

Partie I

Lorsque a n'est pas ambigu, on note $\lambda_i(x)$ plutôt que $\lambda_i(x, a)$.

1. On a $P(tv) = t^d P(v)$. Par dérivation par rapport à t ,

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial P}{\partial v_i}(tv) = dt^{d-1} P(v).$$

En évaluant en $t = 1$,

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial P}{\partial v_i}(v) = dP(v).$$

2. Pour $p = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$,

$$p(ta - x) = t^d a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} + q(t), \text{ avec } \deg q \leq d - 1.$$

Par combinaison linéaire, pour p homogène de degré d ,

$$p(ta - x) = p(a)t^d + r(t), \text{ avec } \deg r \leq d - 1.$$

Comme $p(a) \neq 0$, $\deg_t p(ta - x) = d$. Comme ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$, il admet d racines réelles, comptées avec multiplicité.

3. • D'après 2,

$$p(ta - x) = p(a) \prod_{i=1}^d (t - \lambda_i(x)).$$

Faisant $t = 0$ et divisant par $(-1)^d$,

$$p(x) = p(a) \prod_{i=1}^d \lambda_i(x).$$

• On a, si $s \neq 0$,

$$p(ta - sx) = p(a) \prod_{i=1}^d (t - \lambda_i(sx)) = s^d p(a) \prod_{i=1}^d \left(\frac{t}{s} - \lambda_i(x)\right) = p(a) \prod_{i=1}^d (t - s\lambda_i(x)).$$

Si $s > 0$, $\lambda_i(sx) = s\lambda_i(x)$ tandis que si $s < 0$, $\lambda_i(sx) = s\lambda_{d+1-s}(x)$. Si $s = 0$, tous les λ_i sont nuls.

• On a $p(ta - x - sa) = p(a) \prod_{i=1}^d (t - s - \lambda_i(x))$. Donc $\lambda_i(x + sa) = s + \lambda_i(x)$.

4. Cette fonction p est homogène de degré m sur $S_m(\mathbb{R})$. Comme $p(tI_m - x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral et que $p(I_m) = 1$, p est hyperbolique dans la direction I_m .

5. Pour $k = n$, la forme q est strictement positive et ne peut donc s'annuler en dehors de 0. Elle n'est donc pas hyperbolique. Supposons plutôt $k \in [1, n-1]$.

• Supposons q hyperbolique dans la direction a , avec d'abord $q(a) > 0$. Alors, pour tout x ,

$$q(ta - x) = q(a)t^2 - 2tB(a, x) + q(x)$$

est scindé dans $\mathbb{R}$, donc $B(a, x)^2 \geq q(a)q(x)$. Considérons l'ensemble V des x tels que $B(a, x) = 0$. Comme $B(a, a) > 0$, c'est un hyperplan. Si $x \in V$, $q(x) \leq 0$. Supposons par l'absurde $k \geq 2$. Soit $W = \text{vect}(e_1, e_2)$. Il existe $x \in V \cap W - \{0\}$. Or $q(x) > 0$ car $x \in W$, ce qui est une contradiction. Donc $k = 1$.

En étudiant le cas $q(a) < 0$, par changement de q en $-q$, on voit qu'il est nécessaire que $k \in \{1, n-1\}$.

• Supposons réciproquement que $k = 1$ par exemple. Alors

$$q(te_1 - x) = (t - x_1)^2 - x^2 - \dots - x_n^2.$$

C'est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$. Donc q est hyperbolique dans la direction e_1 . Et de même si $k = n-1$ (en remplaçant e_1 par e_n).

6. On a

$$\frac{d}{dt}p(ta - x) = (a\nabla p)(ta - x).$$

D'après le théorème de Rolle, ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$. On a $(a\nabla p)(a) = dp(a) \neq 0$. Enfin, $a\nabla p$ est manifestement homogène de degré $d-1$.

7. • On sait que

$$\prod_{i=1}^n (t - x_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{n-k} \Sigma_k(x).$$

Dérivons cette égalité par rapport à x_j :

$$-\prod_{i \neq j} (t - x_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{n-k} \frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x).$$

Multiplions par $t - x_j$:

$$\begin{aligned} -\prod_{i=1}^n (t - x_i) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{n-k+1} \frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x) - x_j \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{n-k} \frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x) \\ &= \sum_{k=-1}^{n-1} (-1)^{k+1} t^{n-k} \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial x_j}(x) - x_j \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{n-k} \frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

En identifiant le terme en t^{n-k} et en divisant par $(-1)^{k+1}$,

$$\Sigma_k(x) = \frac{\partial \Sigma_{k+1}}{\partial x_j}(x) + x_j \frac{\partial \Sigma_k}{\partial x_j}(x).$$

Sommons pour j entre 1 et n :

$$n\Sigma_k(x) = (e \cdot \nabla \Sigma_{k+1})(x) + k\Sigma(x)$$

grâce à **1** et au fait que Σ_k est homogène de degré k .

