Partie I

1°) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les fonctions continues en considérant q comme $q \times 1$:

$$\Big|\int_0^1 q(t)\,dt\Big|^2 \leq \int_0^1 q^2(t)\,dt \times \int_0^1 1\,dt \quad .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz est une égalité si et seulement si les deux fonctions sont proportionnelles, donc il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si q est une fonction constante sur $[0,1]$.

2°) L'inégalité précédente peut s'appliquer à $q = g'$ puisque g est supposée C^1 , et donne $\sqrt{E_1(g)} \geq |b-a|$. L'inégalité devient une égalité si et seulement si g' est constante, c'est-à-dire g affine : une seule fonction de $\mathcal{G}_{a,b}$ réalise donc le minimum $|b-a|$, c'est la fonction $g_0 : t \mapsto (1-t)a + tb$.

3°) On a par dérivation de fonctions composées : $(\psi \circ f)' = f'.(\psi' \circ f)$. Pour avoir l'égalité indiquée, il suffit donc de choisir ψ telle que $(\psi')^2 = \rho$. Comme ρ est supposée C^1 et strictement > 0 sur I , $\sqrt{\rho}$ est C^1 et > 0 également, et toute primitive de $\sqrt{\rho}$ sur I , qui existe, convient.

4°) On applique l'inégalité du **1)** :

$$E_\rho(f) = \int_0^1 \big((\psi \circ f)'(t)\big)^2\,dt \geq \Big(\int_0^1 (\psi \circ f)'(t)\,dt\Big)^2 = \big|\psi(b) - \psi(a)\big|^2 \qquad (1) \quad .$$

L'égalité est atteinte, on l'a vu, si et seulement si $(\psi \circ f)'$ est une fonction constante, soit si et seulement si $\psi \circ f$ est une fonction affine. Mais d'une part ψ' est strictement > 0 , donc ψ réalise un C^2-difféomorphisme de I sur $J = \psi(I)$ et peut être inversée de manière C^2 , d'autre part, on doit avoir $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Il s'ensuit que la seule fonction possible f réalisant l'égalité dans l'inégalité (1) ci-dessus est $f_{a,b} = \psi^{-1}\big((1-t)\psi(a) + t\psi(b)\big)$. (1) Montre alors que $|\psi(b) - \psi(a)|$ est bien un minimum pour l'ensemble des nombres $E_\rho(f)$ quand f parcourt $\mathcal{G}_{a,b}$, minimum qui est atteint pour la seule fonction $f_{a,b}$.

5°) On a déjà dit que par le théorème du difféomorphisme ψ^{-1} est de même classe C^2 que ψ . Donc l'expression de $f_{a,b}$ ci-dessus montre que $f_{a,b}$ est C^2 par composition.
De plus, on sait que $(\psi \circ f_{a,b})'$ est constante, et comme on peut dériver encore une fois, on a $(\psi \circ f_{a,b})'' = 0$. Le calcul de dérivation des fonctions composées traduit ceci par

$$0 = \big(f'_{a,b}.(\psi' \circ f_{a,b})\big)' = f'^2.(\psi'' \circ f) + f''.(\psi' \circ f) \quad .$$

Mais on sait de plus que $\psi' = \sqrt{\rho}$, d'où $\psi'' = \dfrac{\rho'}{2\sqrt{\rho}}$. En reportant et en multipliant par $2\sqrt{\rho}$, on obtient bien

$$\rho'(f).f'^2 + 2\rho(f).f'' = 0 \quad , \quad cqfd.$$

Partie II

1°) On prend $\varepsilon_0 = min(t_0, 1-t_0)$. Alors, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a que $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\subset]0,1[$. Comme, clairement, $h_{t_0,\varepsilon}$ est nulle en dehors de l'intervalle $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, on peut alors écrire, grâce au changement de variable affine $u = \dfrac{t-t_0}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}.f(t).\,dt &= \frac{1}{c_h\varepsilon}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h\Big(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\Big).f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{C_h\varepsilon}\int_{-1}^{1} h(u)f(t_0+\varepsilon u)\varepsilon\,du \\ &= \frac{1}{C_h}\int_{-1}^{1} h(t)f(t_0+\varepsilon t), dt \quad .\end{aligned}$$

De plus, par définition de C_h , on a $f(t_0) = \dfrac{1}{C_h}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t_0)\,dt$, si bien que

$$\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}.f(t).\,dt - f(t_0) = \frac{1}{C_h}\int_{-1}^{1} h(t)\Big(f(t_0+\varepsilon t) - f(t_0)\Big)\,dt \quad .$$

