

Partie I. Préliminaires géométriques.

A.1) Solution “géométrique” :

$\widehat{abc}$ est par définition l’enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ c’est à dire le “triangle plein” au sens géométrique (éventuellement dégénéré en un segment) ABC avec A (resp. B, C) les points d’affixe a (resp. b, c).

Si on désigne par I, J, K les points d’affixe respectives $1, i$ et -1 alors τ_0 est le triangle KOJ , τ_1 le triangle IOJ et τ le triangle KJI donc on a bien $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$. $\square$

Solution “calculatoire” :

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$.

On a $\alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot i = (\alpha + \frac{\beta}{2}) \cdot (-1) + \frac{\beta}{2} \cdot 1 + \gamma \cdot i$ et $(\alpha + \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}, \gamma) \in K$ donc $\tau_0 \subset \tau$.

On prouve de même que $\tau_1 \subset \tau$ et donc que $\tau_0 \cup \tau_1 \subset \tau$.

Réciproquement soit $z = \alpha \cdot (-1) + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot i \in \tau$. Si $\alpha \geq \beta$ on a $z = (\alpha - \beta) \cdot (-1) + 2\beta \cdot 0 + \gamma \cdot i$ ce qui prouve que $z \in \tau_0$ et sinon $z = (\beta - \alpha) \cdot 1 + 2\alpha \cdot 0 + \gamma \cdot i$ donc $z \in \tau_1$.

En conclusion $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$. $\square$

A.2) Cf solution “géométrique” ci-dessus.

A.3.a) Notons s la réflexion définie par l’énoncé et s' celle par rapport à la parallèle à l’axe $x'x$ passant par a également. On a alors $s \circ s' = r$ où r est la rotation de centre a et d’angle 2θ donc $s = r \circ s'$. Or on a clairement $r(z) - a = e^{2i\theta}(z - a)$ et $s'(z) - a = \overline{z - a}$ d’où $z' - a = s(z) - a = e^{2i\theta}(s'(z) - a) = e^{2i\theta}(\overline{z - a})$. $\square$

A.3.b) Clairement $z' - a = \rho(z - a)$ $\square$

A.3.c) • On constate immédiatement que -1 est point fixe (unique par un calcul immédiat) de ϕ_0 et que en notant $\phi_0(z) = z'$ on a $z' + 1 = \frac{1+i}{2}(\overline{z} + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}(\overline{z} + 1)$.

Donc, d’après les deux questions précédentes, $\phi_0 = s_0 \circ h_0 = h_0 \circ s_0$ avec h_0 l’homothétie de centre -1 et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et s_0 la réflexion par rapport à la droite passant par -1 et d’angle polaire $\frac{\pi}{8}$. $\square$

Unicité : soit une telle décomposition $h' \circ s'$. Comme -1 est l’unique point fixe de ϕ_0 on a que -1 est le centre de h' et donc (avec des notations claires) $z' + 1 = \rho e^{2i\theta}(\overline{z} + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}(\overline{z} + 1)$ pour tout z donc $\rho e^{2i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$

donc (puisque $\rho > 0$) $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{8}$ ce qui prouve l’unicité de la décomposition. $\square$

• De même 1 est l’unique point fixe de ϕ_1 qui se traduit par $z' - 1 = \frac{1-i}{2}(\overline{z} - 1)$ donc $\phi_1 = h_1 \circ s_1 = s_1 \circ h_1$ avec h_1 l’homothétie de centre 1 et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et s_1 la réflexion par rapport à la droite passant 1 et d’angle polaire $-\frac{\pi}{8}$. L’unicité de cette décomposition se prouve comme précédemment. $\square$

A.4) Si f est une application affine, comme elle conserve le barycentre, on a que l’image du triangle plein $\widehat{abc}$ est le triangle plein $\widehat{a'b'c'}$ avec $a' = f(a), \dots$

En particulier avec ϕ_0 et ϕ_1 et ainsi on constate que $\phi_0(\tau) = \tau_0$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1$. $\square$

B.1.a) Soit f l’application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$. Elle est continue de sorte que $f^{-1}\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$. Donc $K = f^{-1}\{1\} \cap [0, 1]^3$ également en tant qu’intersection de deux fermés.

