

E 3A 2005 - Mathématiques A PSI

Corrigé

Préliminaire

$u \in L(E)$ de matrice $U = (u_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ base B , U non inversible.

1. U et u sont de même rang. u est non inversible, donc non injective et il existe un élément x non nul dans $\ker u$ qui vérifie donc $u(x) = 0$.

2. Soit alors $x = (x_1, \dots, x_n)$ vecteur non nul de $\ker u$. Il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_i|$. La $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(x)$ dans B est $\sum_{j=1}^n u_{i,j}x_j$.

Comme $u(x) = 0$, on a en particulier : $-u_{i,i}x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n u_{i,j}x_j$.

$$\text{Et donc : } |u_{i,i}| \times \|x\|_\infty = |u_{i,i}| \times |x_i| = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n u_{i,j} \times x_j \right| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}| \times |x_j|.$$

3. Pour tout j , $|x_j| \leq \|x\|_\infty$, donc $|u_{i,i}|\|x\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}|\|x\|_\infty$ et comme $\|x\|_\infty \neq 0$

on a bien trouvé i tel que : $|u_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |u_{i,j}|$.

4. Comme $4 > 1$ et $4 > 3$, la condition précédente n'est pas réalisée pour la

matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Elle est donc inversible. (matrice à diagonale strictement dominante).

Partie 1.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = (m_{i,j})$ où :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad m_{i,j} = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Question 1

- 1.1 M est une matrice symétrique réelle, ses valeurs propres M sont réelles et elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On pose : $M = -2I_n + T$, avec g l'endomorphisme de E associé à la matrice $T = (t_{i,j})$. On a : $g = f + 2e$.

- 1.2 $\lambda \in sp(f) \Leftrightarrow f - \lambda e$ non inversible $\Leftrightarrow g - (\lambda + 2)e$ non inversible $\Leftrightarrow (\lambda + 2) \in sp(g)$.
Comme $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow g(x) = (\lambda + 2)x$, on a $Ker(f - \lambda e) = Ker(g - (\lambda + 2)e)$.

Question 2

- 2.1 Soit $\mu \in sp(T)$. La matrice $T - \mu I_n$ est non inversible. D'après la question 3

du préliminaire, il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|t_{i,i} - \mu| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |t_{i,j}|$.

(Les éléments de $T - \mu I_n$ sont ceux de T sauf les éléments diagonaux égaux à $t_{i,i} - \mu$).

- 2.2 Les éléments $t_{i,i}$ diagonaux de T sont tous nuls, et dans chaque ligne de T tous les éléments sont nuls sauf un ou deux égaux à 1.

Pour le i déterminé dans la question 2.1, on a donc $|\mu| \leq 2$ ou 1 donc $|\mu| \leq 2$.

La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ réalise une bijection strictement décroissante de cet intervalle dans $[-1, 1]$. Comme $\mu/2 \in [-1, 1]$, il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\mu = 2 \cos \alpha$.

Question 3

La question consiste à rechercher un $\alpha \in [0, \pi]$ et une suite complexe

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ telle que : } \begin{cases} x_0 = 0 \text{ et } x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k-1} - 2x_k \cos \alpha + x_{k+1} = 0 \end{cases}$$

- 3.1 Le vecteur représenté dans la base B par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de

T pour la valeur propre $\mu = 2 \cos \alpha$ si et seulement si il est non nul et vérifie $TX = \mu X$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} -\mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_{k-1} - \mu x_k + x_{k+1} = 0 \text{ pour tout entier } k \text{ de } \{2, \dots, n-1\} \\ x_{n-1} - \mu x_n = 0 \end{cases}$$

En imposant les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ on a l'équivalence :

$$TX = \mu X \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_{k-1} - \mu x_k + x_{k+1} = 0$$

On est donc amené à déterminer des suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

3.2 Si $\alpha = 0, \mu = 2$.

Le polynôme caractéristique de la relation est $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Les suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ solution sont définies par :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall k \in \mathbb{N}, x_k = (ak + b) \times 1^k = ak + b$$

$$\text{Mais } x_0 = x_{n+1} = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{et} \quad a(n+1) + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

D'où $TX = 2X \Rightarrow X = (x_1, \dots, x_n) = (0)$. On ne peut donc trouver de vecteur propre associé à $\mu = 2$.

