MINES ET PONTS PC II 2001

BOURSE D'ECHANGES UPS

May 27, 2001

1 PREMIÈRE PARTIE

$$E_\lambda \ : xy" + (1-x)y' - \lambda y = 0$$

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

1.1 Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle

1.1.1

f_λ solution de $E_\lambda \Leftrightarrow x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \lambda(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) = O \ \forall x \in]-R, R[$. l'identification terme à terme , par unicité du développement en série entière de la fonction nulle conduit à:

$$a_1 = \lambda \ , \ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad a_{p+1} = \frac{p+\lambda}{(p+1)^2} a_p \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda + k)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= exp(x) \quad \text{avec} \quad R_1 = +\infty \\ f_0(x) &= 1 \quad \text{avec} \quad R_0 = +\infty \\ f_{-1}(x) &= 1 - x \quad \text{avec} \quad R_{-1} = +\infty \\ f_{-2}(x) &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \quad \text{avec} \quad R_{-2} = +\infty \end{aligned}$$

1.1.2

Un polynôme est une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini .
$f_\lambda \quad polyn\check{o}me \Leftrightarrow \exists N / \forall n \geq N \quad a_n = O \Leftrightarrow -\lambda \in \mathbb{N}$. Avec $\lambda = -p$, $p \in \mathbb{N}$ $\quad f_\lambda$ est de degré p de coefficient dominant : $a_p = \frac{(-1)^p}{p!}$

1.1.3

Lorsque $-\lambda$ n'est pas entier , les a_n $n \in \mathbb{N}^*$ sont tous non nuls ce qui permet d'appliquer la règle de d'Alembert qui donne $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x|}{|a_n|} = 0$ donc $R = +\infty$.
Conclusion : Dans tous les cas f_λ est la seule solution developpable en série entière sur $\mathbb{R}$ de E_λ valant 1 en 0 . (Les solutions développables en série entière sont en fait des multiples des f_λ) .

1.2 Solution de l'équation différentielle E_1 :

1.2.1

La notation f_1 de l'énoncé est incorrecte , sans rapport avec la notation introduite . Je noterai donc g_+ et g_- les solutions générales sur $\mathbb{R}^{*+}$, $\mathbb{R}^{*-}$.
Sur $\mathbb{R}^{*+}$ (comme sur $\mathbb{R}^{*-}$) , E_λ est une équation diférentiellle linéaire du second ordre résolue en y" à coefficients continus . Le théorème de Cauchy (version linéaire) permet d'affirmer que l'ensemble des $\mathbb{R}^{*+}$ solutions est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2 . Comme dans ce cas $\lambda = 1$ f_1 est une solution ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^{*+}$, il est possible d'appliquer la méthode dite parfois de "variation de la constante ". (solution de la forme $g(x) = \eta(x)f_1(x))$ .Le calcule amène à une équation diffrentielle linéaire d'ordre 1 satisfaite par η' . Ce qui conduit à la forme de la solution générale sur $\mathbb{R}^{*+}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad g_+(x) = exp(x)\left(\beta \int_1^x \frac{exp(-t)}{t} dt + \gamma\right) \quad (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2.$$

1.2.2

Le même théorème s'applique et les mêmes calculs (choix de la borne pour l'intégrale pour travailler dans un domaine de continuité) conduisent à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*-} \quad g_+(x) = exp(x)\left(\mu \int_1^x \frac{exp(-t)}{t} dt + \nu\right) \quad (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2.$$

1.2.3

Si Φ est une R solution , elle coincide sur $\mathbb{R}^{*+}$ avec une solution g_+ et sur $\mathbb{R}^{*-}$ avec une solution g_-.La continuité en 0 de Φ et la non intégrabilité de la fonction de signe constant (sur les deux intervallles considérés) $t \mapsto \frac{exp(t)}{t}$ amène à la seule possibilité :$\beta = \mu = 0 \quad et \quad \gamma = \nu = \delta$. Réciproquement cela conduit à $\Phi = \delta F_1$ qui est une R solution de classe C^2 .
Conclusion : Φ $\mathbb{R}$ solution $\Leftrightarrow$ $\Phi \in Vetc(f_1)$