Soit $\alpha > 0$ donné quelconque. Par continuité de f en t_0 , on peut trouver $\varepsilon_1 > 0$, qu'on peut choisir inférieur au ε_0 du début de la question, tel que $|t - t_0| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \alpha$. Pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$, et tout $t \in [-1, 1]$, on aura alors $\|f(t_0 + \varepsilon t) - f(t_0)\| < \alpha$, d'où par intégration sur $[-1, 1]$ et inégalité de la moyenne

$$\begin{aligned}\forall\, \varepsilon < \varepsilon_1 \quad \left\|\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}.f(t).\, dt - f(t_0)\right\| &= \frac{1}{C_h}\left\|\int_{-1}^1 h(t)\Big(f(t_0 + \varepsilon t) - f(t_0)\Big)\, dt\right\| \\ &\le \frac{1}{C_h}\int_{-1}^1 h(t)\alpha\, dt \\ &\le \alpha \quad .\end{aligned}$$

Ceci prouve par définition que la limite de $\displaystyle\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}.f(t).\, dt$ quand $\varepsilon \to 0$ est $f(t_0)$.

2°) Pour tout $t_0 \in]0, [$, les fonctions $h_{t_0,\varepsilon}$ sont dans $\mathcal{T}$ pour ε suffisamment petit (puisque C^1 et nulles en-dehors de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$). On a donc alors par hypothèse $\displaystyle\int_0^1 h_{t_0,\varepsilon}(t)f(t)\, dt = 0$, d'où en passant à la limite $\varepsilon \to 0$, par ci-dessus : $f(t_0) = 0$. Ceci ayant lieu pour tout $t_0 \in]0, 1[$ et f étant continue en 0 et en 1 , on en déduit bien que f est nulle sur $[0, 1]$.

3°) Prenons ε suffisamment petit pour que les intervalles $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[$ soient tous les deux inclus dans $]0, 1[$. Alors la fonction $\displaystyle\phi(x) = \int_0^x \Big(h_{t_1,\varepsilon}(t) - h_{t_0,\varepsilon}(t)\Big)\, dt$ convient. Elle est en effet C^1 comme primitive d'une fonction au moins continue, vaut 0 en $x = 0$ par définition, et vaut 0 en $x = 1$ puisque les intégrales sur $[0, 1]$ des fonctions $h_{t_0,\varepsilon}$ et $h_{t_1,\varepsilon}$ valent 1 .

4°) En appliquant ce qui précède, l'hypothèse implique, à la limite où $\varepsilon \to 0$: $f(t_1) - f(t_0) = 0$, et ceci pour tout couple (t_0, t_1) de $]0, 1[^2$. On en déduit que f est constante sur $]0, 1[$, puis, par continuité, sur $[0, 1]$.

5°)

a) Soit $\tilde{g}$ une fonction C^1 primitive de g sur $[0, 1)$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^1 \phi(t)g(t)\, dt = \Big[\phi(t)\tilde{g}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \phi'(t)\tilde{g}(t)\, dt \quad ,$$

si bien que l'égalité donnée en énoncé se traduit par

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{T} \quad \int_0^1 \phi'(t)\big(f(t) - \tilde{g}(t)\big)\, dt = 0 \quad .$$

On en déduit par **4)** que $f - \tilde{g}$ est constante sur $[0, 1)$, donc $f = \tilde{g} + cste$ y est bien C^1 , et de plus vérifie $f' = g$.

b) Il suffit d'appliquer l'hypothèse de l'énoncé aux fonctions ψ de la forme $\psi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \phi(t) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, où ϕ parcourt $\mathcal{T}$. On en déduit, par le **a)**, que toutes les composantes de f sont dérivables ainsi que l'égalité $f' = g$ composante par composante.