Finalement, $\Sigma_k = \frac{1}{n-k}(e \cdot \nabla \Sigma_{k+1})$ pour $k \leq n-1$.

• Raisonnons alors par récurrence descendante. Il est évident que Σ_n est hyperbolique dans la direction e , puisque $\Sigma_n(te - x) = \prod_{i=1}^n (t - x_i)$. Si Σ_{k+1} est hyperbolique dans la direction e , alors, d'après **6**, $e \cdot \nabla \Sigma_{k+1}$ l'est aussi, donc Σ_k de même.

8. Supposons F non continue en $\bar{x}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (x^m) tendant vers $\bar{x}$ tels que $\|F(x^m) - F(\bar{x})\| \geq \varepsilon$. Si l'on applique ceci à $m = \varphi(k)$, on obtient une contradiction.

9.a • Soit $P = t^d + a_{d-1}t^{d-1} + \dots + a_0$ et u une racine de P . Supposons $|u| \geq 1$. Alors

$$u^d = -a_{d-1}u^{d-1} - \dots - a_0,$$

donc

$$|u|^d \leq (|a_{d-1}| + \dots + |a_0|)|u|^{d-1}.$$

Par conséquent, $|u| \leq M(P)$ avec $M(P) := \max(1, |a_{d-1}| + \dots + |a_0|)$.

• Soit A tel que, pour tout m , $\|x^m\| \leq A$. Posons $P_m(t) := p(ta - x^m) = t^d + a_{d-1}(x_m)t^{d-1} + \dots + a_0(x_m)$, où $a_0, \dots, a_{d-1}$ sont continues (polynomiales) sur $\mathbb{R}^n$, donc bornées sur $B'(0, A)$. Il en résulte qu'il existe M' tel que, pour tout m , $M(P_m) \leq M'$ et donc, pour tout m et tout i , $|\lambda_i(x^m)| \leq M'$.

9.b Soit (x^m) une suite convergeant vers $\bar{x}$. Pour montrer que Λ est continue en $\bar{x}$, il suffit d'après **8** de montrer que l'on peut trouver φ telle que $\Lambda(x^{\varphi(k)}) \rightarrow \Lambda(\bar{x})$. Comme la suite $(\Lambda(x^m))$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, espace de dimension finie, il existe φ telle que $\Lambda(x^{\varphi(k)}) \rightarrow l \in \mathbb{R}^d$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, $l_1 \leq \dots \leq l_d$.

D'autre part, $p(ta - x^{\varphi(k)}) \rightarrow p(ta - \bar{x})$. Mais, d'un autre côté,

$$p(ta - x^{\varphi(k)}) = \prod_{i=1}^d (t - \lambda_i(x^{\varphi(k)})) \rightarrow \prod_{i=1}^d (t - l_i).$$

Par conséquent, $l_i = \lambda_i(\bar{x})$ (grâce à l'ordonnement), donc $\Lambda(x^{\varphi(k)}) \rightarrow \Lambda(\bar{x})$. Ainsi, Λ est continue en $\bar{x}$.

10. • Remarquons que $a \in C(p, a)$ car $p(ta - a) = (t-1)^d p(a)$.

• Si $b \in C(p, a)$, alors, pour $t \in]0, 1[$,

$$\lambda_1((1-t)a + tb) = (1-t) + t\lambda_1(b) > 0.$$

• Si $b \in C(p, a)$, les racines de $t \mapsto (a \cdot \nabla p)(ta - b)$ appartiennent à l'enveloppe convexe de celles de $t \mapsto p(ta - b)$ (d'après Rolle), donc sont strictement positives.

11. • Comme φ_j est continue, il suffit de montrer qu'elle tend vers $\varepsilon\infty$ en $\varepsilon\infty$. On a, pour $u > 0$,

$$\lambda_j(ub + x) = u\lambda_j(b + \frac{x}{u}) \underset{+\infty}{\sim} u\lambda_j(b)$$

par continuité de λ_j et le fait que $\lambda_j(b) > 0$. Donc $\varphi_j(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$.

De même, pour $u < 0$,

$$\lambda_j(ub + x) = u\lambda_{d+1-j}(b + \frac{x}{u}) \underset{-\infty}{\sim} u\lambda_{d+1-j}(b)$$

et donc $\varphi_j(u) \xrightarrow{u \rightarrow -\infty} -\infty$.

