

I - Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

I.A - On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, B une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et M la matrice de u dans cette base. [u est autoadjoint si et seulement si M est symétrique].

De plus u et M ont le même spectre, $sp(u) = sp(M)$. supposons alors que M est symétrique.

[u est défini positif $\Leftrightarrow sp(u) = sp(M) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$].

I.A.2) Si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors S est symétrique et $sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors S est inversible et S^{-1} est symétrique, et puisque S est diagonalisable, $sp(S^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \text{ tq } \lambda \in sp(S)\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'où $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.B - Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif tel que $v^2 = u$.

Soit $\lambda \in sp(u)$. $uv = v^3 = vu$, alors $\ker(u - \lambda Id)$ est stable par v . Notons v_λ la restriction de v à $\ker(u - \lambda Id)$. Puisque v est diagonalisable, alors v_λ est aussi diagonalisable, et si μ est une valeur propre de v_λ alors il existe un vecteur non nul x de $\ker(u - \lambda Id)$ tel que $v(x) = \mu x$ et $u(x) = \mu^2 x = \lambda x$. Mais $\mu > 0$, alors $\mu = \sqrt{\lambda}$ et $v_\lambda = \sqrt{\lambda} Id_{\ker(u - \lambda Id)}$.

I.B.2) Puisque u est diagonalisable, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} \ker(u - \lambda Id)$, alors $v = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} v_\lambda$.

C'est à dire que : $\forall \lambda \in sp(u) ; \forall x \in \ker(u - \lambda Id) ; v(x) = \sqrt{\lambda} . x$

Reciproquement, pour ce v ainsi défini, on a : $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = u$.

u est autoadjoint, donc diagonalisable et ses sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Il existe alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la somme directe, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} \ker(u - \lambda Id)$ dans laquelle la matrice de v est diagonale à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$.

v est alors bien autoadjoint défini positif vérifiant : $v^2 = u$. D'où l'existence et l'unicité de v .

I.B.3) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u , et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplctés respectives, il existe une base orthonormale B de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale (par blocs) donnée par : $M_B(u) = diag(\lambda_1 I_{m_1}, \lambda_2 I_{m_2}, \dots, \lambda_p I_{m_p})$, alors par unicité de v , on a :

$$M_B(v) = diag(\sqrt{\lambda_1} I_{m_1}, \sqrt{\lambda_2} I_{m_2}, \dots, \sqrt{\lambda_p} I_{m_p}).$$

Soient $L_1, \dots, L_p$ les polynômes de Lagrange associés au réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

C'est à dire : $\forall i \in [[1, p]] ; L_i(X) = \prod_{j=1; j \neq i}^p \left(\frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$. on a : $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$.

Posons : $Q(X) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(X)$. Q est un polynôme vérifiant : $\forall i \in [[1, p]] ; Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

Donc $Q(M_B(u)) = M_B(v)$ c'est à dire encore : $v = Q(u)$.

I.C - Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

I.C.1) tAA est symétrique, et $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) ; {}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)AX > 0$ pour $X \neq 0$, car dans ce cas $AX \neq 0$, puisque A est inversible. D'où ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.2) D'après **I.B**) il existe une unique matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tAA = S^2$.

Posons : $O = AS^{-1}$, ${}^tOO = S^{-1}({}^tAA)S^{-1} = S^{-1}(S^2)S^{-1} = I_n$, alors $O \in O(n)$.

Reciproquement si $(O, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que : $A = OS$, alors ${}^tAA = S^2$ et $O = AS^{-1}$.

D'où l'existence et l'unicité de $(O, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

$$\text{I.C.3)} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; {}^tAA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Notons : $M = {}^tAA$ et Le polynôme caractéristique de M est :

$$\chi_M(X) = (36 - X)(4 - X)(16 - X).$$

Les sous espaces propres de M sont :

$$E_{36}(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; E_4(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; E_{16}(M) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Les vecteurs } X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont deux à deux orthogonaux, alors par unicité de S , on a : $S = P\Delta P^{-1}$.

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \text{diag}(6, 2, 4).$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

I.D.1) Soit $M \in O(n)$, les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, alors

$\forall i, j \in [[1, n]] ; |m_{ij}| \leq 1$ et donc $\|M\| \leq n^2$, de plus $I_n \in O(n)$, alors $O(n)$ est une partie non vide bornée de l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, alors pour montrer que c'est un compact, il suffit de montrer que $O(n)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

L'application $[X \mapsto F(X) = {}^tXX]$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, car les coefficients de tXX sont des polynômes aux coefficients de X . $O(n) = F^{-1}(\{I_n\})$ est donc un fermé comme image réciproque par une application continue d'un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

I.D.2) $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, puisque sous espace vectoriel de dimension finie, il suffit alors de montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.