En outre K est borné car inclus dans $[0, 1]^3$ donc compact en tant que fermé borné en dimension finie. $\square$

B.1.b) Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in K$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in K$ et si $t \in [0, 1]$ alors $w = tu + (1-t)v = (w_1, w_2, w_3)$ avec $w_i = tu_i + (1-t)v_i$ de sorte que $w_i \geq 0$ et $w_1 + w_2 + w_3 = t(u_1 + u_2 + u_3) + (1-t)(v_1 + v_2 + v_3) = t + (1-t) = 1$ et ainsi $w \in K$ donc K est convexe. $\square$

B.1.c) Soit (a, b, c) fixé dans $\mathbb{C}^3$ et soit F l’application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

F est continue donc $\widehat{abc} = F(K)$ est compact en tant qu’image continue d’un compact.

Par ailleurs F est linéaire donc $F(K)$ est convexe (image d’un convexe par une application affine).

En conclusion $\widehat{abc}$ est un compact convexe de $\mathbb{C}$. $\square$

B.1.d) L'application d de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $d(z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ est continue (composée de $(z_1, z_2) \mapsto z_1 - z_2 = z$ qui est linéaire donc continue car espace de départ de dimension finie par l'application $z \mapsto |z|$ qui est 1-lipschitzienne). Par ailleurs $\widehat{abc}^2$ est un compact de $\mathbb{C}^2$ en tant que produit de deux compacts. Donc l'application d est bornée sur $\widehat{abc}^2$ et y atteint sa borne supérieure. D'où l'existence de $\delta(\widehat{abc})$. $\square$

B.2.a) Notons $M = \max(|z - a|, |z - b|, |z - c|)$ et soit $z' = \alpha a + \beta b + \gamma c \in \widehat{abc}$.

Il vient par inégalité triangulaire et du fait que α, β et γ sont positifs :

$$|z - z'| \leq \alpha|z - a| + \beta|z - b| + \gamma|z - c| \leq (\alpha + \beta + \gamma)M = M$$

Donc $\sup\{|z - z'| / z' \in \widehat{abc}\} \leq M$ et l'inégalité inverse résulte du fait que a, b et c appartiennent à $\widehat{abc}$. $\square$

B.2.b) Soit $(z_1, z_2) \in \widehat{abc}$ tel que $|z_1 - z_2| = \delta(\widehat{abc})$ dont l'existence est assurée par B.1.d)

On a alors $|z_1 - z_2| = \max\{|z_1 - z'| / z' \in \widehat{abc}\} = \max(|z_1 - a|, |z_1 - b|, |z_1 - c|)$ ce qui prouve qu'on peut toujours choisir z_2 parmi a, b ou c . De même pour z_1 vu le symétrie des rôles joués par z_1 et z_2 .

Ainsi $\delta(\widehat{abc}) = \max(|a - b|, |b - c|, |c - a|)$ $\square$

B.3) Pour $i = 0$ ou 1 on a $\phi_i(\tau) \subset \tau$ d'après la question I.A.4) donc $\phi_{r_{n+1}}(\tau) \subset \tau$ pour tout n donc en composant par $\phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}$ il vient $\tilde{\tau}_{n+1} \subset \tilde{\tau}_n$.

Par ailleurs toujours par la question I.A.4), $\tilde{\tau}_n$ est un triangle plein dont le diamètre est, d'après les questions A.3.c) et B.2.b), $d_n = \frac{2}{\sqrt{2}}\pi$.

Soit la suite (a_n) définie par $a_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(1)$. Naturellement $a_n \in \tilde{\tau}_n$. Ainsi $|a_n - a_{n-1}| \leq d_{n-1}$ puisque $\tilde{\tau}_n \subset \tilde{\tau}_{n-1}$. Comme la série géométrique $\sum d_n$ converge, la série $\sum (a_n - a_{n-1})$ converge absolument donc converge et ainsi la suite (a_n) converge vers une limite notée a .

