Les calculs demandés à la calculatrice seront fait avec Maple. Le package "linalg" est supposé chargé.

Préliminaire

```
> A1:=matrix(3,3,[4,0,14,3/2,1/2,6,-1,0,-7/2]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 14 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ -1 & 0 & \frac{-7}{2} \end{bmatrix}$$

P.1 – On vient de définir A_1, cherchons ses éléments propres :

```
> eigenvects(A1);
```

$$[\frac{1}{2}, 2, \{[0, 1, 0], [-4, 0, 1]\}], [0, 1, \{\left[\frac{-7}{2}, \frac{-3}{2}, 1\right]\}]$$

On a donc ici $\frac{1}{2}$ valeur propre double et 0 valeur propre simple.

On obtient aussi facilement à la main ces valeurs propres en développant le polynôme caractéristique, c'est à dire le déterminant de $A_1 - \lambda I_3$ selon la deuxième colonne.

$\det(A1 - \lambda I_3) = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 14 \\ -1 & -\frac{7}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{2}\right).$

Ceci donne bien $\frac{1}{2}$, valeur propre double et 0 valeur propre simple, le polynôme caractéristique est scindé.

A_1 est alors diagonalisable si et seulement si le sous espace propre relatif à la valeur propre double est bien de dimension 2.

Cela revient à chercher le noyau de $A_1 - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 14 \\ \frac{3}{2} & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$

Cette matrice est de rang 1 et a donc un noyau de dimension 2. A_1 est diagonalisable.

P.2 – On entre la matrice A_2 et on cherche ses éléments propres :

```
> A2:=matrix(3,3,[3,2*I,6*I,-2*I,3,7,2*I,-2,-5]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 3 & 2I & 6I \\ -2I & 3 & 7 \\ 2I & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(A2);
```

$$[I, 1, \{\left[\frac{1}{5} + \frac{3}{5}I, 1, \frac{-3}{5} + \frac{1}{5}I\right]\}], [-I, 1, \{\left[-I, \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}I, 1\right]\}], [1, 1, \{[1, I, 0]\}]$$

On a trois valeurs propres simples $i, -i, 1$, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A_2 est diagonalisable.

P.3 – On fait la même chose pour A_3.

```
> A3:=matrix(3,3,[1,1/2,1/2,1,3/2,3/2,-1,-1,-1]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(A3);
```

$$[\frac{1}{2}, 1, \{[1, -1, 0]\}], [1, 1, \{[1, 1, -1]\}], [0, 1, \{[0, 1, -1]\}]$$

Ceci nous permet de définir une matrice de passage, n'oublions pas que les vecteurs de Maple sont bien des vecteurs colonne.

```
> P3:=matrix(3,3,[1,1,0,-1,1,1,0,-1,-1]);
```

$$P3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vérifions que tout est correct :

```
> D3:=evalm(P3^(-1)&*A3&*P3);
```

$$D3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On nous demande explicitement P_3^{-1} :

```
> P3moins1:=evalm(P3^(-1));
```

$$P3moins1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Première partie

1 – On a : $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad V_q[i, j] + \lambda\, W_q[i, j] \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} S[i, j] + \lambda\, T[i, j] = (S + \lambda T)[i, j].$

Par définition de la limite d'une suite de matrices, on a bien le résultat demandé.

2 – $\forall i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, r]\!], \quad \left(V_q W_q\right)[i, j] = \sum_{k=1}^{p} V_q[i, k] W_q[k, j] \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{p} S[i, k] T[k, j] = (ST)\,[i, j].$

Comme à la question précédente, il suffit alors d'appliquer la définition de la limite d'une suite de matrices.

3 – On applique le résultat précédent à $\left(A_q\right)$ et à la suite constante (P), ce qui donne $A_q P \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} BP$.

On applique maintenant de nouveau ce résultat aux suites $\left(P^{-1}\right)$ et $\left(A_q P\right)$,
ce qui donne $P^{-1} A_q P \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} P^{-1} BP$.

On applique encore le même résultat aux suites $\left(A_q\right)$ et (X), ce qui donne $A_q X \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} BX$.

On applique enfin le premier résultat démontré aux suites $\left(A_q X\right)$ et (Y),
ce qui donne $A_q X + Y \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} BX + Y$.

4 –

4.1 – $A^q = \begin{pmatrix} \lambda_1^q & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$, ici, $\lambda_i^q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne : $A^q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4.2 – si $|\lambda_i| > 1$, la suite $(|\lambda_i|^q)$ diverge, il en est de même de la suite $\left(\lambda_i^q\right)$ et donc de la suite (A^q).

4.3 –

4.3.1 – La limite de (λ^q) est z, donc la limite de $(|\lambda^q|)$ est $|z| = 1$ car la suite des modules est la suite constante 1.

4.3.2 – $\lambda^q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} z$ d'une part et $\lambda^{q+1} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} z$ d'autre part.

On peut faire le quotient car aucun de ces nombres n'est nul, ce qui donne : $\lambda \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et enfin : $\lambda = 1$.

4.3.3 – On vient de montrer que la suite $\left(\lambda_i^q\right)$ converge si et seulement si $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

On a donc la suite (A^q) converge si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

5 – $A = PDP^{-1}$ avec D répondant aux conditions de la question 4.1, et en utilisant le résultat du 3, $A^q = PD^qP^{-1} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6 – Les valeurs propres de A_1 sont $\dfrac{1}{2}$ et 0, donc $\left(A_1^q\right)$ converge vers la matrice nulle.

i est valeur propre de A_2, de module 1 et différente de 1, donc $\left(A_2^q\right)$ diverge.

Les valeurs propres de A_3 sont $\dfrac{1}{2}$, 1 et 0, donc $\left(A_3^q\right)$ converge vers la matrice $P_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_3^{-1}$.

Le calcul de cette limte est détaillé ci-dessous.

```
> D3lim:=matrix(3,3,[0,0,0,0,1,0,0,0,0]);
```

$$D3lim := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A3lim:=evalm(P3&*D3lim&*P3^(-1));
```

$$A3lim := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

7 –

7.1 – On a très facilement : $S_q = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

7.2 – $S_q = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} D^k\right)P^{-1} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} Pe^{D}P^{-1}$.

7.3 – Ici on a : $\mathrm{e}^{A_3} = P\mathrm{e}^{D_3}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}.$

Le calcul donne :

```
> expD3:=matrix(3,3,[exp(1/2),0,0,0,exp(1),0,0,0,1]);
```

$$expD3 := \begin{bmatrix} e^{(1/2)} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> expA3:=evalm(P3&*expD3&*P3^(-1));
```

$$expA3 := \begin{bmatrix} e & -e^{(1/2)} + e & -e^{(1/2)} + e \\ -1 + e & e^{(1/2)} + e - 1 & e^{(1/2)} + e - 2 \\ 1 - e & 1 - e & 2 - e \end{bmatrix}$$

Deuxième partie

1 – 1 n'est pas valeur propre de A, donc $\det(A - I_n) \neq 0$, et donc $A - I_n$ est inversible.

2 – $AS + B = S \Leftrightarrow (A - I_n) S = -B \Leftrightarrow S = -(A - I_n)^{-1} B.$

Le système a bien une solution unique explicitée ici.

3 – On montre ce résultat par récurrence.

Pour $q = 0$, $A^0 (X_0 - S) + S = (X_0 - S) + S = X_0$. L'amorce est vérifiée.

On admet le résultat au rang q, on va le montrer au rang $q + 1$.

$X_{q+1} = AX_q + B = A (A^q (X_0 - S) + S) + B = A^{q+1} (X_0 - S) + AS + B = A^{q+1} (X_0 - S) + S.$

On a donc montré la propriété au rang $q + 1$ et donc : $\forall q \in \mathbb{N}, \quad X_q = A^q (X_0 - S) + S.$

4 – Sous ces hypothèses, $A^q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $X_q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} S$.

Troisième partie

1 – Les premières et dernières coordonnées sont des cas particuliers :

$$\begin{pmatrix} F(1,t+\tau) \\ F(2,t+\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ F(n,t+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(1,t) \\ F(2,t) \\ \vdots \\ \vdots \\ F(n,t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

2 – Il suffit de prendre $t = q\tau$ pour que la relation de récurrence soit celle de la première question.

3 –

3.1 – On écrit la procédure en Maple. Le package *linalg* étant supposé chargé.

```
> X:=proc(q)
> local A,B,Xq,i;
> A:=matrix(4,4,[0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0]);
> B:=vector([10,0,0,50]);
> Xq:=vector([20.0,20.0,20.0,20.0]);
> for i from 1 to q do
> Xq:=evalm(A&*Xq+B) od;
> evalm(Xq)
> end;
```

$X :=$ **proc**(q)
local A, B, Xq, i;
$A :=$ matrix(4, 4, [0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0]) ;
$B :=$ vector([10, 0, 0, 50]) ;
$Xq :=$ vector([20.0, 20.0, 20.0, 20.0]) ;
for i **to** q **do** $Xq :=$ evalm(‘& ∗ ‘(A, Xq) + B) **end do** ;
evalm(Xq)
end proc

3.2 – On fait simplement tourner la procédure précédente :

```
> X(10);
```

[32.89062500, 45.78125000, 62.96875000, 80.15625000]

4 –

4.1 – $U_\omega = 0 \Rightarrow \sin(\omega) = 0$ en regardant le premier terme.
Par ailleurs, $\sin(\omega) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \sin(k\omega) = 0$.
Ce qui prouve que $\sin(\omega) = 0 \Rightarrow U_\omega = 0$.
On a bien l'équivalence demandée.

4.2 – En ne regardant encore une fois que la première coordonnée,
$AU_\omega = \lambda U_\omega \Rightarrow \dfrac{\sin(2\omega)}{2} = \lambda \sin(\omega) \Rightarrow \sin(\omega)\cos(\omega) = \lambda \sin(\omega)$,
et comme $\sin(\omega) \neq 0$, on a bien $\lambda = \cos(\omega)$.

4.3 – Si $\lambda = \cos(\omega)$, dans l'égalité $AU_\omega = \lambda U_\omega$,
l'égalité de la première coordonnée est bien sûr vérifiée,
et de la seconde à l'avant dernière coordonnée, c'est à dire pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, on a :
$\sin((k-1)\omega)+\sin((k+1)\omega) = 2\cos(\omega)\sin(k\omega)$, c'est simplement la transformation d'une somme en produit.
L'égalité est alors équivalente à l'égalité des dernières coordonnées,
c'est à dire : $\sin((n-1)\omega) = 2\cos(\omega)\sin(n\omega)$ qui est équivalent à $\sin((n+1)\omega) = 0$.
Comme $\omega \in]0, \pi[$, on obtient : $\omega = \dfrac{k\pi}{n+1}$, $k \in [\![1, n]\!]$.

4.4 – $\lambda_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ est donc valeur propre. Comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, ces valeurs propres sont distinctes deux à deux et dans l'intervalle $]-1, 1[$.
On a donc une matrice d'ordre n avec n valeurs propres distinctes, ce qui prouve qu'on a toutes les valeurs propres et qu'elles sont toutes simples.
A est donc diagonalisable et on peut prendre comme matrice de passage la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $U_{\frac{k\pi}{n+1}}$.
Par ailleurs, comme A est symétrique réelle, on avait à priori la diagonalisibilité qui était assurée. . .

5 – A vérifie donc les hypohèses de la question 4 de la deuxième partie, la suite $\left(X_q\right)$ est définie par la même relation de récurrence dans les deuxième et troisième parties, le résultat obtenu est donc applicable et $X_q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} S$.

S est donc le vecteur des températures d'équilibre.

6 – On utilise encore Maple.

```
> A:=matrix(4,4,[0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> I4:=matrix(4,4,[1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1]);
```

$$I4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:=vector([10,0,0,50]);
```

$$B := [10, 0, 0, 50]$$

```
> S:=evalm((I4-A)^(-1)&*B);
```

$$S := [36, 52, 68, 84]$$

Quatrième partie

1 – Si la suite (A^q) converge, pour $k \in [\![1, n]\!]$, la suite $(A^q E_k)$ converge.

Réciproquement, si la suite $(A^q E_k)$ converge, la suite $(C_k(q))$ converge, donc toutes les suites $(A^q[i,k])$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ convergent.

Finalement, $\forall i, k \in [\![1, n]\!]$, la suite $(A^q[i,k])$ converge, et donc la suite (A^q) converge.

On a bien montré l'équivalence.

2 – Si la suite (A^q) converge, la suite $(A^q X)$ converge.

Réciproquement, si toutes les suites $(A^q X)$ convergent, les suites $(A^q E_k)$ convergent et donc la suite (A^q) converge.

On a bien encore montré l'équivalence.

3 –

3.1 – Montrons d'abord par récurrence que $\|A^q X\| \leqslant k^q \|X\|$.

Pour $q = 0$, c'est une égalité.

On l'admet au rang q, on calcule $\left\|A^{q+1} X\right\| = \|A\,(A^q X)\| \leqslant k\,\|A^q X\| \leqslant k^{q+1}\,\|X\|$.

On l'a donc montré au rang $q + 1$.

Finalement : $\quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \|A^q X\| \leqslant k^q \|X\|$.

Ce qui prouve que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}, \quad A^q X \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc : $\quad A^q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3.2 – L'amorce étant une égalité, on montre comme à la question précédente que :

$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \|A^q X\| \geqslant k^q \|X\|$, en remplaçant simplement $\leqslant$ par $\geqslant$.

Si on prend un $X \neq 0$, alors $\|A^q X\| \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui prouve que la suite (A^q) diverge.

4 – $\varphi(X) = \|A^q X\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tX\left({}^tAAX\right) = \left(X|g(X)\right)$.

5 – ${}^tAA$ est symétrique, car égale à sa transposée, et réelle, donc diagonalisable en utilisant au besoin une matrice de passage P orthogonale.

6 – On diagonalise donc ${}^tAA$ en utilisant la matrice de passage P orthogonale, on pose $X = PY$, ce qui donne ${}^tX = {}^tY\,{}^tP = {}^tYP^{-1}$.

$D = P^{-1}\,{}^tAAP$ est diagonale portant les valeurs propres λ_i sur sa diagonale, et Y est le vecteur de coordonnées les y_i.

On a alors : $\quad \varphi(X) = {}^tX\,{}^tAAX = {}^tYP^{-1}\,{}^tAAPY = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.

Mais $\varphi(X)$ est un carré scalaire, toujours positif, donc : $\quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \forall y_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0$.

Ceci implique que : $\quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_i \geqslant 0$,

il suffit de prendre $y_i = 1$ et les autres nuls pour obtenir $\lambda_i \geqslant 0$.

7 – On a $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_1 y_i^2 = k_1\,\|Y\|^2 = k_1\,\|X\|^2$.

On a aussi $\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} k_0 y_i^2 = k_0\,\|Y\|^2 = k_0\,\|X\|^2$.

En effet la matrice de passage est orthogonale et conserve donc la norme des vecteurs.

7.1 – Si $k_1 < 1$, on a les hypothèses de la question 3.1 qui sont vérifiées, et donc la suite (A^q) converge vers la matrice nulle.

7.2 – Si $k_0 > 1$, on a les hypothèses de la question 3.2 qui sont vérifiées, et donc la suite (A^q) diverge.

8 – $k_1 < 1$ majore les valeurs propres, donc 1 n'est pas valeur propre de A.

Par ailleurs, on sait que $\|AX\|^2 \leqslant k_1\,\|X\|^2$, ce qui donne : $\|AX\| \leqslant \sqrt{k_1}\,\|X\|$.

Rappelons que $X_q = A^q\,(X_0 - S) + S$, et donc $X_q - S = A^q\,(X_0 - S)$.

Ce qui donne : $\quad \left\|X_q - S\right\| \leqslant \sqrt{k_1}\left\|A^{q-1}\,(X_0 - S)\right\| \leqslant \cdots \leqslant \left(\sqrt{k_1}\right)^q \|X_0 - S\|$, $\quad$ par une récurrence facile à écrire.

9 – $\left(\left\|X_q - S\right\|\right)$ est décroissante, il suffit donc d'être sûr de cette inégalité pour une valeur q_0.

Ici, $k_1 = \cos\dfrac{\pi}{5}$, Il suffit d'avoir $\left(\sqrt{k_1}\right)^q \|X_0 - S\| \leqslant 1$, c'est à dire : $\quad q \geqslant -2\dfrac{\ln\|X_0 - S\|}{\ln(k_1)}$

et on fait le calcul avec Maple :

```
> k1:=evalf(cos(Pi/5));
                        k1 := .8090169943
> X0:=vector([20.0,20.0,20.0,20.0]);
                    X0 := [20.0, 20.0, 20.0, 20.0]
> q:=ceil(-2*ln(norm(X0-S,2))/ln(k1));
                             q := 43
> X(43);
        [35.99647362, 51.99538391, 67.99429420, 83.99714710]
```

Comme $\left\|X_{q_0} - S\right\| \leqslant 1$, la même inégalité est valable pour toutes ses coordonnées.

D'où : $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \left|F(k, q_0\tau) - Sk\right| \leqslant 1$, ce qui est exactement l'encadrement demandé.

En résumé, au bout du temps $q_0\tau$, chaque point de la barre est à sa température d'équilibre à 1 degré près.