Soit $(A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de $S_n^+(\mathbb{R})$ convergente vers $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $[M \mapsto {}^tMXM]$ est une forme linéaire continue sur $S_n(\mathbb{R})$.

$\forall q \in \mathbb{N} ; {}^tXA_qX \geq 0$, alors par passage à la limite ${}^tXAX \geq 0$. D'où $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

I.D.3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, le nombre des valeurs propres de A est fini, alors il existe un entier non nul N tel que : $\forall q \geq N ; \frac{1}{q} \notin \text{sp}(A)$ ou encore $(A - \frac{1}{N+p}I_n)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A . D'où $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

I.D.4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, d'après la question précédente, il existe une suite $(A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A , alors d'après **I.C.2)** il existe deux suites $(O_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de $O(n)$ et $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que : $\forall q \in \mathbb{N} ; A_q = O_q S_q$.

Mais d'après **I.D.1)** $O(n)$ est compact, alors il existe une sous suite $(O_{\varphi(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $O \in O(n)$. Mais $\forall q \in \mathbb{N} ; S_{\alpha(q)} = {}^tO_{\alpha(q)}A_{\alpha(q)} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} {}^tOA = S$.

Mais $(S_{\alpha(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$ alors d'après **I.D.2** $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Ce couple n'est pas unique, voici un contre exemple :

$O = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ et $S = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, n-1)$.

$O \neq I_n$, O et I_n sont dans $O(n)$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $OS = I_n S = S$.

I.E - Soit φ l'application de $O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(O, S) = OS$.

D'après **I.C.2** tout élément A de $GL_n(\mathbb{R})$ admet un et un seul antécédent par φ , alors φ est bijective. De plus φ est la restriction d'une application bilinéaire en dimension finie, alors φ est continue.

Soit $(A_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$, convergente vers $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

On pose : $(O, S) = \varphi^{-1}(A)$ et $\forall q \in \mathbb{N}$; $(O_q, S_q) = \varphi^{-1}(A_q)$.

$\forall q \in \mathbb{N}$; ${}^t A_q A_q = S_q^2 \xrightarrow{q \rightarrow \infty} {}^t A A = S^2$.

$\forall q \in \mathbb{N}$; $S_q = {}^t O_q A_q$, alors pour la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

$\|S_q\| = \|A_q\|$, alors la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est bornée dans un espace vectoriel de dimension finie, alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, cette suite admet une sous suite $(S_{\alpha(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ convergente vers une certaine matrice $S' \in S_n^+(\mathbb{R})$.

La suite $(S_{\alpha(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers $S^2 = S'^2$ qui est inversible, alors $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

D'où d'après **I.B**) $S = S'$. On vient de montrer que S est la seule valeur d'adhérence de la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$. Montrons que $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers S .

Par l'absurde supposons que la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers S .

Il existe $\varepsilon > 0$, et une sous suite $(S_{\beta(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall q \in \mathbb{N}$; $\|S - S_{\beta(q)}\| \geq \varepsilon$.

D'après ce qui précède $(S_{\beta(q)})_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc admet une valeur d'adhérence, qui est aussi valeur d'adhérence de la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$, donc ne peut être que S .

ceci est absurde car $\forall q \in \mathbb{N}$; $\|S - S_{\beta(q)}\| \geq \varepsilon$.

Finalement la suite $(S_q)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers S et par conséquent, la suite $(S_q^{-1})_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers S^{-1} .

En effet : l'application $[M \mapsto M^{-1}]$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

La suite $(O_q)_{q \in \mathbb{N}} = (A_q S_q^{-1})_{q \in \mathbb{N}}$ converge alors vers $AS^{-1} = O$.

Finalement $\lim_{q \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(A_q) = \varphi^{-1}(A)$, φ^{-1} est séquentiellement continue sur $GL_n(\mathbb{R})$ donc continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

II - Deux applications

II.A - Première application

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $UU^* = I_n$ et $A = UBU^{-1}$.