Soit un entier $k \geq 1$ fixé quelconque. Pour $n \geq k$ on a que $a_n \in \tilde{\tau}_n \subset \tilde{\tau}_k$ donc $a \in \overline{\tilde{\tau}_k} = \tilde{\tau}_k$ puisque $\tilde{\tau}_k$ est un triangle plein donc est fermé par la question B.1.c). Ainsi $a \in \bigcap_{k \geq 1} \tilde{\tau}_k$.

Soit désormais $b \in \bigcap_{k \geq 1} \tilde{\tau}_k$. Alors $(a, b) \in \tilde{\tau}_n$ donc $|a - b| \leq d_n$ pour tout entier n donc $a = b$.

Ainsi $\bigcap_{k \geq 1} \tilde{\tau}_k$ est bien réduit à un seul point appartenant à τ . $\square$

Partie II. Construction de l'application f .

1) $f_0(x) = 2x - 1$ de manière immédiate. $\square$

2) Soit $g \in \mathcal{E}$. Il vient :

• $Tg(0) = \phi_0(g(0)) = \phi_0(-1) = -1$ et $Tg(1) = \phi_1(g(1)) = \phi_1(1) = 1$

• Par composition d'applications continues, les restrictions de Tg à $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et à $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ sont continues.

En outre $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} Tg(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \phi_1(g(2h)) = \phi_1(g(0)) = \phi_1(-1) = i$ et $Tg(\frac{1}{2}) = \phi_0(g(1)) = \phi_0(1) = i$

ce qui prouve que Tg est bien continue en $\frac{1}{2}$ et donc sur $[0, 1]$.

• En conclusion $Tg \in \mathcal{E}$ pour tout $g \in \mathcal{E}$. $\square$

3) Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a $|Tg_2(x) - Tg_1(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|g_2(2x) - g_1(2x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|g_2(2x) - g_1(2x)|$.

Donc $\sup_{x \in [0, 1/2]} |Tg_2(x) - Tg_1(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$ puisque $2x$ parcourt $[0, 1]$ lorsque x parcourt $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

De même $\sup_{x \in [1/2, 1]} |Tg_2(x) - Tg_1(x)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|_\infty$ car $2x - 1$ parcourt $[0, 1]$ lorsque x parcourt $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ainsi $\|Tg_2 - Tg_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|g_2 - g_1\|$. $\square$

4.a) Pour n et p entiers positifs quelconques, on a compte tenu de ce qui précède :

$$\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|f_p - f_0\|_\infty \text{ et}$$

$$\|f_p - f_0\|_\infty \leq \|f_p - f_{p-1}\|_\infty + \dots + \|f_1 - f_0\|_\infty \leq \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-1} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{p-2} + \dots + 1\right) \|f_1 - f_0\|_\infty$$

$$\text{donc } \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \frac{1 - (1/\sqrt{2})^p}{1 - (1/\sqrt{2})} \times \|f_1 - f_0\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \times \|f_1 - f_0\|_\infty = \varepsilon_n$$

où ε_n est une quantité indépendante de p et tendant vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Cela prouve que la suite (f_n) satisfait au critère de Cauchy de convergence uniforme et donc converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f .

En outre comme les fonctions f_n sont des éléments de $\mathcal{E}$, les fonctions f_n sont continues donc f également par théorème de récupération uniforme de la continuité. Par ailleurs $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = -1$ car $f_n(0) = -1$ pour tout entier n et de même $f(1) = 1$.

En conclusion la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction $f \in \mathcal{E}$. $\square$

- 4.b)** D'après la question II.3), T est une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même lipschitzienne donc continue pour la norme uniforme sur $[0, 1]$.

Comme la suite (f_n) converge pour cette norme vers f , il en découle que Tf_n converge vers Tf .