6°)

a) Par théorème de composition, à $\varepsilon > 0$ fixé, la fonction $(t_0, t) \mapsto h_{t_0,\varepsilon}(t) = \dfrac{1}{C_h\varepsilon}h\Big(\dfrac{t - t_0}{\varepsilon}\Big)$ est de classe (au moins) C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit par produit de fonctions continues que la fonction $(t_0, t) \mapsto h_{t_0,\varepsilon}(t).f_*(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-\delta, 1 + \delta]$, ainsi que sa dérivée partielle par rapport à t_0 . Le théorème de dérivation des intégrales *propres* à paramètre s'applique alors et donne que la fonction $\displaystyle t_0 \mapsto g_\varepsilon(t_0) = \int_{-\delta}^{1+\delta} h_{t_0,\varepsilon}(t).f_*(t)\, dt$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Si on choisit $\varepsilon < \delta$, pour tout $t_0 \in [0, 1]$ les intervalles $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ sont inclus dans $[-\delta, 1 + \delta]$. On peut alors calculer comme au **1)** : $\displaystyle g_e(t_0) - f_*(t_0) = \frac{1}{C_h}\int_{-1}^1 h(t)\big(f_*(t_0 + \varepsilon t) - f_*(t_0)\big)\, dt$. De plus, f_* continue sur le compact

$[0,1]$, y est uniformément continue. Si on choisit ε inférieur au module d'uniforme continuité de f_* correspondant à la valeur α , il résulte de l'inégalité de la moyenne que

$$\forall t_0 \in [0,1] \quad \|g_\varepsilon(t_0) - f_*(t_0)\| \leq \frac{1}{C_h} \int_{-1}^{1} h(t).\alpha \, dt = \alpha \quad , \ cqfd.$$

c) Toute fonction f continue sur $[0,1]$ est prolongeable (par exemple par des fonctions constantes au-delà de $[0,1]$) en une fonction f_* continue sur $[-\delta, 1+\delta]$. On applique alors le **b)** à la fonction ainsi prolongée en sachant, par **a)** que la fonction g_ε utilisée est C^1 sur $[0,1]$.

d) On peut par exemple, grâce à **c)**, approximer f à $\alpha/2$ près au moyen d'une fonction g_1 C^1 sur $[0,1]$. Puis, on modifie g_1 en g au moyen d'une fonction affine h de sorte que $g(0) = g(1) = 0$:

$$g = g_1 + h \quad , \quad \text{avec } h(t) = (1-t)\big(f(0) - g_1(0)\big) + t\big(f(1) - g_1(1)\big) \quad .$$

g reste bien de classe C^1 sur $[0,1]$, et comme h est un barycentre à coefficients positifs de $f(0)-g_1(0)$ et de $f(1)-g_1(1)$ qui sont deux vecteurs de normes inférieurs à $\alpha/2$, on a constamment $\|h(t)\| \leq \alpha/2$, d'où finalement, par inégalité triangulaire, $\|f - g\| \leq \|f - g_1\| + \|h\| \leq \alpha$, cqfd.

Partie III

1°)

a) Petite imprécision d'énoncé : il faut supposer ici $\Omega \neq \mathbb{R}^n$!
Raisonnons par l'absurde : si $\delta(x) = 0$, x est par définition d'un inf limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, or ce dernier ensemble est fermé par hypothèse, donc x serait dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ce qui est faux.
Pour montrer que δ est continue, montrons qu'elle est 1-lipschitzienne. Pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega^2$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ on a par inégalité triangulaire

$$\delta(x_1) \leq \|x_1 - y\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - y\| \quad ,$$

soit $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad \|x_2 - y\| \geq \delta(x_1) - \|x_1 - x_2\|$: comme l'inf est le plus grand des minorants, on en déduit

$$\delta(x_2) \geq \delta(x_1) - \|x_1 - x_2\| \quad .$$

Or on peut inverser les rôles de x_1 et x_2 , donc finalement on a bien $|\delta(x_2) - \delta(x_1)| \leq \|x_1 - x_2\|$, cqfd.

b) $\delta \circ f$ est par composition une fonction continue sur $[0,1]$ compact, donc elle y atteint son minimum α : il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\alpha = (\delta \circ f)(t_0)$, ce qui prouve par **a)** que $\alpha > 0$. Par définition de δ , on a alors que tous les points de $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sont à une distance supérieure à α des points $f(t)$, soit encore que les boules fermées $\mathcal{B}\big(f(t), \alpha/2\big)$, $t \in [0,1]$, (par exemple) sont toutes incluses dans Ω .

c) Comme Ω est connexe par arcs, pour tout $(a,b) \in \Omega^2$ il existe une fonction f continue sur $[01,]$ à valeurs dans Ω telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. En prenant le α défini au **b)**, on a par **II.6)d)** qu'il existe une fonction C^1 sur $[0,1]$ approximant f à α près et vérifiant de plus $g(0) = a$ et $g(1) = b$. Cette fonction est alors dans $\mathcal{F}_{a,b}$.

d) Choisissons pour f un $\alpha > 0$ défini comme au **b)** et appelons M_ϕ le maximum (atteint) de $\|\phi\|$ sur $[0,1]$. Il est clair que tout β_0 vérifiant $\beta_0.M_\phi \leq \alpha$ convient par **b)** puisqu'alors $\|\beta\phi(t)\| \leq a$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\beta \in [-\beta_0, \beta_0]$.