II.A.1) $U^{-1} = U^* = {}^t \bar{U} \Rightarrow \bar{U} = {}^t(U^{-1}) \Rightarrow {}^t A = \bar{U}({}^t B){}^t U$.

Mais A est réelle alors ${}^t A = \overline{\bar{U}({}^t B){}^t U} = U({}^t B){}^t \bar{U} = U({}^t B)U^{-1}$.

II.A.2) On note X, Y les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que : $U = X + iY$.

a) $R(t) = \det(X + tY)$ définit une fonction polynôme, non nulle puisque $R(i) \neq 0$, et donc admet un nombre fini de zéros réels. D'où il existe un réel μ tel que : $R(\mu) \neq 0$.

b) $AU = UB$, alors en séparant parties réelles et imaginaires, on obtient : $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) On pose : alors $P = X + \mu Y \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AP = PB$ c'est à dire : $A = PBP^{-1}$.

De même, on a : ${}^t AU = U^t B$ alors ${}^t AX = X^t B$ et ${}^t AY = Y^t B$ et donc ${}^t AP = P^t B$.

D'où $A = PBP^{-1}$ et ${}^t A = P^t B P^{-1}$

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$ et ${}^tPP = S^2$.

Calculons A^2 de deux façons, $A^2 = PB^2P^{-1} = (P^tBP^{-1})PBP^{-1} = {}^tP^{-1}B^tPPBP^{-1}$

$PB^2P^{-1} = {}^tP^{-1}BS^2BP^{-1}$. On multiplie par tP à gauche et par P à droite.

On obtient alors $S^2B^2 = BS^2B$. Si B est inversible, on a évidemment $BS^2 = S^2B$.

Dans le cas général, soit ν un réel qui n'est pas valeur propre de B , et posons :

$$B' = B - \nu I_n \text{ et } A' = A - \nu I_n$$

Tout ce qui précède dans cette application reste vrai en remplaçant A par A' et B par B' .

B' étant inversible, alors $B'S^2 = S^2B'$ et par conséquent : $BS^2 = S^2B$.

Montrons maintenant que $BS = SB$.

D'après **I.B.3**), il existe un polynôme Q tel que $Q(S^2) = S$, d'où $BS = SB$.

b) D'après la question précédente, $B = SBS^{-1}$, alors $A = PBP^{-1} = OSBS^{-1}O = OB^tO$.

II.B - Seconde application

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence

d'une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$ au système : (*)
$$\begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = 0_n \end{cases}.$$

II.B.1) Supposons que le système admet une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} ; {}^tZ {}^tAAZ + {}^tZ {}^tXXZ = {}^tZZ.$$

Or ${}^tXX \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^tZ {}^tXXZ > 0$ et donc $\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} ; {}^tZ(I_n - {}^tAA)Z > 0$.

$I_n - {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $sp(I_n - {}^tAA) = \{1 - \lambda \text{ tq } \lambda \in sp({}^tAA)\} \subset \mathbb{R}_+^*$. D'où $sp({}^tAA) \subset [0, 1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que $sp({}^tAA) \subset [0, 1[$.

a) D'après **I.D.4**) Tout $X \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit d'une unique façon sous la forme : $X = UH$ avec $(U, H) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$$b) {}^tXX = H^2 = I_n - {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Puisque $I_n - {}^tAA \in S_n(\mathbb{R})$ et $sp(I_n - {}^tAA) = \{1 - \lambda \text{ tq } \lambda \in sp({}^tAA)\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Alors d'après **I.B**) il existe une unique matrice $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que : $H^2 = I_n - {}^tAA$.

c) Fixons alors le H de la question précédente, et Posons $X = UH$ avec $U \in O(n)$.

Il s'agit alors de trouver $U \in O(n)$ tel que : ${}^tAUH - H^tUA = 0_n$ c-à-d $B = {}^tAUH$ est symétrique.

Selon **I.D.4**) on peut écrire $A = OS$ avec $(O, S) \in O(n) \times S_n^+(\mathbb{R})$. Posons $U = O$, alors $B = SH$.

${}^tAA + {}^tXX = I_n = S^2 + H^2$, alors S^2 et H^2 commutent, et en appliquant la technique de **I.B.3**)

à S et à H , on a : $SH = HS$, c'est à dire $B = {}^tB$.