En passant à la limite (uniforme) dans $Tf_n = f_{n+1}$ il vient donc $Tf = f$. $\square$

- 4.c)** On établit par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n : \langle f_n(x) = \overline{-f_n(1-x)} \quad \forall x \in [0, 1] \rangle$
On commence par remarquer que par symétrie de la relation par rapport à $\frac{1}{2}$, il suffit de la vérifier pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$\mathcal{H}_0$ est vraie car $f_0(x) = 2x - 1$.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n . Il vient alors pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} -f_{n+1}(1-x) &= -Tf_n(1-x) = -\phi_1\left(f_n(2(1-x)-1)\right) = -\phi_1\left(f_n(1-2x)\right) = -\frac{1-i}{2} \overline{f_n(1-2x)} - \frac{1+i}{2} \\ &= \frac{1-i}{2} f_n(2x) - \frac{1+i}{2} \text{ par hypothèse de récurrence. Donc} \\ -\overline{f_{n+1}(1-x)} &= \frac{1+i}{2} \overline{f_n(2x)} + \frac{-1+i}{2} = \phi_0\left(f_n(2x)\right) = Tf_n(x) = f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Ainsi la propriété $\mathcal{H}_n$ est bien établie pour tout entier n et par passage à la limite simple on obtient bien :

$$f(x) = -\overline{f(1-x)} \quad \forall x \in [0, 1]. \quad \square$$

Soit γ l'arc paramétré $t \mapsto f(t)$ pour $t \in [0, 1]$. La partie correspondant à $t \geq 1/2$ se déduit de la partie $t \leq 1/2$ par réflexion par rapport à l'axe des y . $\square$

Partie III. Propriétés de f .

III.A - Image de f

- A.1.a)** Immédiat car $0 \leq \frac{r_n}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$. $\square$

- A.1.b)** On prouve la relation demandée par récurrence sur p .

- Pour $p = 1$ on a $x_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_{n+1}}{2^{n+1}} = 2\left(x - \frac{r_1}{2}\right) = 2x - r_1$.

Or si $r_1 = 1$ on a nécessairement $x \geq 1/2$ de sorte que $\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_1(f(2x-1)) \stackrel{\text{DEF}}{=} Tf(x) = f(x)$ (Cf II.4.b)

De même si $r_1 = 0$ alors $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$ et $\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_0(f(2x)) \stackrel{\text{DEF}}{=} Tf(x) = f(x)$

La relation est ainsi établie pour $p = 1$.

- Supposons la relation établie jusqu'au rang $p-1$ avec $p \geq 2$.

On établit facilement comme ci-dessus que $x_p = 2x_{p-1} - r_p$ et que si $r_p = 1$ (resp. $r_p = 0$) alors $x_{p-1} \geq 1/2$ (resp. $\leq 1/2$) donc que (dans les 2 cas) $\phi_{r_p}(f(x_p)) = Tf(x_{p-1}) = f(x_{p-1})$ donc :

$$\phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \dots \phi_{r_p}(f(x_p)) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \dots \phi_{r_{p-1}}(f(x_{p-1})) = f(x) \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

- La relation proposée est donc bien établie pour tout entier $p \geq 1$. $\square$

- A.2.a)** Par définition de la partie entière on a $2^n x - 1 < [2^n x] \leq 2^n x$ et $2(2^{n-1}x - 1) < 2[2^{n-1}x] \leq 2^n x$ donc $-1 < [2^n x] - 2[2^{n-1}x] < 2$ et ainsi $[2^n x] - 2[2^{n-1}x] \in \{0, 1\}$ puisqu'il s'agit d'un entier. $\square$

- A.2.b)** Il vient $\frac{r_n(x)}{2^n} = \frac{[2^n x]}{2^n} - \frac{[2^{n-1}x]}{2^{n-1}}$ pour $n \geq 1$ donc par télescopage :

$$\sum_{n=1}^N \frac{r_n(x)}{2^n} = \frac{[2^N x]}{2^N} - \frac{[x]}{2} = \frac{[2^N x]}{2^N} \text{ car } x \in [0, 1[\quad \square$$

$$\text{Or } \frac{2^N x - 1}{2^N} \leq \frac{[2^N x]}{2^N} \leq \frac{2^N x}{2^N} \text{ donc par le principe des gendarmes } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{[2^N x]}{2^N} = x.$$

$$\text{En d'autres termes } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n(x)}{2^n} = x \quad \forall x \in [0, 1[\quad \square$$

A.2.c) Soit $x = \frac{k}{2^N} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ avec $2 \nmid k = 1$.