• Par hypothèse, si $\varphi_j(u) = \varphi_k(u)$ pour $j \neq k$, alors $ub + x$ est colinéaire à a , donc $x \in \text{vect}(a, b)$. Si réciproquement cette condition est réalisée, $x = \alpha a - \beta b$, donc

$$p(ua - (\beta b + x)) = p((u - \alpha)a) = (u - \alpha)^d p(a),$$

donc $\lambda_j(\beta b + x) = \alpha$ pour tout j .

12. • Si $b \in C(p, a)$, $p(b) = p(a) \prod_{i=1}^d \lambda_i(b) \neq 0$. On suppose dans la suite b non colinéaire à a .

• Supposons que $x \notin \text{vect}(a, b)$. Pour chaque i , l'équation $\lambda_i(ub + x) = 0$ admet une racine u_i d'après **11** et, si $j \neq i$, $u_i \neq u_j$ (sinon $\varphi_i(u_i) = \varphi_j(u_i)$), donc ces racines sont distinctes. Or

$$p(ub + x) = p(a) \prod_{i=1}^d \lambda_i(ub + x),$$

donc $u \mapsto p(ub + x)$ s'annule en les d réels distincts u_i .

• Supposons $x \notin \text{vect}(b)$, mais $x \in \text{vect}(a, b)$. On peut donc écrire $x = \alpha a + \beta b$, avec $\alpha \neq 0$. On a

$$p(ub + x) = p((u + \beta)b + \alpha a) = (u + \alpha)^d p(a) \prod_i \left(\frac{\alpha}{u + \beta} - \lambda_i(-b, a) \right) = p(a) \prod_i (\alpha - (u + \beta)\lambda_i(-b, a)),$$

polynôme en u scindé à racines simples.

13. • Supposons d'abord que $x \in \text{vect}(a, b)$. Alors

$$p((ub + x) - ta) = p((u + \beta)b + (\alpha - t)a) p(a) \prod_i ((\alpha - t) - (u + \beta)\lambda_i(-b, a)),$$

d'après le calcul précédent. Les racines de ce polynôme en t sont les

$$\alpha - (u + \beta)\lambda_i(-b, a) = \alpha + (u + \beta)\lambda_{d+1-i}(b, a),$$

qui sont bien des fonctions strictement croissantes de u .

- Supposons à présent que $x \notin \text{vect}(a, b)$.

Considérons le polynôme $p(ta - ub - x)$, de la variable u (pour t fixé). Il est de degré d (car $p(b) \neq 0$). Notons K_j l'ensemble des u tels que $t = \lambda_j(ub + x, a)$. Deux ensembles K_j d'indices distincts sont disjoints, d'après le deuxième alinéa de la question 11. Chaque K_j est non vide d'après la surjectivité montrée dans la question 11. Il y a d ensembles K_j et d racines (en u) de l'équation $p(ta - ub - x) = 0$. Il y en a donc exactement une dans chaque K_j , ce qui montre l'injectivité de $u \mapsto \lambda_j(ub + x, a)$.

• L'application $u \mapsto \lambda_j(ub + x, a)$ est injective et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc strictement monotone, et strictement croissant d'après son étude en $+\infty$.

14. • Il est clair que, si $x \in C(p, a)$ et $t > 0$, alors $tx \in C(p, a)$. Soit x et y dans $C(p, a)$ et $t \in]0, 1[$. Puisque tx et $(1 - t)y$ sont dans $C(p, a)$, il suffit de montrer que $x + y \in C(p, a)$.

On a $\lambda_1(x + y, a) \geq \lambda_1(y, a)$ d'après 13, car $x \in C(p, a)$. Donc $\lambda_1(x + y, a) > 0$ car $y \in C(p, a)$.

Ainsi, $C(p, a)$ est un cône convexe.

- Montrons que, si x et y sont dans $C(p, a)$, $\lambda_1(x + y, a) \geq \lambda_1(x, a) + \lambda_1(y, a)$.

Posons $\alpha := \lambda_1(x, a)$ et $\beta := \lambda_1(y, a)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, $u := x - (\alpha - \varepsilon)a$ et $v := y - (\beta - \varepsilon)b$ sont dans $C(p, a)$, donc $u + v$ aussi, de sorte que

$$\lambda_1(x + y, a) - (\alpha + \beta - 2\varepsilon) > 0.$$

Faisant tendre ε vers 0,

$$\lambda_1(x + y, a) \geq \alpha + \beta = \lambda_1(x, a) + \lambda_1(y, a).$$

- Si $t \in]0, 1[$,

$$\lambda_1((1 - t)x + ty, a) \geq \lambda_1((1 - t)x) + \lambda_1(ty) = (1 - t)\lambda_1(x, a) + t\lambda_1(y, a),$$

donc $\lambda_1(\cdot, a)$ est une fonction concave.