2°) Par définition, $\Psi(\beta) = \displaystyle\int_0^1 \|f'(t) + \beta\phi'(t)\|^2.\rho\big(f(t) + \beta\phi(t)\big)\, dt$.
Vu les hypothèses que f et ϕ sont C^1 , la fonction $h_1(\beta, t) = \|f'(t) + \beta\phi'(t)\|^2$ est continue des deux variables (β, t) , ainsi que sa dérivée partielle par rapport à β sur $[-\beta_0, \beta_0] \times [0,1]$; en effet, celle-ci est

$$\frac{\partial h_1}{\partial \beta} = 2\big\langle f'(t) + \beta\phi'(t) \, , \, \phi'(t) \big\rangle \quad .$$

De même la fonction $h_2(\beta, t) = \rho\big(f(t) + \beta\phi(t)\big)$ est continue des deux variables par composition de fonctions continues, et sa dérivée par rapport à β aussi ; en effet, en désignant par $(\phi_1(t))$, $1 \leq i \leq n$ les composantes de ϕ ,

$$\frac{\partial h_2}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\big(f(t) + \beta\phi(t)\big).\phi_i(t) = \big\langle \nabla\rho\big(f(t) + \beta\phi(t)\big) \, , \, \phi(t) \big\rangle \quad .$$

Le produit $h_1(\beta, t).h_2(\beta, t)$ est donc continu et continûment dérivable par rapport à β sur $[-\beta_0, \beta_0] \times [0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales propres à paramètres. Celui-ci nous dit que la fonction $\Psi(\beta)$ est de classe C^1 sur $[-\beta_0, \beta_0]$ et qu'elle y a pour dérivée

$$\Psi'(\beta) = \int_0^1 2\big\langle f'(t) + \beta\phi'(t) \, , \, \phi'(t) \big\rangle.\rho\big(f(t) + \beta\phi(t)\big)\, dt + \int_0^1 \|f'(t) + \beta\phi'(t)\|^2 \big\langle \nabla\rho\big(f(t) + \beta\phi(t)\big) \, , \, \phi(t) \big\rangle\, dt \quad .$$

3°)

a) La fonction $\Psi(\beta)$ définie ci-dessus pour $f = g$ admet un minimum local en $\beta = 0$ par définition de g . Sa dérivée en $\beta = 0$ est donc nulle, ce qui donne exactement d'après ci-dessus la relation à démontrer.

b) Comme les fonction f et ρ sont de classe C^1 , on peut utiliser les résultats du **II.5)b)** avec f remplacée par $h = 2(\rho \circ f).f'$ et g remplacée par $\|f'\|.(\nabla\rho \circ f)$. On en déduit d'une part que la fonction h est de classe C^1 , d'où $f' = \dfrac{h}{2\rho \circ f}$ est de classe C^1 aussi (par composition et parce ce que ρ ne s'annulle pas par hypothèse), c'est-à-dire f de classe C^2 sur $[0,1]$. D'autre part, la relation $h' = \|f'\|.(\nabla\rho \circ f)$ du **II.5)b)** se traduit par

$$2\rho(f).f'' + 2\big\langle \nabla\rho(f)\,,\, f'\big\rangle.f' = \|f'\|^2.\nabla\rho(f) \quad , \; cqfd.$$

c) Dérivons la fonction $g = \|f'\|^2.\rho(f)$:

$$h' = 2\big\langle f'\,,\, f''\big\rangle.\rho(f) + \|f'\|^2.\big\langle \nabla\rho(f)\,,\, f'\big\rangle \quad .$$

Remplaçons dans le premier terme du deuxième membre $2f''\rho(f)$ par son expression donnée par le **b)** ci-dessus, on trouve :

$$h' = \|f'\|^2\big\langle \nabla\rho(f)\,,\, f'\big\rangle - 2\big\langle \nabla\rho(f)\,,\, f'\big\rangle\big\langle f'\,,\, f'\big\rangle + \|f'\|^2\big\langle \nabla\rho(f)\,,\, f'\big\rangle = 0 \quad .$$

h , de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$ y est donc constante.