De même si $\alpha = \pi, \mu = -2$.

Le polynôme caractéristique de la relation est $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$.

Les suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ solution sont définies par :

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall k \in \mathbb{N}, x_k = (ak + b) \times (-1)^k$$

$$\text{Mais } x_0 = x_{n+1} = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{et} \quad a(n+1) + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

D'où $TX = 2X \Rightarrow X = (x_1, \dots, x_n) = (0)$. On ne peut donc trouver de vecteur propre associé à $\mu = -2$.

Par suite $\alpha \in]0, \pi[$.

3.3 Soit donc $\alpha \in]0, \pi[$.

Le polynôme caractéristique de la relation est $X^2 - 2 \cos \alpha X + 1$, de discriminant $\Delta = 4 \cos^2 \alpha - 4 = -4 \sin^2 \alpha = (2i \sin \alpha)^2$

$$\text{Les racines sont donc } \frac{2 \cos \alpha - 2i \sin \alpha}{2} = e^{-i\alpha} \text{ et } \frac{2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha}{2} = e^{i\alpha}$$

Les suites complexes $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ solution de la relation de récurrence sont définies par : $\exists(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 / \forall k \in \mathbb{N}, x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}$.

Un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ solution de $g(x) = 2 \cos \alpha x$ vérifie $TX = 2 \cos \alpha X$.

Il existe donc deux éléments de $\mathbb{C}$, c_1, c_2 tels que :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}$$

3.4 En utilisant les notations précédentes, $x_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$ et

$$x_{n+1} = 0 \Rightarrow c_1 e^{i(n+1)\alpha} + c_2 e^{-i(n+1)\alpha} = 0$$

$$\text{On obtient } c_1(e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}) = 0 = 2ic_1 \sin(n+1)\alpha.$$

Si $\sin(n+1)\alpha \neq 0$ on a $c_1 = c_2 = 0$ et le seul vecteur qui vérifie $TX = 2 \cos \alpha X$ est le vecteur nul. Dans ce cas $2 \cos \alpha$ n'est pas valeur propre.

Les valeurs possibles pour α sont solution de $\sin(n+1)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{n+1}$;

$k \in \mathbb{Z}$. Comme $\alpha \in]0, \pi[$, les valeurs possibles sont $\alpha_j = \frac{j\pi}{n+1}$, $1 \leq j \leq n$.

3.5 Réciproquement, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, soit $\mu_j = 2 \cos(\alpha_j)$.

D'après ce qui précède la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0, x_1 = a \in \mathbb{R}^*$ et la relation, $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_{k-1} - \mu_j x_k + x_{k+1} = 0$, admet pour terme d'indice $n+1$ $x_{n+1} = 0$. Le vecteur $x = (a, x_2, \dots, x_n)$ est élément de E car les x_k sont tous réels et il est non-nul. D'après les questions précédentes il vérifie $g(x) = \mu_j x$ et donc μ_j est valeur propre de g (et donc de T). Comme la fonction $\cos$ est strictement monotone sur $]0, \pi[$, les μ_j sont n valeurs propres distinctes. Comme l'espace est de dimension n , g et T sont diagonalisables, les espaces propres sont tous de dimension 1.

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, une suite (x_k) vérifiant la relation de récurrence et les relations $x_0 = x_{n+1} = 0$ est du type : $\forall k \in \mathbb{N}, x_k = c_1 (e^{ik\alpha_j} - e^{-ik\alpha_j}) = 2ic_1 \sin(k\alpha_j)$.

Un vecteur propre de T attaché à la valeur propre $\alpha_j = 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right)$ est :

$$X_j = \begin{pmatrix} \sin \alpha_j \\ \sin 2\alpha_j \\ \vdots \\ \sin n\alpha_j \end{pmatrix} \text{ obtenu avec } c_1 = \frac{1}{2i} \text{ et } a = \sin \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \neq 0.$$

$(X_1, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de T .

Question 4 : Valeurs propres de M :

D'après la question 1.2, les valeurs propres de M sont les valeurs

$\lambda_j = -2 + \alpha_j = -2 + 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) = -4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}, 1 \leq j \leq n$, les sous-espaces propres associés sont ceux de la matrice T . Les E_{λ_j} sont tous de dimension 1.