15. Si $t \leq 0$,

$$q(tb - x) = q(a) \prod_i \lambda_i(tb - x, a).$$

Si $t \leq 0$, $x - tb \in C(p, a)$ d'après 14, donc $\lambda_i(tb - x, a) < 0$. Par conséquent, $q(tb - x)$ ne s'annule pas dans $]-\infty, 0]$, et ses racines sont strictement positives. En particulier, $\lambda_1(x, b) > 0$.

16. Soit $x \in C(p, a)$. Alors d'après ce qui précède, $x \in C(p, b)$ et donc $C(p, a) \subset C(p, b)$. En particulier, $a \in C(p, b)$ et, par symétrie, $C(p, a) = C(p, b)$.

17.a Considérons l'ensemble A des couples (i, j) tels que $R(i, j) \neq 0$ (avec $R = \sum_{i,j} R(i, j)x^i y^j$). On a $(m, 0)$ et $(0, p)$ dans A . Considérons les droites issues de $(m, 0)$ joignant un point de A (il y en a au moins une). Leurs pentes sont

rationnelles strictement négatives (car $(0,0) \notin A$), et en nombre fini. Soit $-\frac{\alpha}{\beta}$, avec $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ et $\beta > 0$, $\alpha > 0$, la plus grande, de sorte que l'équation de la droite correspondante est $\frac{y}{x-m} = -\frac{\alpha}{\beta}$, ou $\alpha x + \beta y = m\alpha$. Si $(i, j) \in A$, on a donc $\alpha i + \beta j \geq m\alpha$ et il existe au moins deux éléments de A tels que $\alpha i + \beta j = m\alpha$. On pose

$$R_0(x, y) := \sum_{\alpha i + \beta j = m\alpha} R(i, j) x^i y^j$$

et

$$R(x, y) := \sum_{\alpha i + \beta j \geq m\alpha + 1} R(i, j) x^i y^j.$$

On a

$$R_0(x, y) = x^m \sum_{\alpha i + \beta j = m\alpha}^R (i, j) y^j x^{i-m}.$$

Or $\beta j = (m - i)\alpha$, donc $j = k\alpha$ et $m - i = k\beta$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (car $\alpha > 0$). Donc

$$R_0(x, y) = x^m \sum_k s_k y^{k\alpha} x^{-k\beta} = x^m Q_0(y^\alpha x^{-\beta})$$

avec

$$Q_0(t) := \sum_k s_k t^k.$$

On a vu que R_0 contient deux termes au moins, dont un terme en x^m , ce qui implique que $Q_0(0) \neq 0$. D'autre part, puis $k\beta = (m - i) \leq m$ dans la somme, définissant R_0 , on a $\beta \deg Q_0 \leq m$. Enfin, $(i, j) \mapsto k$ est manifestement injective (puisque nécessairement $j = k\alpha$) et donc le fait qu'il y ait deux termes au moins dans R_0 implique qu'il y en a au moins deux dans Q_0 , qui donc n'est pas constant.

17.b Avec les notations du **a**,

$$R(zu^\alpha, u^\beta) = z^m u^{\alpha m} Q_0(z^{-m}) + R_1(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m} (z^m Q_0(z^{-\beta}) + u^{-\alpha m} R_1(zu^\alpha, u^\beta)).$$

Posons $\hat{R}(z) := z^m Q_0(z^{-\beta})$. Alors $\hat{R}$ est un polynôme puisque $\beta \deg Q_0 \leq m$. De plus, $R_1(zu^\alpha, u^\beta)$ est une combinaison linéaire de $z^i u^{\alpha i + \beta j}$ avec $\alpha i + \beta j \geq \alpha m + 1$, donc $u^{-\alpha m} R_1(zu^\alpha, u^\beta)$ est de la forme $uS(z, u)$. Cela donne la forme indiquée.

Puisque Q_0 admet au moins deux termes, il en va de même de $\hat{R}$ qui, donc, n'est pas constant et admet une racine non nulle.

17.c Si $w \notin \mathbb{R}$, soit $r > 0$ tel que $D'(w, r) \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et en outre tel que $D'(w, r)$ ne contienne pas d'autre racine de $\hat{R}$. En particulier, $\inf_{|z-w|=r} |\hat{R}(z)| =: \varepsilon > 0$. Soit $M := \sup_{(z, u) \in D'(0, r) \times D'(0, 1)} |S(z, u)|$. Si $|u| \leq \min(\frac{\varepsilon}{2M}, 1)$, on a $|Mu| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$|uS(z, u)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, il existe $z \in D'(0, r)$ tel que $\hat{R}(z) + uS(z, u) = 0$. En particulier, z n'est pas réel et, de plus, $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$.