Partie IV

1°)

a) Il s'agit de l'inégalité triangulaire renversée : par inégalité triangulaire classique, on a d'une part $d(x, y+tz) \leq d(x,y) + d(y, y+tz)$ et d'autre part $d(x,y) \leq d(x, y+tz) + d(y+tz, y)$, d'où par symétrie de la fonction distance $\big|d(x, y+tz) - d(x,y)\big| \leq d(y, y = tz)$.

b) Si on suppose d de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors $d(y,y) = 0$ étant un minimum, les dérivées partielles de l'application $u \mapsto d(y,u)$ selon tout vecteur z sont nulles au point $u = y$. L'inégalité du **a)** ci-dessus impose alors la nullité des dérivées partielles de la fonction $u \mapsto d(x,u)$ au point $u = y$, ceci pour tout x et pour tout y . Comme $\mathbb{R}^n$ est convexe, cela signifie que la fonction $y \mapsto d(x,y)$ est constante sur $\mathbb{R}^n$, donc d est la fonction nulle puisque $d(x,x) = 0$. C'est absurde.

2°) Comme la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, $d(x,y) = \sqrt{d(x,y)^2}$ est C^2 par composition en tout point où $d(x,y) > 0$.

3°)

a) y est un point critique de la fonction (de classe C^2) F_y , puisque $F_y(y) = 0$ est un minimum absolu de la fonction. L'égalité demandée n'est alors autre que le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction réelle de classe C^2 au moyen de la matrice Hessienne de cette fonction. Redémontrons cette égalité.
Pour cela on utilise la fonction auxiliaire $\varphi(t) = F_y(y+tz)$ de classe C^2 sur $[0,1]$. φ est de dérivée nulle en 0 (point critique) et de dérivée seconde $\varphi''(t) = \displaystyle\sum_{i,j} z_i z_j \frac{\partial^2 F_y}{\partial x_i \partial x_j}(y+tz) = {}^t z.H_2(y+tz).z$, en appelant H_2 la matrice aux éléments $\dfrac{\partial^2 F_y}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i,j) \in [1,n]^2$. Cette matrice est symétrique par théorème de Schwarz puisque F_y est par hypothèse de classe C^2 . Une égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour φ donne :

$$\begin{aligned} \varphi(1) - \varphi(0) &= \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{2}\big(\varphi''(c) - \varphi''(0)\big) \\ \Longrightarrow F_y(y+z) &= \frac{1}{2}{}^t z.H_2(y).z + \frac{1}{2}\Big({}^t z.\big(H_2(y+cz) - H_2(y)\big).z\Big) \quad . \end{aligned}$$

En utilisant la norme triple matricielle subordonnée à la norme euclidienne, on a, par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \Big\|{}^t z.\big(H_2(y+cz) - H_2(y)\big).z\Big\| &\leq \|z\|\Big\|\big(H_2(y+cz) - H_2(y)\big).z\Big\| \\ &\leq \|z\|^2.\big|\!\big|\!\big|H_2(y+cz) - H_2(y)\big|\!\big|\!\big| \quad . \end{aligned}$$

Comme la fonction H_2 est continue au point y, on voit que la fonction $F_y(y+tz) - \frac{1}{2}{}^t z.H_2(y).z = \frac{1}{2}\Big({}^t z.\big(H_2(y+cz) - H_2(y)\big).z\Big)$ peut bien se mettre sous la forme $\|z\|^2 R(y,z)$ avec $|R(y,z)| \leq \frac{1}{2}\big|\!\big|\!\big|H_2(y+cz) - H_2(y)\big|\!\big|\!\big|$ qui tend vers 0 quand $z \to 0$.
D'où le résultat avec $H(y) = \frac{1}{2}H_2(y)$.

b) D'après ci-dessus, pour tout y et z fixés dans $\mathbb{R}^n$, la fonction positive $F_y(y+tz)$ admet le développement limité

$$F_y(y+tz) = t^2\big({}^tz.H(y).z + \|z\|^2.R(y,tz)\big) \quad ,$$

avec $R(y,tz) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $F_y(y+tz)$ a le signe de ${}^tz.H(y).z$, si cette expression est $\neq 0$, pour t "suffisamment petit". Il en résulte que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, ${}^tz.H(y).z < 0$ est impossible, d'où $H(y)$, symétrique, est une matrice positive.