III - Valeurs propres d'une matrice

$$\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose : } A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$$

Soit le polynôme réel : $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

III.A - Soit $p \geq 3$. $P_p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$

On développe suivant la première ligne.

$$P_p(x) = (x-2)P_{p-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x).$$

III.B - Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2-x| < 2$, $\frac{2-x}{2} \in]-1; 1[$ et l'application $[\theta \mapsto \cos(\theta)]$ est une bijection de $]0, \pi[$ vers $] -1; 1[$, alors il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que : $(2-x) = 2 \cos(\theta)$.

$$P_1(x) = x-2 = -2 \cos(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)};$$

$$P_2(x) = (x-2)^2 - 1 = \frac{4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin(2\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, montrons que $P_p(x) = (-1)^p \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Ceci est vrai pour $p \in \{1, 2\}$, supposons que c'est vrai pour $p \in [[1, q-1]]$ tel que $q \geq 3$.

$$P_q(x) = (x-2)P_{q-1}(x) - P_{q-2}(x) = -2 \cos(\theta) (-1)^{q-1} \frac{\sin(q\theta)}{\sin(\theta)} - (-1)^q \frac{\sin((q-1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$P_q(x) = (-1)^q \left(2 \cos(\theta) \frac{\sin(q\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((q-1)\theta)}{\sin(\theta)} \right) = (-1)^q \frac{\sin((q+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

N.B : On a utilisé la formule trigonométrique : $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

III.C - $P_p(x) = \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)} = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{k\pi}{p+1}$ avec $k \in [[1, p]]$.

$P_p(x) = 0$ si et seulement si $x = 2(1 - \cos(\frac{k\pi}{p+1})) = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})$ avec $k \in [[1, p]]$.

Les valeurs propres de A_p sont les $\lambda_{k,p} = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})$ avec $k \in [[1, p]]$.

III.D - $A_p \in M_p(\mathbb{R})$ et admet p valeurs propres réelles distinctes, alors A_p est diagonalisable.

Fixons $k \in [[1, p]]$ et posons : $X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{p,k} \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$;

$$A_p X_k = \lambda_{k,p} X_k \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{1,k} - x_{2,k} = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)}) x_{1,k} \\ -x_{1,k} + 2x_{2,k} - x_{3,k} = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)}) x_{2,k} \\ \dots \\ -x_{p-2,k} + 2x_{p-1,k} - x_{p,k} = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)}) x_{p-1,k} \\ -x_{p-1,k} + 2x_{p,k} = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)}) x_{p,k} \end{cases}.$$

$$A_p X_k = \lambda_{k,p} X_k \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2,k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) x_{1,k} \\ x_{1,k} + x_{3,k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) x_{2,k} \\ \dots \\ x_{p-2,k} + x_{p,k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) x_{p-1,k} \end{cases}.$$

On prend $x_{1,k} = 1$; $x_{2,k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)$ et pour $3 \leq q \leq p$: $x_{q,k} - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) x_{q-1,k} + x_{q,k} = 0$.

L'équation caractéristique de cette suite est :

$$t^2 - 2t \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) + 1 = 0 = (t - \exp(i \frac{k\pi}{p+1}))(t - \exp(-i \frac{k\pi}{p+1})).$$

$$x_{q,k} = \alpha_k \cos\left(q \frac{k\pi}{p+1}\right) + \beta_k \sin\left(q \frac{k\pi}{p+1}\right)$$

$$\begin{cases} x_{1,k} = \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) = 1 \\ x_{2,k} = \alpha_k \cos\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \end{cases}.$$

$$\Delta = \sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \cos\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right).$$

$$\alpha_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) & \sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) \end{vmatrix}}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)} = 0 \text{ et } \beta_k = \frac{\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) & 1 \\ \cos\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) & 2 \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \end{vmatrix}}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)}.$$

$$x_{q,k} = \frac{\sin\left(q \frac{k\pi}{p+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)}.$$

Donc un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{k,p} = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right)$ avec $k \in [[1, p]]$ est

$$Z_k = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \sin\left(2 \frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left((p-1) \frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \sin\left(p \frac{k\pi}{p+1}\right) \end{pmatrix}.$$

IV - Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

IV.A - On muni $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire, $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(^tXY)$.

Il existe une unique matrice $A' \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$; $f(M) = \langle A', M \rangle = \text{Tr}(^tA'M)$.

La matrice $A = ^tA'$ répond bien à la question.

IV.B.1) - f est une forme linéaire sur l'espace vectoriel normé de dimension finie $M_n(\mathbb{R})$ donc continue, en particulier continue sur le compact $O(n)$ à valeurs réelles, donc bornée et atteint ses bornes sur $O(n)$.

