Concours commun des Ecoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Correction de l'épreuve commune ; 2007

Olivier HALGAND

Premier problème

Partie A - Généralités

1. • La fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exp est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composée et par produit, on en déduit que :

$$\boxed{f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}).}$$

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$, donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t\,f'(t) = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = g(t).}$$

2. On a :

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t} \underset{u=-\frac{1}{t}}{=} \lim_{u\to-\infty} (-u\,\mathrm{e}^u) = 0,$$

par croissances comparées. Donc :

$$\boxed{\text{on peut prolonger } g \text{ par continuité en 0 en posant : } g(0) = 0.}$$

De plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(t) = \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} - t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t^3} = (1-t)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t^3}.$$

Or : $\lim\limits_{t\to 0}(1-t) = 1$ et, comme précédemment :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t^3} \underset{u=-\frac{1}{t}}{=} \lim_{u\to-\infty} (-u^3\,\mathrm{e}^u) = 0.$$

Ainsi, par produit, on a :

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = 0.$$

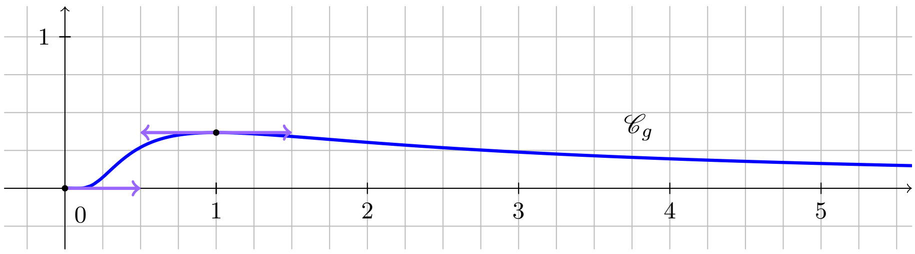
D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on peut en déduire que :

$$\boxed{\text{le prolongement } g \text{ est dérivable en 0 et : } g'(0) = 0.}$$

3. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$, par produit on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

et la courbe suivante :



4. **a)** Par définition :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(t) = \int_1^t g\left(\frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u = \int_1^t u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

On effectue une intégration par parties, les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(t) = \Big[-u\,\mathrm{e}^{-u}\Big]_1^t - \int_1^t -\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left(-t\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \Big[\mathrm{e}^{-u}\Big]_1^t = -t\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{\mathrm{e}} - \left(\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right),$$

donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(t) = -(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{2}{\mathrm{e}}.}$$

b) On pose : $u = t - 1$. Alors : $\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-u-1}$ avec :

$$\mathrm{e}^{-u-1} \underset{0}{=} \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-u} \underset{0}{=} \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)\right).$$

De plus : $1 + t = u + 2$, donc :

$$(-u-2)\,\mathrm{e}^{-u-1} \underset{0}{=} (-u-2)\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{\mathrm{e}}\left(-2 + u - \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)\right).$$

D'où :

$$\boxed{H(x) \underset{1}{=} \frac{1}{\mathrm{e}}(t-1) - \frac{1}{6\,\mathrm{e}}(t-1)^3 + \mathrm{o}\Big((t-1)^3\Big).}$$

5. **a)** On a les équivalences :

$$f(t) = \frac{t}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \frac{1}{n}.$$

Or, la fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ avec : $g\big(]0,1[\big) = \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$. Or, si $n \geqslant 3 > \mathrm{e}$, alors $\frac{1}{n} \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists\,!\,\alpha_n \in]0,1[, \quad g(\alpha_n) = \frac{1}{n}.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3, \text{ il existe un unique } \alpha_n \in]0,1[\text{ tel que : } f(t) = \frac{t}{n}.}$$

b) Pour tout $n \geqslant 3$ on a : $g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $g(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Donc : $g(\alpha_n) > g(\alpha_{n+1})$. Or, g étant strictement croissante sur $]0,1[$, cela implique que $\alpha_n > \alpha_{n+1}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 3} \text{ est strictement décroissante.}}$$

De même, $g(\beta_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\beta_{n+1})$ et g étant strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, on a : $\beta_n < \beta_{n+1}$. D'où :

$$\boxed{\text{la suite } (\beta_n)_{n\geqslant 3} \text{ est strictement croissante.}}$$

c) • Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante et minorée par 0, elle est convergente. Supposons qu'elle converge vers une limite $\ell \in \,]0,1[$. Alors, puisque g est continue sur $]0,1[$, on en déduit que le suite $\Big(g(\alpha_n)\Big)_{n\geqslant 3}$ converge vers $g(\ell)$, avec : $g(\ell) \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$. Or, ceci est faux car, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et donc : $\Big(g(\alpha_n)\Big)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0. On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 3} \text{ converge vers } 0.}$$

• De même, le suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ étant strictement croissante, soit elle est majorée et elle converge alors vers sa borne supérieure, soit elle n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers $\ell \in \,]1,+\infty[$. Alors la suite $\Big(g(\beta_n)\Big)_{n\geqslant 3}$ converge vers $g(\ell) \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ ce qui est faux puisque : $g(\beta_n) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (\beta_n)_{n\geqslant 3} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Partie B - Etude d'une courbe paramétrée

6. Par équivalences, en notant Δ la première bissectrice :

$$M(t) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\text{il existe donc un unique point } M(t) \text{ appartenant à la première bissectrice, pour } t = 1.}$$

7. La pente de la droite $\Big(OM(t)\Big)$ est : $p(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)} = t$. Donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} p(t) = 0 \qquad \text{et :} \qquad \lim_{x\to+\infty} p(t) = +\infty.}$$

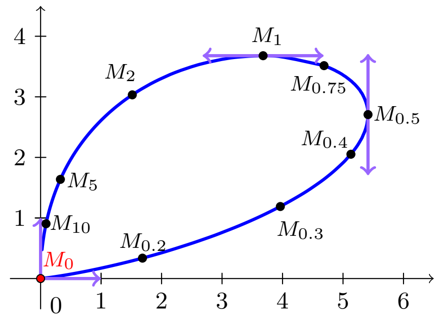
8. La fonction $x = f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad x'(t) = \frac{-2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} + \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = (1-2t)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t^4}.$$

Par croissances comparées, de même qu'en **2.** : $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} x'(t) = 0$. D'où le tableau :

t	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	e^{-1}	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$2e^{-2}$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	

9. On obtient donc la courbe suivante :



Partie C - Fonctions définies par des intégrales

10. On a bien : $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = 0$.
De plus : $0.f'(0) = 0 = g'(0)$, donc :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ avec } f(0)=0, \text{ et alors : } f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).}$$

11. a) Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$, donc elles admettent des primitives sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\boxed{\text{les intégrales } F \text{ et } G \text{ sont bien définies.}}$$

De plus, en effectuant une intégration par parties :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - G(x).}$$

b) Puisque g est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc : $\forall x > 1, G(x) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. De plus, d'après la relation de Chasles :

$$G(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant G(1) + \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

car si $x > 1$ et si $t \in [1, x]$, alors : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \leqslant 1$. On en déduit donc :

$$\boxed{\forall x \in\,]1, +\infty[, \quad 0 \leqslant G(x) \leqslant C + \ln x \quad \text{avec : } C = G(1).}$$

c) On en déduit donc que :

$$\forall x > 1, \quad 0 \leqslant \frac{G(x)}{x} \leqslant \frac{C + \ln x}{x}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{C+\ln x}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x} = 0$, ce qui signifie que :

$$\boxed{\text{au voisinage de } +\infty,\ G(x) \text{ est négligeable devant } x.}$$

On en tire donc, d'après **11.a.**, que :

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - G(x)}{x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \frac{G(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et donc que :

$$\boxed{F(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x.}$$

12. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation est équivalente à : $y' + \dfrac{1}{x^2} y = 1$.

• Une primitive de : $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est : $x \mapsto -\frac{1}{x}$, donc les solutions de l'équation homongène sont :

$$y_h : x \mapsto C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\ C \in \mathbb{R}.$$

• Pour déterminer une solution particulière, on utilise la métode de la variation de la constante. On considère donc : $y_p : x \mapsto C(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Alors :

$$y_p'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - C(x)\,\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On en déduit donc que :

$$y_p'(x) + \frac{1}{x^2} y_p(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \text{donc :} \quad C'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},$$

et donc :

$$C(x) = F(x) \text{ convient, d'où :} \quad y_p(x) = F(x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

• Finalement :

$$\boxed{\text{les solutions sur } \mathbb{R}_+^* \text{ de l'équation différentielle sont : } y : x \mapsto \Big(F(x) + C\Big)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.}$$

Partie D - Etude qualitative d'une équation différentielle

13. En $x = 0$, l'équation devient : $0.y'(0) + y(0) = 0$, donc :

$$\boxed{u_0 = y(0) = 0.}$$

14. En dérivant (E), on obtient :

$$x^2 y''(x) + 2x\,y'(x) + y'(x) = 2x, \quad \text{puis :} \quad x^2 y'''(x) + 4xy''(x) + 2y'(x) + y''(x) = 2.$$

En $x = 0$, ces deux équations donnent successivement :

$$\boxed{u_1 = y'(0) = 0 \quad \text{et :} \quad u_2 = y''(0) = 2.}$$

15. Supposons que $y : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ soit solution de (E). Alors : $y(0) = \gamma = 0$. De plus, $y'(x) = 2\alpha x + \beta$ donc : $y'(0) = \beta = 0$. Enfin : $y''(x) = 2\alpha$, avec : $y'''(0) = 2$, donc : $\alpha = 1$. On a donc nécessairement : $y(x) = x^2$.

Mais alors : $x^2 y'(x) + y(x) = x^2.2x + x^2 = 2x^3 + x^2 \neq x^2$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'équation différentielle } (E) \text{ n'admet pas de solution de la forme } y : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma.}$$

16. a) Posons $u : x \mapsto x^2$. Alors u et y étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (uy')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} (y')^{(n-k)},$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u'(x) = 2x, \quad u''(x) = 2, \quad \forall n \geqslant 3,\ u^{(n)}(x) = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 3, \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad (uy')^{(n)}(x) &= u^{(0)}(x) y'^{(n)}(x) + n u^{(1)}(x) y'^{(n-1)}(x) + \tfrac{n(n-1)}{2} u^{(2)}(x) y'^{(n-2)}(x) \\
&= x^2 y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1) y^{(n-1)}(x).
\end{aligned}$$

En injectant dans l'équation (E), on obtient donc :

$$\forall n \geqslant 3, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left[x^2 y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x)\right] + y^{(n)}(x) = 0,$$

soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^2 y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.}$$

Pour $x = 0$, on obtient donc, pour $n \geqslant 3$: $y^{(n)}(0) + n(n-1)y^{(n-1)}(0) = 0$, d'où :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad u_n = -n(n-1)u_{n-1}.}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n = (-1)^n\, n!\,(n-1)!$.

- **Initialisation** : pour $n = 2$ on a : $(-1)^2\, 2!\, 1! = 2 = u_2$; la propriété est initialisée.

- **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n. Alors :

$$u_{n+1} = -(n+1)n\, u_n = -(n+1)n.(-1)^n\, n!\,(n-1)! = (-1)^{n+1}(n+1)!\, n!$$

La propriété est donc héréditaire, et donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad u_n = (-1)^n\, n!\,(n-1)!}$$

Puisque y est supposée de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, la formule de Taylor permet d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \mathrm{o}(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}\, x^k + \mathrm{o}(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k\, k!\,(k-1)!}{k!}\, x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

et donc :

$$\boxed{y(x) \underset{0}{=} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, (k-1)!\, x^k + \mathrm{o}(x^n).}$$

Deuxième problème

Partie A - Etude d'un mouvement dans l'espace

1. Pour tout réel t, on a : $a(t) + c(t) = 0$ donc les coordonnées de $N(t)$ vérifient l'équation de P, donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad N(t) \in P.}$$

2. On a :

$$(x,y,z) \in P \cap Q \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = -x \\ y = 3 \end{cases}.$$

Ainsi :

$$\boxed{(x,y,z) \in D = P \cap Q \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, (x,y,z) = t(1,0,-1) + (0,3,0).}$$

De plus : $N(t) \in D \quad \Rightarrow \quad b(t) = \sin(t) = 3$, ce qui est impossible. Donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad N(t) \notin D.}$$

3. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)=\frac{\cos^2 t}{2}+\sin^2 t+\frac{\cos^2 t}{2}=\cos^2 t+\sin^2 t,$$

donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)=1.}$$

On en déduit donc que $N(t)$ appartient à la sphère S de centre O et de rayon 1. De plus, puisque $N(t) \in P$ d'après **1.**, on en déduit que $N(t)$ appartient à l'intersection de P et de la sphère S, c'est-à-dire à un cercle C. Or, il est clair que les points $(0,1,0)$ et $(0,-1,0)$ appartiennent à P et à S, et donc aussi à C. Comme ces deux points sont diamétralement opposés sur la sphère S, on en déduit que C est un grand cercle, et donc :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ le point } N(t) \text{ appartient au cercle } C=P\cap S, \text{ de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$$

4. La droite D est déterminée par le point $A(0,3,0)$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(1,0,-1)$. La distance de $N(t)$ à D est :

$$d\big(N(t),D\big)=\frac{\left\|\overrightarrow{AN(t)}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|},$$

avec :

$$\overrightarrow{AN(t)}=\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\sin(t)-3,\frac{-\cos t}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{donc :} \quad \overrightarrow{AN(t)}\wedge\overrightarrow{u}=\Big(3-\sin(t),0,3-\sin(t)\Big).$$

Donc :

$$d\big(N(t),D\big)^2=\frac{\Big(3-\sin t\Big)^2+0^2+\Big(3-\sin t\Big)^2}{1^2+0^2+(-1)^2}=(3-\sin t)^2.$$

D'où :

$$\boxed{d\big(N(t),D\big)=3-\sin t.}$$

La distance du point $N(t)$ au plan Q d'équation cartésienne : $x+y+z-3=0$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$ est :

$$d\big(N(t),Q\big)=\frac{\left|\frac{cos(t)}{\sqrt{2}}+\sin(t)+\frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}}-3\right|}{\|\overrightarrow{n}\|},$$

donc :

$$\boxed{d\big(N(t),Q\big)=\frac{3-\sin t}{\sqrt{3}}.}$$

On vérifie donc bien que leur rapport est constant : $\dfrac{d\big(N(t),D\big)}{d\big(N(t),Q\big)}=\sqrt{3}.$

5. Pour tout réel t :

$$\begin{aligned}
e^{it}+e^{i\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{i\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)} &= e^{it}+e^{it}\,e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{it}\,e^{-\frac{2i\pi}{3}}=e^{it}\left(1+e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)\\
&= e^{it}\left(1+2\mathcal{R}e\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\right)=e^{it}\left(1+2\times\frac{-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{it}+e^{i\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{i\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)}=0.}$$

6. L'isobarycentre des points $N(t)$, $N(t+2\pi/3)$, $N(t-2\pi/3)$ est le point $G(t)$ tel que :

$$3\overrightarrow{OG(t)}=\overrightarrow{ON(t)}+\overrightarrow{ON(t+2\pi/3)}+\overrightarrow{ON(t-2\pi/3)},$$

c'est-à-dire tel que :

$$3\overrightarrow{OG(t)} = \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}, \sin(t), \frac{-\cos(t)}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\cos(t+\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}}, \sin(t+\frac{2\pi}{3}), \frac{-\cos(t+\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}}\right)$$
$$+ \left(\frac{\cos(t-\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}}, \sin(t-\frac{2\pi}{3}), \frac{-\cos(t-\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}}\right) = (0,0,0).$$

Finalement,

$$\boxed{\text{l'isobarycentre des points } N(t),\ N(t+2\pi/3),\ N(t-2\pi/3) \text{ est le point } O.}$$

Partie B - Construction d'un polynôme

7. De manière évidente :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = \sin(t).}$$

8. Avec les formules de trigonométrie, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(t) = \frac{-\cos^2(t)\sin(t)}{2} = -\frac{\sin(t)}{2}\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) = -\frac{1}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(t)\cos(2t)$$
$$= \frac{1}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(3t)-\sin(t)}{2}\right),$$

d'où :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(t) = -\frac{1}{8}\sin(t) - \frac{1}{8}\sin(3t).}$$

9. D'une part :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d(t) = \frac{\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{2}} - \frac{\cos^2(t)}{2} - \frac{\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{2}} = -\frac{\cos^2(t)}{2}.$$

D'autre part, on peut aussi écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Big(a(t)+b(t)+c(t)\Big)^2 = a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)+2d(t), \quad \text{soit :} \quad \sin^2 t = 1 + 2d(t).$$

On obtient donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad d(t) = \frac{\sin^2 t - 1}{2} = -\frac{\cos^2 t}{2}.}$$

10. **a)** Pour $t = \frac{\pi}{2}$, on a : $a(t) = c(t) = 0$ et $b(t) = 1$. Donc, 0 est racine double de R, et ainsi :

$$\boxed{R'(0) = 0.}$$

b) En développant, on obtient :

$$R(X) = X^3 - \Big(a(t)+b(t)+c(t)\Big)X^2 + \Big(a(t)b(t)+b(t)c(t)+c(t)a(t)\Big)X - a(t)b(t)c(t),$$

et donc :

$$\boxed{R(X) = X^3 - s(t)\,X^2 + d(t)\,X - p(t) = X^3 - (\sin t)\,X^2 - \frac{\cos^2 t}{2}\,X + \frac{\sin t + \sin(3t)}{8}.}$$

Partie C - Endomorphismes à noyau imposé

11. On peut écrire :

$$P = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+z=0\Big\} = \Big\{(x,y,-x) \in \mathbb{R}^3\Big\} = \Big\{x(1,0,-1)+y(0,1,0)\Big\} = Vect\Big((1,0,-1),(0,1,0)\Big).$$

Donc :

$$\boxed{P \text{ est le plan vectoriel engendré par } \Big((1,0,-1),(0,1,0)\Big).}$$

12. D'après l'équation de Q, $(0,0,0) \notin Q$ donc Q n'est pas un plan vectoriel :

$$\boxed{Q \text{ est un plan affine.}}$$

13. Clairement, $\vec{\imath}\,'$ et $\vec{\jmath}\,'$ appartiennent à P et de plus :

$$\|\vec{\imath}\,'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+0^2+1^2} = 1, \quad \|\vec{\jmath}\,'\| = \|\vec{\jmath}\| = 1, \quad \vec{\imath}\,' \cdot \vec{\jmath}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 0.1 + \frac{-1}{\sqrt{2}}.0 = 0.$$

Enfin :

$$\vec{\imath}\,' \wedge \vec{\jmath}\,' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \vec{k}\,'.$$

Donc :

$$\boxed{\Big(\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,'\big) \text{ est une base orthonormale de } P, \text{ et } \vec{k}\,' \text{ est un vecteur normal unitaire à } P.}$$

Et donc :

$$\boxed{\Big(\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,', \vec{k}\,'\big) \text{ est une base orthonormale (directe) de l'espace } \mathbb{R}^3.}$$

14. La matrice de passage de la base B à la base B' est :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{et :} \qquad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Si les coordonnées de $\vec{e}$ dans la base B sont (x,y,z), et (x',y',z') dans la base B', alors on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-z}{\sqrt{2}} \\ y \\ \frac{x+z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Or, on a aussi :

$$\vec{e} \cdot \vec{\imath}\,' = \frac{x-z}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e} \cdot \vec{\jmath}\,' = y \quad \text{et :} \quad \vec{e} \cdot \vec{k}\,' = \frac{x+z}{\sqrt{2}}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{\vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{\imath}\,')\vec{\imath}\,' + (\vec{e} \cdot \vec{\jmath}\,')\vec{\jmath}\,' + (\vec{e} \cdot \vec{k}\,')\vec{k}\,'.}$$

15. **a)** D'après la linéarité de u, on peut écrire :

$$u(\vec{e}) = (\vec{e} \cdot \vec{\imath}\,')u(\vec{\imath}\,') + (\vec{e} \cdot \vec{\jmath}\,')u(\vec{\jmath}\,') + (\vec{e} \cdot \vec{k}\,')u(\vec{k}\,').$$

Or, puisque $P \subset Ker(u)$, on a : $u(\vec{\imath}\,') = u(\vec{\jmath}\,') = 0$, et donc :

$$\boxed{u(\vec{e}) = (\vec{e} \cdot \vec{k}\,')\vec{z}, \quad \text{avec :} \quad \vec{z} = u(\vec{k}\,').}$$

b) Réciproquement, supposons qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{z}$ donné tel que l'application $u : E \to E$ vérifie : $\forall \overrightarrow{e} \in E, u(\overrightarrow{e}) = (\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k}')\overrightarrow{z}$. Alors, d'après la bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f} \in E, \quad u(\lambda \overrightarrow{e} + \mu \overrightarrow{f}) &= \left((\lambda \overrightarrow{e} + \mu \overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{k}'\right)\overrightarrow{z} \\
&= \left(\lambda(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k}') + \mu(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k}')\right)\overrightarrow{z} \\
&= \lambda(\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} + \mu(\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} \\
&= \lambda u(\overrightarrow{e}) + \mu u(\overrightarrow{f})
\end{aligned}$$

Ainsi, u est linéaire. De plus :

$$u(\vec{\imath}') = (\vec{\imath}' \cdot \overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} = 0\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0} \quad \text{et :} \quad u(\vec{\jmath}') = (\vec{\jmath}' \cdot \overrightarrow{k}')\overrightarrow{z} = 0\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0},$$

donc : $P = Vect(\vec{\imath}', \vec{\jmath}') \subset Ker u$. Finalement :

$$\boxed{\text{on a bien } u \in \mathcal{L}(E) \text{ et : } P \subset Ker(u).}$$

c) D'après **15.a.**, on a :

$$P = Ker(u) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{z} = u(\overrightarrow{k}') \neq \overrightarrow{0}.$$

Dans ce cas, le théorème du rang nous permet d'affirmer que : $rg(u) = dim E - dim Ker(u) = 3 - 2 = 1$, et ainsi : $Im(u) = Vect(\overrightarrow{z})$.

Partie D - Matrices de projecteur

16. Puisque p est le projecteur orthogonal sur P, il s'agit du projecteur sur P parallèlement à $P^{\perp} = Vect(\overrightarrow{k}')$. On a donc :

$$p(\vec{\imath}') = \vec{\imath}', \quad p(\vec{\jmath}') = \vec{\jmath}' \quad \text{et :} \quad p(\overrightarrow{k}') = \overrightarrow{0},$$

d'où :

$$\boxed{\text{la matrice de } p \text{ dans la base } B' \text{ est : } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

17. Voir **14.**

18. **a)** Puisque p est un projecteur, on a : $p \circ p = p$ et donc, matriciellement :

$$\boxed{M^2 = M.}$$

b) Puisque M et I commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton avec : $\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = M$;

$$(M+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k I^{n-k} = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} M = I + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - 1\right) M,$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (M+I)^n = I + (2^n - 1)M.}$$

c) D'après la formule de changement de base, on a :

$$M = PM'P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

19. a) Par définition :

$$\mathscr{M} = \left\{M_{a,b} = aM + bI, , (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect(I, M).$$

De plus, de manière évidente, M et I ne sont par proportionnels donc :

$\boxed{(\mathscr{M}, +, .) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est } (I, M).}$

b) On peut écrire, d'après ce qui précède :

$$M_{a,b} = aM + bI = aPM'P^{-1} + bPIP^{-1} = P(aM' + bI)P^{-1}.$$

On en déduit donc que :

$$\det(M_{a,b}) = \det(P).\det(aM' + bI).\det(P^{-1}) = \det(aM' + bI) = \begin{vmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix},$$

donc :

$$\boxed{\det(M_{a,b}) = (a+b)^2 b.}$$

Or, une matrice est inversibble si, et seulement sison déterminant est non nul, donc :

$\boxed{M_{a,b} \text{ est inversible si, et seulement si : } b \neq 0 \text{ et } a + b \neq 0.}$

c) Puisque $M^2 = M$ on a :

$$M_{a,b}.M_{c,d} = (aM + bI)(cM + dI) = acM^2 + adM + bcM + bdI = (ac + ad + bc)M + bdI,$$

ou encore :

$$\boxed{M_{a,b}.M_{c,d} = M_{e,f} \quad \text{avec :} \quad e = ac + ad + bc \quad \text{et :} \quad f = bd.}$$

d) Avec $b(a+b) \neq 0$, on cherche c et d tels que : $M_{a,b}.M_{c,d} = I = M_{0,1}$. Donc : $ac+ad+bc = 0$ et $bd = 1$, d'où : $d = \dfrac{1}{b}$ et $c = \dfrac{-a}{b(a+b)}$. Finalement :

$$\boxed{\text{Si } M_{a,b} \text{ est inversible, alors : } M_{a,b}^{-1} = \frac{-a}{b(a+b)} M + \frac{1}{b} I.}$$