4°)

a) Il revient au même de démontrer que $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2} F_{f(t)}\big(f(t+\delta)\big) = {}^tf'(t).H\big(f(t)\big).f'(t)$, puisque δ est une fonction positive et par continuité de la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $\mathbb{R}+$. Or, d'après ce qui précède :

$$F_{f(t)}\big(f(t+\delta)\big) = {}^t\big(f(t+\delta)-f(t)\big).H\big(f(t+\delta)-f(t)\big) + \big\|f(t+\delta)-f(t)\big\|^2.R\big(f(t),f(t+\delta)-f(t)\big) \quad .$$

Pour toute matrice A , la fonction $X \mapsto {}^tXAX$ est continue (car polynômiale), donc en divisant l'égalité ci-dessus par δ^2 , comme $\frac{1}{\delta}\big(f(t+\delta)-f(t)\big)$ admet $f'(t)$ comme limite quand $\delta \to 0$, et que d'autre part, par compoisiton de limites, $R\big(f(t),f(t+\delta)-f(t)\big) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$, il est clair qu'on obtient bien la limite attendue quand $\delta \to 0$.

b) On reprend l'inégalité du **1)a)** qu'on divise par $\delta >$:

$$\Big|\frac{1}{\delta}d\big(x,f(t+d)\big) - d\big(x,f(t)\big)\Big| \le \frac{1}{\delta}d\big(f(t),f(t+\delta)\big) \quad .$$

On a vu que le deuxième membre admettait une limite quand $\delta \to 0$. Mais le premier membre aussi, car $t \mapsto d(x,y)$ est dérivable en tout point (x,y) tel que $x \neq y$ et donc par composition, la fonction $t \mapsto d\big(x,f(t)\big)$ aussi lorsque $x \neq f(t)$. En passant à la limite $\delta \to 0$, les inégalités larges se conservent et d'après le **a)** on obtient bien

$$\Big|\frac{1}{dt}d\big(x,f(t)\big)\Big| \le \sqrt{{}^tf'(t).H\big(f(t)\big).f'(t)} \quad .$$

c) En vertu de l'inégalité précédente, la fonction $h(t) = \frac{1}{dt}d\big(x,f(t)\big)$ est bornée lorsque t parcourt $]0,1]$ (car majorée par une fonction continue sur le compact $[0,1]$). Comme elle est de plus continue puisque d et f sont C^1 , cette fonction est intégrable sur $]0,1]$. Or $d(x,y) = \displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt$, et donc l'inégalité demandée résulte de l'inégalité de la moyenne pour les intégrales.

5°)

a) Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite (t_n) de limite t_0 telle que $\forall n \;\; f(t_n) = x$. par continuité de f en t_0 , on en deduit $f(t_0) = x$. Comme $f(1) = y \neq x$, il en résulte que $t_0 \neq 1$, donc $t_0 < 1$.

b) On a tout d'abord que g est C^1 avec $g'(t) = (1-t_0)f'\big(t_0+t(1-t_0)\big)$. De plus, en effectuant le changement de variable affine $u = t_0 + (1-t_0)t$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{{}^tg'(t).H\big(g'(t)\big).g(t)}\,dt &= (1-t_0)\int_{t_0}^1 \sqrt{{}^tf'(u)H\big(f(u)\big).f'(u)}.\frac{du}{1-t_0} \\ &\le \int_0^1 \sqrt{{}^tf'(u)H\big(f(u)\big).f'(u)}\,du \quad ,\end{aligned}$$

car l'intégrande est clairement une fonction positive.

6°) Si $x = y$, il n'y a rien à démontrer (les intégrales sont positives).
Par **4)c)**, on a que si l'arc C^1 f joignant x à y vérifie $f(t) \neq x$ pour tout $t > 0$, alors $d(x,y)$ est un minorant de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{{}^tf'(t)H\big(f(t)\big).f'(t)}\,dt$. Mais s'il existe des $t > 1$ tels que $f(t) = x$, l'arc considéré en **5)b)** est C^1 , joint x à y car $f(t_0) = g(0) = x$, et vérifie, par définition même de t_0 , $\forall t > 0 \;\; g(t) \neq x$. Donc, par **4)c)**, $d(x,y)$ minore l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{{}^tg'(t)H\big(g(t)\big).g'(t)}\,dt$, et, par **5)b)**, a fortiori l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{{}^tf'(t)H\big(f(t)\big).f'(t)}\,dt$.
En conclusion, comme l'inf est le plus grand des minorants on a bien l'inégalité

$$d(x,y) \le inf\Big\{\int_0^1 \sqrt{{}^tf'(t)H\big(f(t)\big).f'(t)}\,dt \mid f \; C^1 \text{ sur } [0,1] \; , \; f(0) = x \; , \; f(1) = y\Big\} \quad .$$

