

Corrigé du CCP 2009 MP Maths I
A. ATTIOUI

Exercice 1.

1) Soit y une solution de (E) dans I , où I est l'un des intervalles $] -1, 0[$ et $]0, 1[$. On déduit, de l'équation (E), que l'application $x \mapsto xy(x)$ est une primitive sur I de $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ qui s'obtient facilement en dérivant l'application $x \mapsto \arcsin(x^2)$. Alors, pour tout $x \in I$, $xy = \arcsin(x^2) + C$ où C est une constante. Par conséquent, pour tout $x \in I$, $y = \frac{C + \arcsin(x^2)}{x}$

2) Soit y une solution de (E) dans $] -1, 1[$, alors la restriction de y à $] -1, 0[$ (resp. $]0, 1[$) est une solution de (E) dans $] -1, 0[$ (resp. $]0, 1[$). Donc, pour tout $x \in] -1, 0[$, $y = \frac{C_1 + \arcsin(x^2)}{x}$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $y = \frac{C_2 + \arcsin(x^2)}{x}$ avec C_i des constantes. Donc, y est impaire et alors $y(0) = 0$. Par continuité de y en 0, on a alors $C_1 = C_2 = 0$. Par suite, la seule solution de (E) dans $] -1, 1[$, est la fonction $y = \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $y(0) = 0$.

Exercice 2.

1) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive, continue sur \mathbb{R}^+ et $e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, alors La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

2) (a) La fonction f est la primitive de la fonction continue $t \mapsto e^{-t^2}$ sur \mathbb{R}^+ qui s'annule en 0, alors f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = e^{-x^2}$. L'application $h : (t, x) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$ et $\frac{\partial h}{\partial x} : (t, x) \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ pour tout $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$. Alors, par le théorème de dérivation sous le signe somme (pour une intégrale définie), g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$.

(b) Soit $x > 0$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. En effectuant le changement de variable $t = xu$ dans l'intégrale on obtient : $f(x) = \int_0^1 xe^{-x^2u^2} du$ égalité valable aussi pour $x = 0$ car $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) + 2f'(x)f(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^1 xe^{-x^2u^2} du = 0$. Donc $\varphi = g + f^2$ est constante de valeur $\varphi(0) = g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

(c) Soit $x \geq 0$, l'application $h : t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est décroissante strictement positive sur $[0, 1]$ (car son inverse est une application croissante) alors pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq h(t) \leq h(0) = e^{-x^2}$. On en déduit, par integration, que $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$.

(d) Par définition, $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est un réel ≥ 0 . On a, d'après (c), $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$. Donc, $I^2 = \frac{\pi}{4}$ ou encore $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème

Partie I :

1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\|u_{n+1}\| = \|x_{n+2} - x_{n+1}\| = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\| \leq k \|x_{n+1} - x_n\| = k \|u_n\|$. On en déduit, par récurrence sur n , que $\|u_n\| \leq k^n \|u_0\| = k^n \|f(a) - a\|$. Puisque $0 \leq k < 1$, la série de terme général $\|u_n\|$ est convergente dans \mathbb{R}^+ . Par suite, comme on est dans un espace de Banach, la série $\sum u_n$ converge dans E .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k = x_n - x_0$ alors $x_n = a + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. D'après (a) on a vu que la série $\sum u_n$ converge dans E donc la suite (x_n) converge vers un élément ℓ de E .

(c) Etant donnée que l'application f est une contraction donc elle est continue sur E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et (x_n) converge vers ℓ donc $f(\ell) = \ell$

(d) On vient de voir que f admet au moins un point fixe. Si f admet 2 points fixes distincts a et b , la contractibilité de f permet d'écrire $\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq k \|a - b\|$ alors $k \geq 1$ ce qui est absurde, d'où l'unicité.

Partie II :

2.(a) Soit $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ alors $|g'(t)| = g'(t) < 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \neq y$, en appliquant le T.A.F (g est même C^∞ sur \mathbb{R}), il existe c entre x et y tels que $g(x) - g(y) = (x - y)g'(c)$ alors $|g(x) - g(y)| = |x - y|g'(c) < |x - y|$.