1.3 Relation entre les fonctions f_λ :

$$g_\lambda(x) = exp(x) f_\lambda(-x)\ ,\ g_\lambda(0) = f_\lambda(0) = 1$$

1.3.1

Un calcul élémentaire amène à vérifier que g_λ est solution de :

$\forall x \in \mathbb{R}\ , xg"_\lambda(x) + (1-x)g'_\lambda(x) - (1-\lambda)g_\lambda(x) = -e^x \left((-x)f"_\lambda(-x) + (1-(-x))f'_\lambda(-x) - \lambda f_\lambda(-x)\right) =$

1.3.2

g est donc une $\mathbb{R}$ solution développable en série entière de $E_{1-\lambda}$ valant 1 en 0 .
Conclusion :D'après le résultat admis en fin I1

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 \quad g_\lambda(x) = exp(x) f_\lambda(-x) = f_{1-\lambda}(x)$$

1.3.3

On en déduit que :$\forall p \in N^*\ \forall t \in \mathbb{R} f_p(t) = exp(t) f_{(1-p)}(t)$ avec $f_{(1-p)}$ qui est un polynôme . Cela conduit à :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2(x) = exp(x)(x)\ ,\ et \quad f_3(x) = expx(\frac{x^2}{2} + 2x + 1)$$

1.3.4

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{f_{p+1}(x)}{x f_p(x)} = \frac{f_{-p}(x)}{x f_{(1-p)}(-x)} \sim \frac{1}{p} \quad \text{en} + \infty$$

1.4 Application à une équation aux dérivées partielles :

En utilisant la donnée $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r)$ le calcul donne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{r^{3/2}} f'_\lambda(r) - \frac{x}{2r^{5/2}} f_\lambda(r)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{x^2}{r^{5/2}} f"_\lambda(r) + \frac{1}{r^{3/2}} f'_\lambda(r) - \frac{3x^2}{2r^{7/2}} f'_\lambda(r) - \frac{1}{2r^{5/2}} f_\lambda(r) + \frac{5}{4r^{9/2}} f_\lambda(r) - \frac{x^2}{r^{7/2}} f'_\lambda(r)$$

Par symétrie du rôle des variables , la somme des dérvées partielles en x,y,z conduit à :

$$\Delta F - \frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2} F = \frac{1}{r\sqrt{r}} \left(r f"_\lambda(r) + (1-r) f'_\lambda(r) + f_\lambda(r)\right) = O.$$

Par suite en choisissant $\lambda = -1$, F est une solution de (P) sur Ω .

2 SECONDE PARTIE

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} exp(x\sin^2 t)dt \quad , \quad I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} tdt$$

2.1 Détermination de l'intégrale I_p :

Une intégration par partie donne $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p$, $\quad I_0 = \pi/2$ d'où :

$$I_p = \frac{1}{2^p} C_{2p}^p \pi/2$$

2.2 Relation entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

2.2.1

φ est l'intégrale à paramètre sur le segment $[0, \pi/2])$ de la fonction h avec :

$$h\ [0, \pi/2] \star \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (t, x) \mapsto h(t, x) = exp(x\sin^2 t)$$

qui est de classe C^∞ . Par suite φ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ avec dérivation sous le signe intégrale .

2.2.2

Le rayon de convergence de la série entière définissant la fonction exponentielle , pour tout réel x fixé :

$$\forall t \in [0, \pi/2] \quad exp(x\sin^2 t) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t) \quad \text{avec} \quad v_k(t) = \frac{1}{k!} x^k \sin^{2k}(t)$$

avec $\forall t \in [0, \pi/2] \quad | v_k(t) | \leq \frac{|x|^k}{k!}$. Donc la série de fonctions $[v_k]$ converge uniformément sur le segment $[0, \pi/2]$. Par suite

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{K=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} I_p \frac{x^p}{p!}.$$

Ceci prouve que φ est dévelopable en série entière sur $\mathbb{R}$, et , les calculs antérieurs pour f_λ avec $\lambda = 1/2$ prouvent que : $\varphi = \frac{\pi}{2} f_{1/2}$.
(*on peut vérifier avec la valeur de* $\varphi(0)$ *).*

2.3 Encadrement de $\varphi(x)$:

2.3.1

L'étude des variations de $]-\infty, 1[, \quad u \mapsto (1-u)exp(u)$ donne aisément le résultat .
(On peut aussi prouver $1 - u \leq exp(-u)$ *en invoquant la convexité de la fonction* $u \mapsto exp(-u)$ *).*

2.3.2

L'intégrale proposée avec $x < 1$ est une intégrale simple.

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin^2(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{d(cotan(t)}{1 - x + cotan^2(t)} dt = \frac{\pi/2}{\sqrt{1-x}}$$

2.3.3

Pour tout $x < 1$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-x\sin^2(t)}$ définissant φ est continue,positive et majoré grâce au 3.1) ,donc :

$$O \leq \varphi(x) \leq J(x) = \frac{\pi/2}{\sqrt{1-x}}$$

2.3.4

Pour tout $x \leq -1$ on peut écrire $x = -a^2$ avec $a \geq 1$. Ce qui conduit à :

$$\sqrt{-x}\varphi(x) = a\varphi(-a^2) = a\int_O^{\pi/2} exp(-a^2\sin^2(t))dt$$

$$\sqrt{-x}\varphi(x) \geq a\int_O^{\pi/2} exp(-a^2\sin^2(t))\cos t dt = \int_0^a exp(-u^2)du$$

$$\sqrt{-x}\varphi(x) \geq \int_0^1 exp(-u^2)du = A > 0$$

.

2.3.5

$f_{1/2} = \frac{2}{\pi}\varphi$, donc par l'encadrement du 3.3 , et le théorème d'encadrement pour les limites $\lim_{x\to-\infty} f_{1/2}(x) = 0$..
La fonction $f_{1/2}$ est continue , positive sur $]-\infty, -1[$ minorée par $x \mapsto \frac{2A}{\pi\sqrt{-x}} \geq 0$ qui n'est pas intégrable en $-\infty$.
Donc $f_{1/2}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, -1[$.

2.4 Étude d'une fonction h :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a \mapsto h(x) = exp(-x/2)f_{1/2}(x)$$

2.4.1

En utilisant le I.3.b $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(-x) = exp(x/2)f_{1/2}(-x) = exp(x/2)\left[exp(-x)f_{1/2}(x)\right] = h(x)$ et h est paire .

2.4.2

On vérifie que : $\frac{\pi}{2}h(x) = exp(-x/2)\int_0^{\pi/2} exp(x\sin^2 t)dt = exp(-x/2)\int_0^{\pi/2} exp(x\sin^2 t)dt$. Et par suite :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}h(x) &= \frac{\pi}{4}(h(x)+h(-x)\\
&= 1/2\int_0^{\infty/2}(exp(x(\sin^2 t-1/2))+exp(x(1/2-\cos^2 t))dt\\
&= 1/2\int_0^{\infty/2} 2exp(\frac{x(\sin^2 t-cos^2 t)}{2})dt\\
&= \int_O^{\pi/4} exp(-\frac{x\cos(2t)}{2})dt+\int_{\pi/4}^{\pi/2} exp(-\frac{x\cos(2t)}{2})dt\\
&= \int_O^{\pi/2} exp(-\frac{x\cos(u)}{2})\frac{du}{2}-\int_0^{\pi/2} exp(-\frac{x\cos(v)}{2})\frac{dv}{2}\\
&= \int_O^{\pi/2} ch(\frac{x\cos(t)}{2})dt
\end{aligned}$$

2.4.3

$\forall x>0 \quad \forall t\in[0,\pi/4] \quad ch(\frac{x\cos t}{2} \geq ch(\frac{x\sqrt{2}}{4})$.
D'où $h(x) \geq \int_0^{\pi/4} ch(\frac{x\cos(t)}{2})dt \geq \frac{\pi}{4}ch(\frac{x\sqrt{2}}{4})$ et

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x} = +\infty$$

2.4.4

h est définie sur $\mathbb{R}$, paire de classe C^1 comme intégrale à paramètre sur un segment d'une fonction de deux variables dans $C^1(\mathbb{R})$ avec

$$h'(x) = \int_O^{\pi/2} sh(\frac{x\cos(t)}{2})\frac{\cos(t)}{2}dt > 0.$$

On en déduit les variations et le graphe avec le comportement en $+\infty$ donné par la question précédente .

FIN PJ Mines et Ponts PC II 2001