7°)

a) Par formule de dérivation des fonctions composées, on a que $\langle \nabla F_x\big(f(t)\big)\,,\,f'(t)\rangle$ est la dérivée de la fonction $t \mapsto F_x(f(t)$. Or, pour $x \neq f(t)$, on sait que la fonction $t \mapsto d\big(x, f(t)\big)$ est dérivable, d'où, comme $F_x\big(f(t)\big) = d\big(x, f(t)\big)^2$, il vient :

$$\frac{d}{dt}F_x\big(f(t)\big) = 2d\big(x, f(t)\big).\frac{d}{dt}d\big(x, f(t)\big) \quad .$$

L'inégalité demandée résulte donc du **4)b)** en élevant le résultat au carré.
Maintenant, si $x = f(t)$, le second membre de l'inégalité à démontrer est nul, mais le premier aussi, puisque la fonction $y \mapsto F_x(y)$ admet un minimum (0) au point x qui est donc un point critique où $\nabla F_x(x) = 0$.

b) Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, on peut toujours trouver une fonction f de classe C^1 sur $[0,1)$ vérifiant $f(0) = x$, $f(1) = y$, et $f'(1) = u$: il suffit de choisir $f(t) = (1-t)x + ty + t(1-t)v$ avec $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $-v + y - x = u$. Alors l'inégalité démontrée au **7)a)** ci-dessus se réécrit :

$$\begin{aligned} &4d(x,y)^2.tuH(y)u - \langle \nabla F_x(y)\,,\,u\rangle^2 \geq 0 \\ \iff\quad &{}^tu.\big(4d(x,y)^2H(y) - \nabla F_x(y).{}^t\nabla F_x(y)\big).u \geq 0 \quad , \end{aligned}$$

ce qui, puisque u est quelconque, est la définition même de la positivité de la matrice $4d(x,y)^2H(y) - \nabla F_x(y).{}^t\nabla F_x(y)$.

8°)

a) On a déjà vu, au **4)**, que la fonction $\frac{d}{dt}d\big(x, f(t)\big)$ est intégrable en 0 . De plus, l'inégalité du **4)b)** dit que la fonction $h(t) = \sqrt{{}^tf'(t).H\big(f(t)\big).f'(t)} - \frac{d}{dt}d\big(x, f(t)\big)$ est positive sur $]0,1]$. Or, l'hypothèse est maintenant que $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt = 0$. On en déduit bien a fortiori que $\displaystyle\int_0^{t_0} h(t)\,dt = 0$ pour tout $t_0 \in]0,1]$. Par intégration de $\frac{d}{dt}d\big(x, f(t)\big)$, cette dernière égalité donne exactement $d\big(x, f(t_0)\big) = \displaystyle\int_0^{t_0} \sqrt{{}^tf'(t).H\big(f(t)\big).f'(t)}\,dt$.

b) Par dérivation, on a donc égalité dans l'inégalité du **4)b)**. La démonstration faite en **7)a)** donne donc maintenant un égalité.

9°)

a) Remarquons tout d'abord que S^{-1} , symétrique, a pour valeurs propres les inverses des valeurs propres de S , donc en particulier S^{-1} est aussi définie positive, et ${}^tuS^{-1}u \geq 0$.
Posons $W = S - u^tu$, soit $S = W + u^tu$, et $y = S^{-1}u$. On a :

$${}^tuS^{-1}u = {}^tuy = {}^tyu = {}^tySy = tyWy + {}^tyutuy = tyWy + \big({}^tuy\big)^2 \quad .$$

Donc (CN), si W est positive, ${}^tyu \geq \big({}^tyu\big)^2$, ce qui implique bien que ${}^tyu = {}^tuS^{-1}u$ est ≤ 1 car ${}^tyu = {}^tuS^{-1}$ est positif.
Pour démontrer la condition suffisante, plaçons-nous dans une base propre orthonormée de diagonalisation de l'endomorphisme $x \mapsto Sx$: les composantes d'un vecteur x quelconque et de u sont notées respectivement x_i et u_i , les valeurs propres (strictement positives) de S sont notées respectivement λ_i , $1 \leq i \leq n$. Alors, montrer que W est positive revient à montrer que

$$tx\big(S - u^t\big)x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^n u_i x_i\Big)^2 \geq 0 \quad .$$

