

Banque PT 2007 — épreuve B

Partie I

Question I.1

I.1.a On reconnaît une équation réduite d'un cône à base elliptique de sommet O .

I.1.b Si $\alpha = 0$, l'intersection est réduite au point O . Si $\alpha \neq 0$, on reconnaît une ellipse centrée en $\Omega(0, 0, \alpha)$, de grand axe dirigé par $\vec{i}$ et de petit axe dirigé par $\vec{j}$.

L'ellipse obtenue pour $\alpha = 1$ a pour équation $x^2 + 2y^2 = 1$, ses sommets sont $(1, 0, 1)$ et $(-1, 0, 1)$ sur le grand axe et $(0, 1/\sqrt{2}, 1)$ et $(0, -1/\sqrt{2}, 1)$ sur le petit axe.

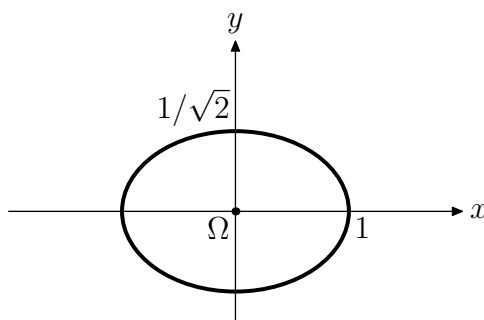


Figure 1 l'ellipse obtenue pour $\alpha = 1$

I.1.c Si $\alpha = 0$, on reconnaît la réunion de deux droites sécantes : $\begin{cases} x = 0 \\ z = y\sqrt{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y\sqrt{2} \end{cases}$.

Si $\alpha \neq 0$, on reconnaît dans l'équation $z^2 - 2y^2 = \alpha^2$ celle d'une hyperbole centrée en $\Omega(\alpha, 0, 0)$, son axe focal est parallèle à l'axe des z .

Si $\alpha = 1$, ses sommets sont les points $(1, 0, \pm 1)$, ses asymptotes ont pour équations (dans le plan $x = 1$, bien sûr) $z = \pm y\sqrt{2}$.

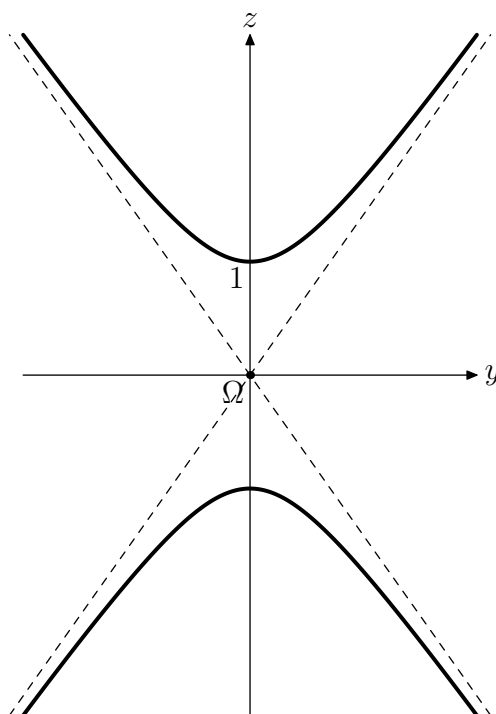


Figure 2 l'hyperbole obtenue pour $\alpha = 1$

Question I.2

I.2.a Bien sûr, $(x + z)^2 - (x - z)^2 = 4xz$.

I.2.b On en déduit que $q(x, y, z) = y^2 + \left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)^2$.

I.2.c Posant $X = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$, $Y = y$ et $Z = \frac{x-z}{\sqrt{2}}$, on a bien $q(x, y, z) = X^2 + Y^2 - Z^2$, qui est de la forme

requis avec $a = b = 1$. La transformation ϕ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: on vérifie qu'il s'agit

bien d'une matrice orthogonale. Elle est symétrique, et de trace égale à 1 : l'application ϕ est donc une réflexion.

Question I.3

À l'aide de la transformation précédente, l'équation de S_1 devient, dans la nouvelle base : $X^2 + Y^2 - Z^2 - \sqrt{2}(X + Z) = 0$, ce qui peut encore se réécrire $(X - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + Y^2 - (Z + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$.

On reconnaît un cône de révolution dont l'axe est dirigé par l'axe des Z . Son sommet (qui est aussi le centre) a pour coordonnées $X = 1/\sqrt{2}$, $Y = 0$ et $Z = -1/\sqrt{2}$ ou encore, dans le repère initial : $(x, y, z) = (0, 0, 1)$. (On aurait pu le trouver aussi à l'aide d'un gradient.)

Question I.4

$\mathcal{P}_1$ a pour équation (dans le plan xOy) : $y^2 = 2x$, il s'agit donc d'une parabole d'axe Oy et de sommet O .

Question I.5

Notons $B(1, 1, 1)$ le sommet du cône. Un point courant P_t de $\mathcal{P}_1$ a pour coordonnées $(t^2/2, t, 0)$, donc

un point générique $M(t, \lambda)$ du cône $\mathcal{C}_1$ vérifie $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BP_t}$ ou encore $\begin{cases} x = 1 + \lambda(t^2/2 - 1) \\ y = 1 + \lambda(t - 1) \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ et il

n'est pas difficile d'éliminer les paramètres t et λ pour obtenir une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}_1$:

$$2 \frac{x-z}{1-z} = \left(\frac{y-z}{1-z} \right)^2 \text{ ou, si l'on préfère : } 2(x-z)(1-z) = (y-z)^2.$$

Question I.6

On procède comme précédemment, obtenant d'abord une paramétrisation du cône $\mathcal{C}_A$ sous la forme

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda(t^2/2 - x_A) \\ y = y_A + \lambda(t - y_A) \\ z = z_A - \lambda z_A \end{cases} \text{ puis éliminant tour à tour } \lambda = 1 - z/z_A \text{ et } t. \text{ Finalement, on obtient l'équation}$$

cartésienne suivante :

$$\mathcal{C}_A : 2(x - x_A \frac{z}{z_A})(1 - \frac{z}{z_A}) = \left(y - y_A \frac{z}{z_A} \right)^2.$$

Le point B est sur $\mathcal{C}_A$ si et seulement si $2(z_A - x_A)(z_A - 1) = (z_A - y_A)^2$. On remarque que cela signifie que A est sur le cône $\mathcal{C}_1$.

Soit Σ l'ensemble des sommets A des cônes contenant $\mathcal{P}_1$ et B : si $z_A \neq 0$, on vient de dire que A doit être sur le cône $\mathcal{C}_1$; si $z_A = 0$, le cône de sommet A qui contient $\mathcal{P}_1$ est en réalité le plan xOy , qui ne passe pas par B . Finalement Σ est l'ensemble des points du cône $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas dans le plan xOy , c'est-à-dire exactement : $\Sigma = \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{P}_1$.

Partie II

Question II.1

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des paraboloides de révolution d'axe Oz et de sommet O . Le plan xOy est tangent au sommet de ces deux paraboloides : $\mathcal{P}$ est du côté des $z \geq 0$ et $\mathcal{Q}$ du côté des $z \leq 0$. $\mathcal{P}$ est plus évasé que $\mathcal{Q}$.

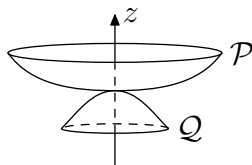


Figure 3 schéma
présentant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$

Question II.2

La méridienne contenue dans le plan xOz a pour équation $x^2 = 8z$: c'est une parabole d'axe Oz et de sommet O . La surface étant de révolution autour de Oz , il en est de même de toutes les méridiennes.

La méridienne choisie passe par le point $(a, 0, a^2/8)$: un vecteur tangent en ce point est $(1, 0, a/4)$. Une équation de la tangente (dans le plan xOz) est donc $a(x - a) = 4(z - a^2/8)$. Cette tangente coupe le plan $z = 0$ au point $(a/2, 0, 0)$.

Soit M' la méridienne de $\mathcal{Q}$ contenue dans le plan xOz : c'est une parabole d'équation $x^2 = -2z$.

Or une droite passant par $(a/2, 0, 0)$ avec $a > 0$ est

- ▷ tangente à M' en O si sa pente est nulle ;
- ▷ tangente à M' en un point d'abscisse positive si sa pente est égale à une certaine valeur $p < 0$;
- ▷ d'intersection vide avec M' si sa pente est dans l'intervalle $]p, 0[$;
- ▷ d'intersection avec M' réduite au point $(a/2, 0, -a^2/8)$ si elle est verticale ;
- ▷ d'intersection avec M' réduite à un point si sa pente est dans l'intervalle $]-\infty, p[$;
- ▷ sécante avec M' en deux points distincts si sa pente est strictement positive.

Nous sommes ici dans le dernier cas.

L'ensemble de la figure étant de révolution autour de Oz , la propriété est également valable pour toute les tangentes à n'importe quelle méridienne de $\mathcal{P}$, à l'exception bien sûr des tangentes au point O (qui sont horizontales).

Question II.3

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ s'obtient à partir de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une rotation d'angle θ autour de Oz , rotation qui conserve $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Autrement dit, les équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans le nouveau repère sont les mêmes que dans l'ancien.

Question II.4

Comme $x^2 + y^2 = r^2$, on a simplement $z = \frac{r^2}{8}$ comme équation paramétrique de $\mathcal{P}$ en coordonnées cylindriques.

Question II.5

Il suffit de vérifier que les coordonnées du point courant de $\mathcal{C}$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Question II.6

Les coordonnées de $\frac{d\vec{t}}{d\theta}$ dans la base fixe sont $(r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta, r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta, \frac{r'(\theta)r(\theta)}{4})$ et, dans la base tournante, ce sont $(r'(\theta), r(\theta), \frac{r'(\theta)r(\theta)}{4})$.

La courbe est régulière si ce vecteur dérivé ne s'annule jamais, c'est-à-dire si r et r' ne s'annulent jamais simultanément.

Question II.7

Notons (x_1, y_1, z_1) les coordonnées dans le repère tournant $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

La tangente est dirigée par le vecteur dérivé que nous venons de calculer. Une représentation paramétrique

$$\text{est donc : } \begin{cases} x_1 = r(\theta) + \lambda r'(\theta) \\ y_1 = \lambda r(\theta) \\ z_1 = \frac{r^2(\theta) + 2\lambda r'(\theta)r(\theta)}{8} \end{cases}$$

Question II.8

Or $\mathcal{Q}$ a pour équation $x_1^2 + y_1^2 + 2z_1 = 0$: reportant les valeurs précédentes dans cette équation, on obtient une équation (e) du second degré en λ , qui a donc au plus deux solutions. C'est dire que $D_\theta \cap \mathcal{Q}$ contient au plus deux points.

Question II.9

Il suffit de faire le calcul : (e) s'écrit

$$(e) \quad \lambda^2(r^2 + r'^2) + 2\lambda rr' + r^2 + \frac{r^2}{4} + \lambda \frac{rr'}{2} = 0 \iff \lambda^2(r^2 + r'^2) + 5\lambda \frac{rr'}{2} + \frac{5r^2}{4} = 0.$$

D_θ est tangente à $\mathcal{Q}$ si et seulement si le discriminant Δ de cette équation du second degré est nul.

Or $\Delta = \frac{25r^2 r'^2}{4} - 5r^4 - 5r^2 r'^2 = \frac{5}{4}r^2(r'^2 - 4r^2)$. D_θ est donc tangente à $\mathcal{Q}$ si et seulement si $r(\theta) = 0$ ou $r'(\theta)^2 = 4r(\theta)^2$.

Partie III

Notons encore $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$.

Question III.1

Au point de paramètre θ , on écrit $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}$ donc $\vec{M}' = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v} = e^{2\theta}(2\vec{u} + \vec{v})$. C'est-à-dire que la tangente est dirigée par le vecteur $2\vec{u} + \vec{v} = (2\cos \theta - \sin \theta)\vec{i} + (2\sin \theta + \cos \theta)\vec{j}$.

On en déduit que la pente de la tangente vaut $\frac{2 \tan \theta + 1}{2 - \tan \theta}$.

Question III.2

On a $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \rho(\theta) = 0$ et $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho(\theta) = +\infty$: c'est dire que la courbe est une spirale qui s'enroule autour de l'origine et se déroule à l'infini.

Question III.3

Cette longueur vaut $\ell = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_0^\pi e^{2\theta} \sqrt{5} d\theta = \sqrt{5} \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$. On a écrit au passage, avec les notations usuelles : $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{5}e^{2\theta}$.

Question III.4

L'aire demandée vaut $\mathcal{A} = \int_0^\pi \frac{\rho^2}{2} d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{4\theta}}{2} d\theta = \frac{e^{4\pi} - 1}{8}$ unités d'aire.

Question III.5

On a déjà dit que le vecteur tangent unitaire est $\vec{T} = \frac{2\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{5}}$, donc le vecteur normal est $\vec{N} = \frac{-\vec{u} + 2\vec{v}}{\sqrt{5}}$.

Question III.6

Pour trouver la courbure c , on peut évaluer $\frac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}$.

Or $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}e^{2\theta}} \frac{2\vec{v} - \vec{u}}{\sqrt{5}}$ et le rayon de courbure cherché vaut $R = \frac{1}{c} = \sqrt{5}e^{2\theta}$.