(b) On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\arctan(t)| < \frac{\pi}{2}$, alors $g(t) \neq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En d'autres termes la fonction g ne peut pas admettre un point fixe et elle n'est plus une contraction stricte par le théorème du point fixe de PICARD.

3.(a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|g(x) - g(y)| = \frac{1}{5}|x - y|$ donc $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une contraction stricte de rapport $\frac{1}{5}$. ($(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace de Banach). D'après le théorème de PICARD, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, La suite définie par $u_{n+1} = g(u_n) = \frac{u_n}{5} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers l'unique point fixe de g . Ce point fixe est déterminé par la

résolution de l'équation $g(x) = x$ qui donne $x = \frac{5}{4}$. Donc la suite (u_n) converge est de limite $\frac{5}{4}$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(g(x)) = f(g^2(x)) = \dots = f(g^n(x))$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x)$. D'après ce qui précède la suite (u_n) converge vers $\frac{5}{4}$ et f continue sur \mathbb{R} donc $f(x) = f(\frac{5}{4})$.

4.(a) L'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est complet car il est de dimension finie.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, d'après le T.A.F (les fonctions sin et arctan sont dérivables sur \mathbb{R}), ils existent c et d entre a et b tels que: $\sin(b) - \sin(a) = (b-a) \cos(c)$ et $\arctan(b) - \arctan(a) = (b-a) \frac{1}{1+d^2}$. Alors $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |b-a|$ et $|\arctan(b) - \arctan(a)| \leq |b-a|$.

(c) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2) = (\frac{1}{4}(\sin(x_1 + y_1) - \sin(x_2 + y_2)), \frac{2}{3}(\arctan(x_1 + y_1) - \arctan(x_2 + y_2)))$$

alors $\|\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2)\|_1 = \frac{1}{4}|\sin(x_1 + y_1) - \sin(x_2 + y_2)| + \frac{2}{3}|\arctan(x_1 + y_1) - \arctan(x_2 + y_2)|$. Ensuite, en utilisant les inégalités de la question précédente, on obtient:

$\|\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2)\|_1 \leq \frac{1}{4}|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| + \frac{2}{3}|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)| \leq \frac{11}{12} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1$. Donc ψ est une contraction stricte de rapport $\frac{11}{12}$ de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

(d) D'après le théorème de PICARD, la contraction ψ admet un unique point fixe (a, b) dans \mathbb{R}^2 . Alors $\psi(a, b) = (a, b)$ ou encore $a = \frac{1}{4} \sin(a + b)$ et $b = 1 + \frac{2}{3} \arctan(a - b)$, donc (a, b) est une solution de (S) . Inversement, il est clair que toute solution de (S) est un point fixe de ψ . D'où le résultat.

(e) On a $\psi(0, 0) = (0, 1)$ et $\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (0, 1 + \frac{2}{3} \arctan(1)) = (0, 1 + \frac{\pi}{6})$ alors $\|\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \psi(0, 0)\|_\infty = \max(0, \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$. L'application ψ n'est pas une contraction stricte car pour tout $k \in [0, 1[$, $\|\psi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - \psi(0, 0)\|_\infty = \frac{\pi}{6} > \frac{k}{2} = k \|(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) - (0, 0) \|_\infty$. Suite à l'exemple ci-dessus, une contraction pour une norme peut ne pas l'être pour une autre norme équivalente. La contractibilité dépend alors de la métrique choisie. Généralement, une application continue, admettant un unique point fixe, est-elle une contraction?

Partie III :

5.(a) Par définition, pour tout $f \in F$, $\|f\|_\infty$ est un réel positif. Donc l'application $\|\cdot\|_\infty: F \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie. Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$ d'où l'homogénéité.