Pour $n > N$ on a que $2^n x$ et $2^{n-1}x$ sont deux entiers donc $r_n(x) = \lfloor 2^n x \rfloor - 2 \lfloor 2^{n-1} x \rfloor = 0 \quad \square$

A.2.d)• Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $r_1(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \geq 2$. En d'autres termes $x_1 = 0$ donc par la question III.A.1.b), il vient $f\left(\frac{1}{2}\right) = \phi_1(f(0)) = \phi_1(-1) = i \quad \square$

• Pour $x = \frac{1}{4}$ on a $r_1(x) = 0$, $r_2(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \geq 3$. Donc $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 0$ d'où:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \phi_0 \circ \phi_1(f(0)) = \phi_0 \circ \phi_1(-1) = \phi_0(i) = 0 \quad \square$$

• Avec les notations de I.A.3.c), on a $\phi_0 = h_0 \circ s_0 = s_0 \circ h_0$ donc $\phi_0 \circ \phi_0 = h_0 \circ h_0$ c'est à dire c'est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\frac{1}{2}$.

Soit désormais $x = \frac{1}{2^k}$ avec $k \geq 3$. Il vient $r_k(x) = 1$ et $r_n(x) = 0$ pour $n \neq k$ de sorte que $x_k = 0$, $x_{k-1} = \frac{1}{2}$,

$$x_{k-2} = \frac{1}{2} \dots \text{et } x_1 = \frac{1}{2^{k-1}}. \text{ Donc } f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \dots \circ \phi_0}_{k-1 \text{ fois}} \circ \phi_1(f(0)) = \underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \dots \circ \phi_0}_{k-1 \text{ fois}}(i)$$

Si k est impair il en découle que $f\left(\frac{1}{2^k}\right) = -1 + \frac{i+1}{2^{(k-1)/2}}$ puisque $\underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \dots \circ \phi_0}_{k-1 \text{ fois}}$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)/2}$.

$$\text{Si } k \text{ est pair on a } f\left(\frac{1}{2^k}\right) = \underbrace{\phi_0 \circ \phi_0 \circ \dots \circ \phi_0}_{k-2 \text{ fois}}(0) = -1 + \frac{1}{2^{(k-2)/2}}$$

$$\text{En conclusion } f\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = -1 + \frac{1}{2^{2n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\right) = -1 + \frac{i+1}{2^{2n}} \quad \forall n \geq 0 \quad \square$$

A.3.a) Si $x \in]0, 1[\cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ on sait qu'il existe $N \geq 1$ tel que $r_n(x) = 0$ pour $n > N$ de sorte que (question III.A.1.b)

$$f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(f(0)) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_N}(-1)$$

et comme τ est stable par chaque ϕ_{r_i} on a bien que $f(x) \in \tau$.

C'est naturellement encore vrai si $x = 0$ ou $x = 1$ (car $f \in \mathcal{E}$) et ainsi $f\left([0, 1] \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right) \subset \tau \quad \square$

A.3.b) Soit $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n}$ son développement binaire (question III.A.2.b). Alors $\left(\sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n}\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ qui converge vers x . Donc par continuité de f la suite $\left(f\left(\sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n}\right)\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Or cette suite est une suite d'éléments de τ par la question précédente et donc sa limite $f(x)$ également puisque τ est un fermé. En conclusion finale $f([0, 1]) \subset \tau \quad \square$

A.4.a) ϕ_0 (resp. ϕ_1) est une bijection de τ sur τ_0 (resp. τ_1). En effet ce sont deux bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $\phi_i(\tau) = \tau_i$ comme déjà noté. Donc si $z_{n-1} \in \tau_0$ alors $z_n = \phi_0^{-1}(z_{n-1})$ est parfaitement défini et appartient bien à τ . De même si $z_{n-1} \notin \tau_0$ alors $z_{n-1} \in \tau_1$ (car $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$ comme déjà vu) et donc $z_n = \phi_1^{-1}(z_{n-1})$ est bien défini et appartient à τ .

