluant pas. Pour démontrer ce théorème, on distinguera d'abord le cas où  $A$  est de rang  $\leq n - 1$ , puis le cas où son rang est  $n$  (maximum compatible avec l'hypothèse  $\text{Det } A = 0$ ).

D1) Calculez  $A'$  lorsque  $\text{rg } A \leq n - 1$ .

D2) On suppose maintenant que  $\text{rg } A = n$ .

**D2a)** Démontrez que chaque ligne  $(a'_{h0}, a'_{h1}, \dots, a'_{hn})$  de  $A'$  est une solution du système d'équations  $S(A)$  associé à  $A$  ; pour démontrer l'égalité

$$\sum a_{ij} a'_{hj} = 0 \quad (\text{pour tout } i = 0, 1, \dots, n),$$

on vous suggère d'interpréter le membre de gauche comme le déterminant d'une matrice carrée d'ordre  $(n + 1)$  dont chaque ligne, sauf une, est égale à la ligne de même indice dans  $A$ .

**D2b)** Quelle est la dimension de  $X(A)$ , espace vectoriel des solutions de  $S(A)$  ? Quel est le rang de  $A'$  ?

**D2c)** Démontrez l'existence de  $(2n + 3)$  nombres  $a', \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$  tels que  $a'_{ij} = \lambda_i \mu_j a'$  quels que soient  $i$  et  $j$ , et déduisez-en une expression de  $\text{Som } A'$  qui montre quand est-ce que cette somme est nulle.

### **E) Cas où Det A = 0.**

On revient aux hypothèses et notations des parties B et C.

On veut savoir dans quels cas  $\text{Det } A$  est nul ; la question n'a d'intérêt que si  $n \geq 3$ .

**E1)** On va d'abord démontrer que  $\text{Det } A = 0$  si et seulement si  $\dim X(B) \geq 2$ .

**E1a)** Démontrez que  $\text{Det } A = 0$  lorsque  $\dim X(B) \geq 2$ .

**E1b)** Réciproquement on suppose  $\text{Det } A = 0$  ; démontrez que  $\text{Som } A' = 0$ , puis que tous les  $\beta_j$  sont nuls, et enfin que  $\dim X(B) \geq 2$ .

**E2)** Le système d'équations linéaires associé à la matrice  $B(1)$  est le système  $S(B)$  auquel on a ajouté l'équation  $\sum x_j = 0$  ; si vous avez répondu correctement aux questions A1c et B4, vous savez que le rang de  $B(1)$  est  $(r + 1)$ . Comparez les dimensions de  $X(B)$  et  $X(B(1))$  selon qu'il existe ou n'existe pas de point équidistant des points  $P_j$ , et calculez dans chaque cas la dimension de  $X(B)$ .

**E3)** Déterminez dans quels cas  $\text{Det } A$  est nul ; votre réponse doit faire intervenir la dimension  $r$  et l'existence ou l'inexistence de point équidistant.

**E4)** On suppose  $n = 3$ .

**E4a)** Interprétez le résultat précédent ainsi :  $\text{Det } A$  est nul si et seulement si les quatre points  $P_j$  sont sur une même courbe appartenant à un ensemble de courbes que vous préciserez.

**E4b)** On pose  $a = P_1P_2, \quad b = P_2P_0, \quad c = P_0P_1,$   
 $a' = P_0P_3, \quad b' = P_1P_3, \quad c' = P_2P_3;$

démontrez que  $\text{Det } A$  est nul si et seulement si l'un des trois produits  $aa', bb',$  ou  $cc'$  est égal à la somme des deux autres.