Or, par hypothèse, ${}^tuS^{-1}u = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}u_i^2 \leq 1$, et d'autre part, par Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^n u_i x_i\Big| &= \Big|\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}u_i.\sqrt{\lambda_i}x_i\Big| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{\lambda_i}} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2} \quad . \end{aligned}$$

D'où le résultat en élevant cette dernière inégalité au carré.

b) $\underline{(A) \Rightarrow (B)}$: en reprenant les notations de la réciproque précédente, on a maintenant

$$tx(S - u^t)x = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\Big)^2 \quad .$$

Donc, en reprenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz précédente et en l'élevant au carré,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad .$$

Comme x de composantes (x_i) est supposé $\neq 0$, que les λ_i sont tous > 0 , on peut diviser par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0$, ce qui donne bien

$$^t u S^{-1} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \geq 1 \quad .$$

$\underline{(B) \Rightarrow (A)}$: en reprenant la notation $W = S - u^t u$, on a que les formes quadratiques $^x.W.x$ et $^t x.S.x$ coïncident sur l'hyperplan $^t u.x = 0$. Mais d'autre part, le vecteur non nul $y = S^{-1}u$ vérifie, puisque $0 \leq {}^t uy = {}^t u S^{-1} u \leq 1$:

$$^t y.W.y = {}^t uy - \big({}^t uy\big)^2 \leq 0 \quad .$$

On en déduit que, soit $^t y.W.y = 0$, c'est-à-dire $^t ySy = \big({}^t yu\big)^2$, donc $x = y$ convient pour réaliser (B) , soit $^t y.W.y < 0$ et la forme quadratique $^x.W.x$ change de signe (elle est de signature $(n-1, 1)$). Dans ce dernier cas, il est clair qu'elle peut s'annuler sur un vecteur $x \neq 0$, d'où (B) .

10°) On applique les résultats précédents à la matrice $S = 4d(x, y)^2.H(y)$ et au vecteur $u = \nabla F_x(y)$. Par le **7)b)**, $S - u^t u$ est positive, donc, vu **9)a)**, $^t u S^{-1} u \leq 1$, soit

$$(1) \qquad {}^t\nabla F_x(y).H(y)^{-1}.\nabla F_x(y) \leq 4d(x, y)^2 \quad .$$

D'autre part, si f est un arc C^1 joignant x à y réalisant le minimum de $m = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{{}^t f'(t).H\big(f(t)\big).f'(t)}\, dt$, par le **8)b)** on a qu'en tout point $t_0 \in]0, 1]$ vérifiant $f'(t_0) \neq 0$, le **9)b)**-(A) est vérifié par le vecteur $x = f'(t_0)$ pour la matrice $S = 4d\big(x, f(t_0)\big).H\big(f(t_0)\big)$ et le vecteur $u = \nabla F_x\big(f(t_0)\big)$: on en déduit que le (B) est vrai, à savoir

$$(2) \qquad {}^t\nabla F_x\big(f(t_0)\big).H\big(f(t_0)\big)^{-1}.\nabla F_x\big(f(t_0)\big) \geq 4d\big(x, f(t_0)\big)^2 \quad .$$

Mais l'arc f ne peut pas être stationnaire à $f(t) = y$ dans un voisinage $]1 - \alpha, 1]$, sinon f ne réaliserait pas le minimum m, ou du moins pourrait être changée en une fonction g réalisant le minimum et vérifiant $g(t) \neq y$ pour tout $t < 1$: il suffit pour le voir de reprendre une démonstration analogue à celle du **5)a)-b)** en définissant un $t_1 = inf\big\{t \geq 0 \;\big|\; f(t) = y\big\}$ et g par $g(t) = f(t.t_1)$. Ainsi, il existe une suite de points (t_k) , $k \in \mathbb{N}$, de limite 1 vérifiant $f'(t_k) \neq 0$ et telle que, donc, l'inégalité (2) soit vérifiée en $t_0 = t_k$. Comme toutes les expressions intervenant dans (2) sont des fonctions continues de t_0 , on peut passer à la limite dans l'inégalité large, et finalement (2) est vraie aussi en $t_0 = 1$.
On conclut par (1) et (2) à l'égalité $^t\nabla F_x(y).H(y)^{-1}.\nabla F_x(y) = 4d(x, y)^2$ ■