18.a Si $\hat{R}$ a une racine non réelle, pour $|u|$ assez petit, il existe z non réel tel que $R(zu^\alpha, u^\beta) = 0$. Prenons u réel assez petit et non nul. Alors zu^α est réel, ce qui contredit l'hypothèse.

18.b Soit Z l'ensemble des racines de $\hat{R}$ et $z \in Z$. Posons $\omega := e^{\frac{2i\pi}{\beta}}$. On a

$$R(z\omega^\alpha u^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m} (\hat{R}(z\omega^\alpha) + uS(z\omega^\alpha, u)).$$

Donc

$$\frac{R(z\omega^\alpha u^\alpha, u^\beta)}{u^{\alpha m}} = \frac{R(z(u\omega)^\alpha, (u\omega)^\beta)}{(u\omega)^{\alpha m}} \omega^{\alpha m}.$$

Or $\frac{R(zv^\alpha, v^\beta)}{v^{\alpha m}} \xrightarrow{v \rightarrow 0} \hat{R}(z) = 0$. Donc

$$\hat{R}(z\omega^\alpha) = 0.$$

Ainsi, $z\omega^\alpha \in Z$. Si donc z est une racine non nulle de $\hat{R}$, réelle par hypothèse, $z\omega^\alpha$ étant encore réel, ω^α est réel. Donc $\frac{2\alpha}{\beta} = k \in \mathbb{Z}$, soit $\beta \mid 2$.

18.c On applique ce qui précède au polynôme $U(x, y) := R(x, -y)$, qui possède les mêmes m, r, α et β . Pour y réel, $U(x, y)$ est scindé dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$U(zu^\alpha, u^\beta) = u^{\alpha m} (\hat{U}(z) + uV(z, u)).$$

Soit z une racine non nulle de $\hat{U}$ et $\omega := e^{\frac{i\pi}{\beta}}$. On a

$$U(zu^\alpha, u^\beta) u^{-\alpha m} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

Donc

$$U(z(\omega u)^\alpha, (\omega u)^\beta) u^{-\alpha m} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0.$$

Or

$$U(z(\omega u)^\alpha, (\omega u)^\beta) u^{-\alpha m} = U((z\omega^\alpha)u^\alpha, -u^\beta) u^{-\alpha m} = R((z\omega^\alpha)u^\alpha, u^\beta) u^{-\alpha m} \rightarrow \hat{R}(z\omega^\alpha).$$

Donc $z\omega^\alpha \in \mathbb{R}$, d'où $\beta \mid \alpha$, soit $\beta = 1$.

18.d On a $(r, 0) \in A$ et donc $\beta p = p \geq \alpha m \geq m$.

19.a On pose $\varphi(s, t) := p(sa - tb - x) = p(a) \prod_i (s - \lambda_i(tb + x, a))$ et $R(X, Y) := p((X + s^*)a - (Y + t^*)b - x) = \varphi(X + s^*, Y + t^*)$. Si t^* est une racine de $t \mapsto \varphi(s^*, t)$, de multiplicité r , 0 est une racine de $R(0, Y)$, de multiplicité r . Notons que $R(0, Y)$ n'est pas le polynôme nul, puisque $p(b) \neq 0$. Soit m la multiplicité de 0 dans $R(X, 0)$ (multiplicité nulle si ce n'est pas racine). Notons que $R(X, 0)$ n'est pas le polynôme nul (il est de degré d). Si $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto R(x, y)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ par hypothèse. D'après **18.d**, $r \geq m$.

Il en résulte que la multiplicité m de s^* comme racine de $s \mapsto \varphi(s, t^*)$ est inférieure ou égale à celle de t^* comme racine de $t \mapsto \varphi(s^*, t)$. Il y a donc au plus r indices i tels que $\lambda_i(t^*b + x, a) = s^*$.

19.b Il s'agit de montrer que $t \mapsto p(tb + x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$. Remarquons que le résultat de la question **11** n'utilise pas la stricte hyperbolicité.