La séparation est immédiate en effet : si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ alors f est l'application nulle. Il reste l'inégalité triangulaire, soit $x \in [0, 1]$ on a : $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ alors $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(b) Soit $f \in E$, alors f est continue sur le compact $[0, 1]$ alors elle est bornée donc $f \in F$. d'où le résultat.

(c) Soit $x_0 \in G$, montrons la continuité de g en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$, la convergence uniforme de la suite (g_n) vers g donne l'existence d'un entier $N \geq 0$, tel que si $n \geq N$ on ait $\|g_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$, pour tout $x \in G$. L'application g_N est continue en x_0 , donc il existe $\eta > 0$ tel que $\|x - x_0\| < \eta$ implique $\|g_N(x) - g_N(x_0)\| \leq \varepsilon$. Pour x tel que $\|x - x_0\| < \eta$, on a $\|g(x) - g(x_0)\| \leq \|g(x) - g_N(x)\| + \|g_N(x) - g_N(x_0)\| + \|g_N(x_0) - g(x_0)\| \leq 3\varepsilon$. d'où le résultat.

(d) D'après (c), le sous-espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est fermé dans l'espace de Banach $(F, \|\cdot\|_\infty)$, alors $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

6.(a) L'application K est continue sur le compact $[0, 1]^2$, il en est de même pour $|K|$ alors $|K|$ est bornée et atteint ses bornes.

(b) Pour tout $f \in E$, l'application $h : (x, y) \rightarrow K(x, y)f(y)$ est continue (et bornée) sur le compact $[0, 1]^2$ alors l'application $x \mapsto \int_0^1 h(x, y)dy$ est continue sur $[0, 1]$. Par suite, $\phi(f)$ est continue sur $[0, 1]$. Donc $\phi(f) \in E$.

(c) On vient de voir que ϕ est une application de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soient $f_1, f_2 \in E$,

$\phi(f_1) - \phi(f_2) = -\lambda \int_0^1 K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))dy$ alors $\|\phi(f_1) - \phi(f_2)\|_\infty \leq |\lambda| \int_0^1 |K|(x, y)|f_1(y) - f_2(y)|dy$, alors $\|\phi(f_1) - \phi(f_2)\|_\infty \leq M|\lambda| \|f_1 - f_2\|_\infty$ Comme $M|\lambda| < 1$, alors ϕ est une contraction stricte de rapport $M|\lambda|$ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Les hypothèses du théorème de PICARD sont toutes satisfaites, alors il existe une unique application $f \in E$, telle que $\phi(f) = f$. Donc, $g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$, pour tout x dans $[0, 1]$.

Partie IV :

7.(a) Soient M, M' deux points distincts de la droite (BC) avec $M \neq C$ et $M' \neq C$, on a alors ,

$\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{MC}\| \cdot |\cos(c)| = |(\vec{AC} | \vec{MC})| = |(\vec{AC} | P_M \vec{C})| = \|\vec{AC}\| \cdot \|P_M \vec{C}\|$ alors $MC \cdot |\cos(c)| = P_M C$. De même $M'C \cdot |\cos(c)| = P_{M'} C$, alors $|\cos(c)| = \frac{P_M C}{MC} = \frac{P_{M'} C}{M'C} = \frac{P_M C - P_{M'} C}{MC - M'C} = \frac{P_M P_{M'}}{MM'}$ (valable pour $M' \neq C$).

(b) On refait le même calcul que dans (a), $|\cos(b)| = \frac{Q_M Q_{M'}}{P_M P_{M'}}$ et $|\cos(a)| = \frac{R_M R_{M'}}{Q_M Q_{M'}}$. Donc, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$, $M(x, 0)$ et $M'(x', 0)$, vérifient $R_M R_{M'} = k M M'$ où $k = |\cos(a) \cos(b) \cos(c)|$. Donc, $|\varphi(x) - \varphi(x')| = k|x - x'|$. Le triangle (ABC) étant non triviale, alors $k \in [0, 1[$ et φ est une contraction stricte de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On en déduit qu'il existe un unique point M de la droite (BC) tel que $R_M = M$. Le lecteur prendra soin de continuer la déduction.