Ainsi les suites (r_n) et (z_n) sont définies (de manière unique) par itération et $z_n \in \tau$ pour tout entier n . $\square$

A.4.b) Par construction de la suite (z_n) et de la suite (r_n) on a $z = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(z_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Par ailleurs avec les notations du III.a.1.b) on a $f(x) = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}(f(x_n))$.

Il en découle que $f(x)$ et z appartiennent tous deux à $\bigcap_{n \geq 1} \tilde{\tau}_n$ donc $f(x) = z$ par la question I.B.3). $\square$

A.4.c) Comme un antécédent de z est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{2^n}$, il suffit de calculer $\sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2^n}$ avec N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \varepsilon$

D'où l'algorithme suivant :

```

prec <- 1/2
X <- 0
Z <- z
Tant que (prec > epsilon) faire
  Si (Re(Z) <= 0)
    alors Z <- (1+I)*(conjugué(z)+(1+I)/2)
    sinon Z <- (1-I)*(conjugué(z)+(-1+I)/2)
    X <- X+prec
  Fin si
  prec <- prec/2
Fin tant que
-> X

```

A.5.a) On a vu que $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ donc $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\bar{0} = 0 = f\left(\frac{1}{4}\right)$ ce qui prouve que f n'est pas injective. $\square$

A.5.b) Supposons qu'il existe une bijection continue g de $J = [0, 1]$ sur τ .

- Alors g^{-1} est une application continue de τ sur J .

En effet supposons g^{-1} non continue. Alors il existe $z_0 \in \tau$, une suite $(z_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de τ et un réel $\alpha > 0$ tels que la suite (z_n) converge vers z_0 et $|g^{-1}(z_n) - g^{-1}(z_0)| \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$. Notons $x_n = g^{-1}(z_n)$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ en tant que suite du compact J admet une suite extraite (y_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$ qui converge vers un élément noté y_0 de J . Or comme g est continue sur J donc en y_0 on a que la suite $(g(y_n))$ converge vers $g(y_0)$. Mais par ailleurs $g(y_n) = g(g^{-1}(z_{\varphi(n)})) = z_{\varphi(n)}$ converge vers z_0 en tant que suite extraite de la suite (z_n) qui converge vers z_0 . Il en découle que $g(y_0) = z_0$ donc que $y_0 = g^{-1}(z_0)$.

Mais alors $|y_n - y_0| = |g^{-1}(z_{\varphi(n)}) - g^{-1}(z_0)| \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$ ce qui en contradiction avec le fait que la suite (y_n) converge vers y_0 .

- Il existe au moins un sommet de τ que nous noterons a différent de $g(0)$ et de $g(1)$ en d'autres termes tel que $g^{-1}(a) = s \in]0, 1[$. La restriction h de g^{-1} à $\tau' = \tau \setminus \{a\}$ est continue sur τ' (en tant que restriction de l'application continue g^{-1}) et τ' est encore convexe donc a fortiori connexe par arcs. Or $h(\tau') = J \setminus \{s\}$ non connexe par arcs puisque $s \in \overset{\circ}{J}$. Ce qui fournit la contradiction finale. $\square$

A.6.a) On a déjà noté géométriquement (grâce à la question I.A.3.c) que $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\frac{1}{2}$ donc s'écrit $z \mapsto \frac{1}{2}(z - 1)$.

On prouve exactement de même que $\phi_1 \circ \phi_1$ est l'homothétie de centre 1 et de rapport $\frac{1}{2}$ qui s'écrit $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1)$.