On note $t_1, \dots, t_k$ les racines de ce polynôme, t_q étant de multiplicité r_q . On a aussi

$$p(tb + x) = p(a) \prod_{i=1}^d \lambda_i(tb + x, a).$$

Pour chaque i , il existe au moins un t tel que $\lambda_i(tb + x, a) = 0$ d'après la question **11**, et ce t est nécessairement l'un des t_q . On en choisit et on regroupe les i correspondant au même t_q , de sorte que

$$d = \sum_q |\{i ; \lambda_i(t_q b + x, a) = 0\}| \leq \sum_q r_q$$

en appliquant **a** à $s^* = 0$. Donc $p(tb + x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

20.a On sait d'après **19** que p est hyperbolique dans la direction b , donc que

$$p(tb - x) = p(b) \prod_i (x - \lambda_i(x, b)) = p(b)x^d - p(b) \sum_i \lambda_i(x, b)x^{d-1} + \dots$$

D'un autre côté,

$$p(tb - x) = t^d p(b) - dM(x, b, \dots, b)t^{d-1} + \dots$$

par d -linéarité et symétrie. Cela donne le résultat par identification.

20.b On suppose par la suite que $p(a) > 0$.

On sait que

$$M(a, b, \dots, b) = \frac{1}{d} p(b) \sum_i \lambda_i(a, b) \geq p(b) \left(\prod_i \lambda_i(a, b) \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Or $p(a) = p(b) \prod_i \lambda_i(a, b)$ d'après **3**. Donc

$$M(a, b) \geq p(b) \left(\frac{p(a)}{p(b)} \right)^{\frac{1}{d}} = p(a)^{\frac{1}{d}} p(b)^{1 - \frac{1}{d}}.$$

21. On a

$$p(ta - x) = M(ta - x, \dots, ta - x)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} p(ta - x) = M(a, ta - x, \dots, ta - x) + \dots + M(ta - x, \dots, ta - x, a) = dM(a, ta - x, \dots, ta - x).$$

D'après Rolle, $\frac{d}{dt}p(ta-x)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, ce qui montre le résultat ($p(a) \neq 0$).

22. Raisonnons par récurrence sur d . Lorsque $d = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons le résultat vrai au rang $d-1$. Soit M symétrique homogène de degré d hyperbolique dans la direction a . On suppose toujours $p(a) > 0$. Fixons i . D'après **21**, le polynôme p_i qui à x associe $M(x, \dots, x, x^i, x, \dots, x)$ est homogène de degré $d-1$, hyperbolique dans la direction x^i (car, d'après **19**, si $x^i \in C(p, a)$, p est hyperbolique dans la direction x^i). On a aussi $p(x^i) > 0$.

Il en résulte que

$$M(x^1, \dots, x^d) \geq \prod_{j \neq i} p(x_j)^{\frac{1}{d-1}}$$

et donc

$$M(x^1, \dots, x^d)^d \geq \prod_j (p(x_j)^{\frac{1}{d-1}})^{d-1}$$

par produit. Donc

$$M(x^1, \dots, x^d) \geq \prod_j p(x_j)^{\frac{1}{d}}.$$

23.a Considérons sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\Phi((u, \alpha), (v, \beta)) = \alpha\beta - B(u, v),$$

et p la forme quadratique associée à Φ . On sait d'après **5** que p est hyperbolique dans la direction $a = (0, 1)$ telle que $p(a) = 1$. La condition $\alpha^2 - q(u) > 0$ exprime que $p(u, \alpha) > 0$. Vérifions que $x := (u, \alpha) \in C(p, a)$. On a

$$p(ta - x) = t^2 - 2\Phi(a, x)t + p(x).$$

Le produit des racines est > 0 et leur somme, égale à $\Phi(a, x) = \alpha > 0$. Donc $x \in C(p, a)$, et de même $y := (v, \beta) \in C(p, a)$. Donc

$$\Phi(x, y) \geq \sqrt{p(x)p(y)},$$

soit

$$\alpha\beta - B(u, v) \geq \sqrt{(\alpha^2 - q(u))(\beta^2 - q(u))}.$$

23.b On applique directement l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique. On a

$$\frac{1}{d!} \text{per } A \geq \left(\prod_{\rho} a_{1, \rho(1)} \cdots a_{d, \rho(d)} \right)^{\frac{1}{d!}}.$$

On compte le nombre de fois qu'apparaît dans ce produit un terme $a_{i,j}$. C'est exactement le nombre de permutations telles que $\rho(i) = j$, soit $(d-1)!$. Ainsi,

$$\frac{1}{d!} \text{per } A \geq \left(\prod_{i,j} a_{i,j} \right)^{\frac{(d-1)!}{d!}},$$

soit

$$\text{per } A \geq d! \left(\prod_{i,j} a_{i,j} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

24. On a

$$\begin{aligned} p(x+y) &= M(x+y, \dots, x+y) \\ &= M(x, \dots, x) + \dots + \binom{d}{k} M(y, \dots, y, x, \dots, x, \dots) + \dots + M(y, \dots, y) \end{aligned}$$

où le terme général contient k termes en y . On a utilisé la symétrie de M . Comme x et y sont dans $C(p, a)$, on peut appliquer **22** au d -uplet $(y, \dots, y, x, \dots, x, \dots)$:

$$p(x+y) \geq \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} p(x)^{\frac{d-k}{d}} p(y)^{\frac{k}{d}} = (p(x)^{\frac{1}{d}} + p(y)^{\frac{1}{d}})^d.$$