D'où l'existence de $M_n = \sup(\{f(O), O \in O(n)\})$.

IV.B.2) tAA est symétrique positive.

IV.B.3) D'après **I.D.4)** il existe $(O_1, S_1) \in O(n) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que : $A = O_1 S_1$. alors $^tAA = S_1^2$.

S_1 est diagonalisable par une matrice orthogonale T et $S_1 = T D ^tT$ où $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n})$.

$\{f(O), O \in O(n)\} = \{Tr(AO), O \in O(n)\} = \{Tr(O_1 T D^t T O), O \in O(n)\}$
 $\{f(O), O \in O(n)\} = \{Tr(D^t T O O_1 T), O \in O(n)\}. (\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}) ; Tr(XY) = Tr(YX))$
 L'application $[O \mapsto {}^t T O O_1 T]$ est une bijection de $O(n)$ vers $O(n)$.
 Alors : $\{f(O), O \in O(n)\} = \{Tr(D\Omega), \Omega \in O(n)\}$.
 D'où $M_n = \sup(\{Tr(D\Omega), \Omega \in O(n)\})$.

IV.B.4 Soit $\Omega \in O(n)$; $\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. $Tr(D\Omega) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \Omega_{k,k} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$, car $\forall k \in [[1, n]] ; \Omega_{k,k} \leq 1$,
 puisque les colonnes de Ω sont de norme 1. Mais ce majorant est atteint pour $\Omega = I_n$.
 D'où $M_n = \sup(\{Tr(D\Omega), \Omega \in O(n)\}) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k}$.

IV.C - Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}) ; f(M) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n m_{i,j}.$$

IV.C.1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

IV.C.2) Soient $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A
 dans la base canonique. $\forall j \in [[1, n]] ; w(e_j) = \sum_{k=1}^j e_k$ pour $j \geq 2$, $w(e_j) - w(e_{j-1}) = w(e_j - e_{j-1}) = e_j$.
 D'où $w^{-1}(e_1) = e_1$ et pour $j \geq 2$, $w^{-1}(e_j) = e_j - e_{j-1}$.

IV.C.3) Posons $T = A^{-1} {}^t A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de T est :

$$Q_n(x) = \det(xI_n - T) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Utilisons encore les notations et les résultats de la partie **III.B)**

Pour $n \geq 3$, développons suivant la dernière colonne : $Q_n(x) = (x-1)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.

Posons encore $2-x = 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

$$Q_n(x) = (1-2\cos(\theta))(-1)^{n-1} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - (-1)^n \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sin(\theta)} (2\sin(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta))$$

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sin(\theta)} (\sin(n+1)\theta - \sin(n\theta)) = (-1)^n \frac{\cos((n+\frac{1}{2})\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})}.$$

$$Q_n(x) = 0 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi. (k \in [[0, n-1]]) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2k\pi}{2n+1}. (k \in [[0, n-1]])$$

Les valeurs propres de $A^{-1} {}^t A^{-1}$ sont les

$$\nu_{n-k} = 2(1 - \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1})) = 2(1 + \cos(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1})) = 2(1 + \cos(\frac{2(n-k)\pi}{2n+1})) = 4\cos^2(\frac{(n-k)\pi}{2n+1}).$$

Les valeurs propres de $A^{-1} {}^tA^{-1}$ sont les $\nu_k = 4 \cos^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ pour $k \in [[1, n]]$.

IV.C.4) D'après la question précédente, les valeurs propres de tAA sont les

$$\mu_k = \frac{1}{4 \cos^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \text{ pour } k \in [[1, n]]. \text{ D'où selon IV.B.4) } M_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cos(\frac{k\pi}{2n+1})}.$$

IV.C.5) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[; \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ et $x - \frac{x^3}{6} \geq x(1 - \frac{\pi^2}{24}) > 0$.

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} \leq M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \sin(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} (1 - \frac{1}{6} (\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})^2)} = S_n$$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{6^p} (\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})^{2p-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} + T_n$$

$$\text{D'une part : } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} = \frac{(2n+1)}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-\frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \ln(n).$$

$$\text{D'autre part, } 0 \leq T_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{6^p} (\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})^{2p-1} \leq \frac{n}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{24}\right)^p \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{n}{\pi} \ln(n)\right).$$

$$\text{Finalement } \boxed{M_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \ln(n)}.$$