Partie 2.

Pour tout réel r strictement positif, on considère les deux matrices :
 $H = 2I_n - rM$ et $K = 2I_n + rM$ où M désigne la matrice définie à la partie 1.

Question 1. : Quelques propriétés de la matrice H .

1.1 Soit P une matrice qui diagonalise T et M . On peut prendre par exemple P de colonnes $X_1, \dots, X_n$, matrice des vecteurs propres dans la base canonique. On a : $M = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M . On peut écrire : $H = 2I_n - rPDP^{-1} = P(2I_n - rD)P^{-1}$. La matrice $2I_n - rD$ est diagonale, H est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont égales à $2 + 4r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(n+1)} \right) > 0, 1 \leq j \leq n$.

1.2 Les valeurs propres de H sont toutes strictement positives. 0 n'est pas valeur propre et H est inversible.

Question 2.

Soit w l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice $W = H^{-1}K$.

2.1 Notons $\Delta = 2I_n - rD$. Cette matrice semblable à H est inversible et

$$H = P\Delta P^{-1} \Rightarrow H^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1}.$$

Comme $K = P(2I_n + rD)P^{-1}$, $W = P\Delta^{-1}DP^{-1}$. La matrice $\Delta^{-1}D$ est dia-

gonale, ses éléments diagonaux sont égaux à $\frac{2 - 4r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(n+1)} \right)}{2 + 4r \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(n+1)} \right)}$.

Les vecteurs propres sont ceux de g .

Question 3.

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $sp(S) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ son spectre et s l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice S .

3.1 s est un endomorphisme autoadjoint. s est diagonalisable et il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs propres de s attachés aux valeurs propres $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Pour x vecteur quelconque de E , $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$, on a : $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$,

$$s(x) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i \varepsilon_i \text{ et } (s(x)|x) = \sum_{i=1}^n \sigma_i x_i^2.$$

Notons $p = \min_{1 \leq i \leq n} \sigma_i$ et $q = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i$.

On a : $\forall x \in E, \quad p\|x\|^2 \leq (s(x)|x) \leq q\|x\|^2$.

3.2 On note : $N(S) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|s(x)\|$.

Si $x \in E$ est de norme 1, en l'écrivant dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, on a : $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$;

$$\text{et } \|x\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad s(x) = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i \varepsilon_i \text{ donc } \|s(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = M^2$$

où $M = \max_{1 \leq i \leq n} |\sigma_i|$.

Par suite $\sup_{\|x\| \leq 1} \|s(x)\| \leq M$.

Mais il existe un indice j pour lequel $|\sigma_j| = 1$. En prenant $x = \varepsilon_j$ vecteur de norme 1, $\|s(x)\| = M \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|s(x)\|$.

La double inégalité prouve que : $N(S) = \max_{1 \leq j \leq n} |\sigma_j|$.

Question 4

i) Dans la question 1.1 la matrice P qui diagonalise M peut être choisie orthogonale car M est symétrique réelle (il existe une base orthonormale de vecteurs propres).

On a alors : $W = P \Delta_1 P^{-1} = P \Delta_1^t P$, avec Δ_1 matrice diagonale.

$${}^t W = P^t \Delta_1 {}^t P = P \Delta_1^t P = W.$$

ii) Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. $1 - 2r \sin^2 \theta < 1 + 2r \sin^2 \theta$.

Comme $1 + 2r \sin^2 \theta > 0$, $\frac{1 - 2r \sin^2 \theta}{1 + 2r \sin^2 \theta} < 1$.

Mais $-1 - 2r \sin^2 \theta < 1 - 2r \sin^2 \theta$ donc $-1 < \frac{1 - 2r \sin^2 \theta}{1 + 2r \sin^2 \theta}$.

Les valeurs propres de W sont de cette forme donc $N(W) < 1$.

Question 5

N est une norme de $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à $\| - \|$. On vérifie facilement que pour des matrices A, B quelconques, $N(AB) \leq N(A)N(B)$. Donc $N(W^k) \leq (N(W))^k$.

La norme tend vers 0 et la suite tend donc vers la matrice nulle.

Fin du sujet.