Si $f(x) := p(x)^{\frac{1}{d}}$, on a donc, pour $t \in [0, 1]$

$$f((1-t)x + ty) \geq f((1-t)x) + f(ty) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

25. L'application $\det$ est hyperbolique dans la direction I_d (sur $S_d(\mathbb{R})$). De plus, $\det(tI_d - S)$ a ses racines dans $]0, +\infty[$ si et seulement si $S \in S_d^{++}(\mathbb{R})$. Donc $C(\det, I_d) = S_d^{++}(\mathbb{R})$ est un cône convexe, et d'après **24** $S \mapsto (\det S)^{\frac{1}{d}}$ est concave.

26. Si $k = 1$, alors $i = j = 1$ et

$$\lambda_1(x+y) < \lambda_1(x) + \lambda_1(y),$$

ce qui contredit **14**.

27. Soit $\varepsilon > 0$ et $u := x - \varepsilon a$, $v := y - (\lambda_j(y) - \varepsilon)a$. Alors $u+v = (x+y) - \lambda_j(y)a$, de sorte que

$$\lambda_k(u+v) - \lambda_i(u) = \lambda_k(x+y) - \lambda_j(y) - \lambda_i(x) + \varepsilon.$$

On choisit déjà ε tel que cette quantité soit < 0 .

De plus, pour $r < j$,

$$\lambda_r(v) = \lambda_r(y) - \lambda_j(y) + \varepsilon \leq \lambda_{j-1}(y) - \lambda_j(y) + \varepsilon,$$

et on choisit $\varepsilon > 0$ de façon que cette quantité soit strictement négative. En outre, pour $r \geq j$,

$$\lambda_r(v) = \lambda_r(y) - \lambda_j(y) + \varepsilon \geq \varepsilon > 0.$$

28. • On a

$$\varphi_r(0) = \lambda_r(u) ; \varphi_r(1) = \lambda_r(u + v)$$

et

$$\varphi_r(t) \underset{+\infty}{\sim} t\lambda_r(v), \varphi_r(t) \underset{-\infty}{\sim} t\lambda_{d+1-r}(v).$$

• Notons $A_1, \dots, A_5$ les ensembles apparaissant dans cet ordre dans la question **29.a**. On note tout de suite que $A_2 = A_3 = \emptyset$. Notons $N(r)$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi_r(t) = \lambda^*$.

• Soit $r \in A_1 = \llbracket j, d+1-j \rrbracket$.

Premier cas : $r \in A_1 \cap \llbracket i, k \rrbracket = A_5$. Alors $\varphi_r(0) \geq \lambda_i(u) > \lambda^*$, $\varphi_r(1) \leq \lambda_k(u+v) < \lambda^*$, $\varphi_r(+\infty) = +\infty$ et $\varphi_r(-\infty) = -\infty$. Donc $N(r) \geq 3$.

Deuxième cas : cas général. Alors $\varphi_r(0) \geq \lambda_j(u) \geq \lambda_i(u) > \lambda^*$ et $\varphi_r(r) = (-\infty)\lambda_{d+1-r}(v) = -\infty$. Donc $N(r) \geq 1$.

• Soit $r \in A_4$. On a $\varphi_r(1) = \lambda_r(u+v) \leq \lambda_k(u+v) < \lambda^*$. De plus,

$$\varphi_r(+\infty) = (+\infty)\lambda_r(v) = +\infty$$

car $r \geq j$, et

$$\varphi_r(-\infty) = (-\infty)\lambda_{d+1-r}(v) = +\infty$$

car $d+1-r < j$. Ainsi, $N(r) \geq 2$.

29.a On a obtenu la minoration dans la question **28**.

29.b On a que $d+2-j \geq j$, donc $A_4 = \llbracket d+2-j, k \rrbracket$. Le reste a déjà été vu.