Question III.7

Une des définitions de la développée est qu'il s'agit de l'ensemble des centres de courbure.

Ici on calcule donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = e^{2\theta}\vec{u} + \sqrt{5}e^{2\theta} \frac{-\vec{u} + 2\vec{v}}{\sqrt{5}} = 2e^{2\theta}\vec{v}$.

C'est dire que la développée de Γ s'obtient à partir de Γ par une homothétie de rapport 2 composée avec une rotation de $+\pi/2$ (pour passer de $\vec{u}$ à $\vec{v}$).

Question III.8

On a tracé la courbe Γ en noir et sa développée en tireté rouge.

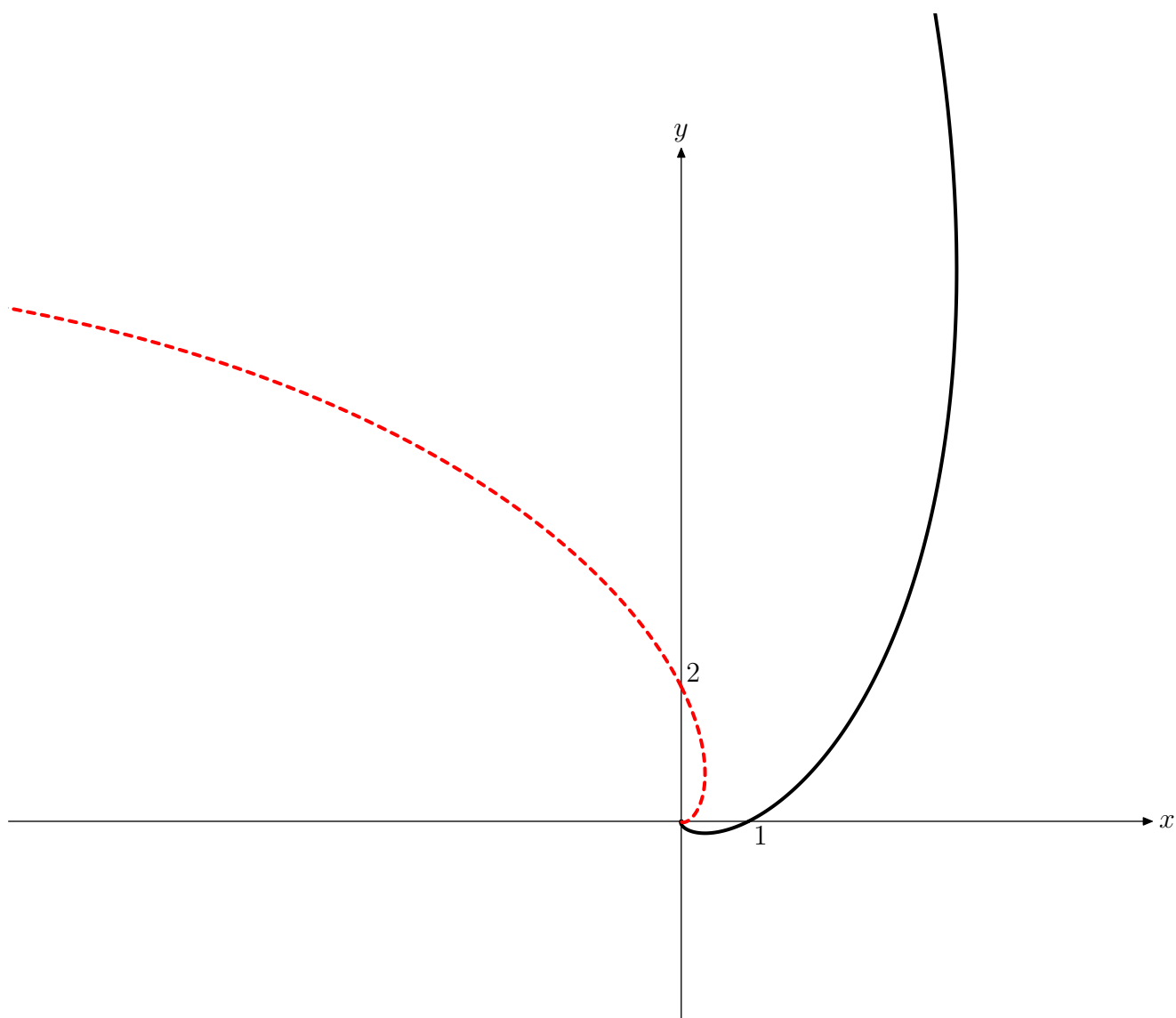


Figure 4 Γ et sa développée