Il vient par un calcul immédiat que $\phi_0 \circ \phi_1(z) = \frac{i}{2}(z + 1)$. Donc $a = \frac{-1 + 2i}{5}$ est point fixe et il s'agit de la similitude directe de centre a , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

De même $\phi_1 \circ \phi_0(z) = -\frac{i}{2}(z - 1)$ et il s'agit de la similitude directe de centre $b = \frac{1 + 2i}{2}$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. $\square$

A.6.b) Première démonstration :

ϕ_0 et ϕ_1 sont des applications affines dont l'application linéaire associée multiplie les normes par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc l'application linéaire associée à ϕ les multiplie par $\frac{1}{(\sqrt{2})^p}$. Il en découle que 1 n'est pas valeur propre donc classiquement ϕ admet un point fixe et un seul. $\square$

Deuxième démonstration :

ϕ est une application contractante de $\mathbb{C}$ dans lui-même et $\mathbb{C}$ est complet. D'où la conclusion par le théorème du point fixe. $\square$

A.6.c) Soit x le réel de développement dyadique périodique $0, r_1 r_2 \dots r_p r_1 r_2 \dots r_p r_1 r_2 \dots r_p \dots$

Alors $x = x_p$ et la relation fondamentale du III.A.1.b) s'écrit $f(x) = \phi(f(x))$ ce qui prouve que $f(x)$ est un (donc le) point fixe de ϕ . $\square$

A.6.d) Soit $z_0 \in \tau$, $\varepsilon > 0$ donné quelconque et $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = z_0$ (licite puisque on a vu que f est surjective de $[0, 1]$ sur τ)
 Comme f est continue il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$ (et $x \in [0, 1]$) implique $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
 Soient alors $0, r_1 r_2 \dots r_n \dots$ le développement dyadique de x_0 , p tel que $\frac{1}{2^p} \leq \alpha$ et x le réel de développement dyadique périodique $x = 0, r_1 r_2 \dots r_p r_1 r_2 \dots r_p r_1 r_2 \dots r_p \dots$
 Alors $f(x)$ est point fixe de $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_p$ et $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - z_0| \leq \varepsilon$ $\square$

III.B - Dérivabilité de f

B.1) Supposons f dérivable en $x \in [0, 1]$ (pas forcément sur $[0, 1]$). Alors elle y admet un développement limité à l'ordre 1 qui s'écrit $f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + (y - x)\varepsilon(y - x)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

$$\text{Donc } \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) + \varepsilon'_n \text{ avec } \varepsilon'_n = \frac{(\beta_n - x)\varepsilon(\beta_n - x) - (\alpha_n - x)\varepsilon(\alpha_n - x)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Notons $\tilde{\varepsilon}_n = \max(|\varepsilon(\beta_n - x)|, |\varepsilon(\alpha_n - x)|)$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\varepsilon}_n = 0$ et :

$$|\varepsilon'_n| \leq \frac{(\beta_n - x)\tilde{\varepsilon}_n + (x - \alpha_n)\tilde{\varepsilon}_n}{\beta_n - \alpha_n} \text{ (car } \alpha_n \leq x \leq \beta_n) \text{ donc } |\varepsilon'_n| \leq \tilde{\varepsilon}_n \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon'_n = 0. \quad \square$$

B.2.a) Soit $x \in [0, 1[$ de développement dyadique $x = 0, r_1 r_2 \dots r_n \dots$. On envisage les 2 suites (α_n) et (β_n) de développements dyadiques $\alpha_n = 0, r_1 r_2 \dots r_n 000 \dots$ et $\beta_n = 0, r_1 r_2 \dots r_n 111 \dots$ de sorte que l'on se trouve bien dans les conditions de la question précédente ($\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ et $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}$).

Notons $\phi = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \dots \circ \phi_{r_n}$.

La relation fondamentale III.A.1.b) fournit $f(\alpha_n) = \phi(f(0)) = \phi(-1)$ et $f(\beta_n) = \phi(f(1)) = \phi(1)$

Ainsi $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = 2^n (\phi(1) - \phi(-1))$ dont le module tend vers $+\infty$ car ϕ est une bijection affine donc en particulier est injective donc $\phi(1) - \phi(-1) \neq 0$.

La question précédente montre alors que f n'est pas dérivable en x . $\square$

B.2.b) Si f était dérivable (à gauche) en 1, en vertu de la relation $f(x) = -\overline{f(1-x)}$, elle serait dérivable (à droite) en 0 ce qui n'est pas par la question précédente. $\square$

————— FIN —————