30. • Si $d+2-j \leq k$, on a aussi $d+1-j \leq k$ et donc

$$D = d+1-2j+1+2(k-d-2+j+1)+2(d+1-j-i+1) = d+2.$$

• Si $d+1-j \geq k$, on a

$$D = d+1-2j+1+2(k-i+1) = d+2.$$

31. Les hypothèses faites au départ sont contradictoires, car un polynôme de degré d ne peut avoir $d+2$ racines. Donc, si $i+j = k+1$, pour tout (x, y) , $\lambda_k(x+y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y)$. Si $l+1 \geq i+j$, on a $l \geq k$ et, par conséquent,

$$\lambda_l(x+y) \geq \lambda_i(x) + \lambda_j(y).$$

32. Cette solution est inspirée d'un article de Denis Serre, de janvier 2008, *Weyl and Lidskii inequalities for general hyperbolic polynomials*,

www.umpa.ens-lyon.fr/~serre/DPF/WL2.pdf

Dans ce qui suit, d et a sont fixés. L'espace vectoriel Hom_d des polynômes homogènes de degré d est de dimension finie, donc toutes les normes y sont équivalentes. On prend comme norme sur Hom_d le suprémum sur la boule unité (de V^d), pour une norme quelconque sur V .

- Soit H l'ensemble des polynômes homogènes de degré d , hyperboliques dans la direction a . On considère $P \in H$ et on fixe i, j et l tels que $l \geq i + j - 1$. Il s'agit de montrer que $\lambda_l(x + y, P) \geq \lambda_i(x, P) + \lambda_j(y, P)$. D'après la question 9, les fonctions $(x, P) \mapsto \lambda_k(x, P)$ sont continues.

- Supposons montré que, pour $x \notin \mathbb{R}a$ fixé, l'ensemble $SH(x)$ des polynômes P hyperboliques tels que $P(ta - x)$ soit à racines simples est dense dans H . On vérifie facilement que $SH(x)$ est un ouvert (on fixe $d + 1$ points intercalés entre les d racines de $P(ta - x)$, et aussi entre les racines extrêmes et les infinis, on constate que, si Q est assez proche de P , $Q(ta - x)$ prend des valeurs de signes alternés et on applique le théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, $SH(x)$ est un ouvert dense de H , fermé de Hom_d (on peut montrer que le complémentaire est ouvert ; si $Q \notin H$, il existe x tel que $Q(ta - x)$ admette une racine complexe non réelle. En appliquant la méthode de 17, on voit que si R est assez proche de Q , $R(ta - x)$ admet une racine non réelle). Donc H est complet, donc de Baire.

Soit X une partie dénombrable de $V - \mathbb{R}a$ dense dans V (par exemple, les points à coordonnées rationnelles). D'après le théorème de Baire, $\bigcap_{x \in X} SH(x)$ est dense dans H . Soit (P_k) une suite de $\bigcap_x SH(x)$ convergeant vers P et $(x_n), (y_n)$ des suites d'éléments de X convergeant vers x et y respectivement.

On peut appliquer la question 31 :

$$\lambda_l(x_n + y_n, P_n) \geq \lambda_i(x_n, P_n) + \lambda_j(y_n, P_n).$$

Par passage à la limite, on a l'inégalité souhaitée.

- Montrons à présent le résultat admis. Soit $x \notin \mathbb{R}a$. Soit φ une forme linéaire non nulle s'annulant en a , mais pas en x . On la prend de norme d'opérateur égale à 1.

Posons $C := \frac{1}{\|(a \cdot \nabla)P\|}$. Considérons $\varepsilon > 0$ et le polynôme

$$Q(y) := P(y) + C\varepsilon\varphi(y)(a \cdot \nabla)P(y),$$

qui est bien homogène de degré d . On a

$$Q(ta - x) = P(ta - x) - \varepsilon\varphi(x)(a \cdot \nabla)P(ta - x).$$

Notons e le nombre de racines simples de $Q(ta - x)$.

Déjà, ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ car

$$Q(ta - x) = \psi(t) + \lambda\psi'(t) = e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}\psi(t))$$

où $\psi(t) := P(ta - x)$. On applique ensuite le théorème de Rolle (en utilisant un point à l'infini). On suppose à présent que $\lambda \neq 0$. Notons e le nombre de racines simples de $Q(ta - x)$. On constate par application de Rolle que le nombre de racines simples de $Q(ta - x)$ est au moins égal à $e + 1$. Montrons alors par récurrence descendante sur e que l'ensemble des polynômes strictement hyperboliques est dense dans l'ensemble des polynômes hyperboliques tels que $P(ta - x)$ ait au moins e racines distinctes. Soit P un polynôme de cet ensemble. Si $e = d$, P est déjà strictement hyperbolique. Supposons le résultat au rang $e + 1$. Soit P tel que $P(ta - x)$ ait au moins e racines simples. Alors, avec les notations ci-dessus, on choisit R strictement hyperbolique tel que $\|Q - R\| \leq \varepsilon$. Or $\|P - Q\| \leq C\varepsilon \| \varphi \| \|a \cdot \nabla P\| = \varepsilon$. Donc $\|P - R\| \leq 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure.